S. TARG

ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE

S. TARG

ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE

PRÉFACE DE LA PREMIÈRE ÉDITION FRANÇAISE

Ce cours de mécanique rationnelle est destiné avant tout aux élèves des écoles techniques supérieures (de l'enseignement direct ou par correspondance) où cet enseignement est donné sous une forme succincte. Les programmes de ces écoles pouvant être conçus de manières très différentes, nous nous sommes efforcé dans notre choix ainsi que dans notre exposé de conserver à ce cours son intégrité, afin qu'il puisse donner un large aperçu des principales méthodes de la mécanique, dont la connaissance est indispensable à l'ingénieur, ainsi que des divers domaines d'application de cette science. Nous avons également voulu rendre cet ouvrage utilisable aussi bien pour des programmes très condensés que pour des études beaucoup plus détaillées.

On peut se faire une idée du contenu de ce cours rien qu'en parcourant la table des matières. Bien qu'il soit un ouvrage élémentaire, nous avons jugé nécessaire d'insister sommairement sur certaines notions de mécanique appliquée telles que le mouvement dans le champ d'attraction (satellites artificiels et trajectoires elliptiques), le mouvement des corps à masse variable (propulsion des fusées), la théorie simplifiée des gyroscopes, etc. Toutes ces questions sont aujourd'hui d'une actualité brûlante et elles doivent indiscutablement être incluses dans les programmes des cours, même élémentaires.

Nous avons été guidé dans l'élaboration de ce cours par la ferme conviction, confirmée par une longue expérience pédagogique, que dans un manuel les matières doivent être exposées en allant du particulier au général. C'est pourquoi l'étude de la statique dans le plan précède celle de la statique dans l'espace à trois dimensions, la dynamique du point vient avant la dynamique des systèmes, le mouvement rectiligne avant le mouvement curviligne, etc.

Cela permet à l'élève d'assimiler plus rapidement et de mieux comprendre les notions exposées.

Dans l'énoncé du cours nous avons utilisé, en même temps que les méthodes géométriques et analytiques, la méthode vectorielle aujourd'hui universellement adoptée pour ses avantages incontestables. Toutefois nous nous sommes principalement borné à des opérations vectorielles présentant une analogie avec les opérations simi-

laires sur les grandeurs scalaires et n'exigeant pas l'introduction de nombreuses notions nouvelles.

Nous avons accordé une large place (plus du tiers du livre) aux exemples et aux méthodes de résolution des problèmes. Nous nous sommes efforcé de choisir les exercices et les problèmes types permettant de pénétrer la nature même des phénomènes mécaniques. La solution des problèmes s'accompagne d'indications devant aider les étudiants dans leur travail individuel. En ce sens cet ouvrage peut être utile aux étudiants de toutes les spécialisations et particulièrement à ceux qui entreprennent l'étude autodidactique de la mècanique.

S. Targ

AVANT-PROPOS

Le développement de la technique moderne pose aux ingénieurs les problèmes les plus variés liés au calcul de constructions diverses (bâtiments, ponts, canaux, barrages, etc.), à l'élaboration des projets, à la production et à l'exploitation des machines, des mécanismes, des moteurs de tout genre et en particulier des engins tels que les automobiles, les locomotives, les bateaux, les avions, les fusées, les vaisseaux cosmiques, etc. Malgré la grande diversité de tous ces problèmes, leur résolution repose par certains côtés sur des principes généraux et possède une base scientifique commune. Cela s'explique par le fait que dans les problèmes cités un rôle important incombe aux questions nécessitant l'étude des lois du mouvement ou de l'équilibre des corps matériels.

La *mécanique rationnelle* est précisément la science des lois générales du mouvement, de l'équilibre et des interactions entre les corps matériels. La mécanique rationnelle constitue l'une des bases scientifiques des disciplines techniques modernes [1].

En mécanique on appelle *mouvement* toute variation temporelle de la position mutuelle des corps matériels dans l'espace. On nomme *interaction mécanique* entre des corps matériels la forme spécifique d'interaction provoquant une modification du mouvement de ces corps ou de leur forme (déformations).

On appelle *force* la grandeur exprimant la mesure quantitative de l'interaction mécanique des corps.

La tâche principale de la mécanique rationnelle réside dans l'étude des lois générales du mouvement et de l'équilibre des corps matériels soumis à l'action des forces qui leur sont appliquées.

---

[1] On appelle mécanique au sens général du terme la science ayant pour objet la résolution de tous les problèmes liés à l'étude du mouvement ou de l'équilibre des corps matériels et de leurs interactions.

La mécanique rationnelle constitue la partie de la mécanique qui étudie les *lois générales* du mouvement et de l'interaction des corps matériels, c'est-à-dire les lois valables, par exemple, aussi bien pour le mouvement de la Terre autour du Soleil que pour celui d'une fusée ou d'un obus, etc. L'autre partie de la mécanique comprend les différentes branches de la mécanique dite appliquée concernant l'élaboration de projets et les calculs de toute sorte de constructions, de moteurs, de mécanismes, de machines et de leurs organes. Toutes ces disciplines techniques sont basées sur les lois et les méthodes de la mécanique rationnelle.

On divise habituellement l'étude de la mécanique en trois parties suivant le caractère des problèmes considérés : la *statique*, la *cinématique* et la *dynamique*. On étudie en statique les lois de composition des forces et les conditions d'équilibre des corps matériels soumis à l'action des forces. La cinématique étudie les propriétés géométriques générales du mouvement des corps. Quant à la dynamique, elle traite des lois du mouvement des corps matériels sous l'action des forces extérieures.

Suivant la nature de l'objet étudié on divise la mécanique rationnelle en :

a) mécanique du point matériel, c'est-à-dire d'un corps dont on peut négliger les dimensions lorsqu'on étudie son mouvement (ou son équilibre), et des systèmes de points matériels ;

b) mécanique des corps solides, c'est-à-dire des corps dont on peut négliger les déformations durant l'étude de leur mouvement (ou de leur équilibre) ;

c) mécanique des corps à masse variable (corps dont la masse varie avec le temps) ;

d) mécanique des corps déformables (théorie de l'élasticité et de la plasticité) ;

e) mécanique des liquides (hydromécanique) ;

f) mécanique des gaz (aéromécanique et dynamique des gaz).

On étudie habituellement dans un cours général de mécanique rationnelle la mécanique du point matériel et du corps solide ainsi que les lois générales du mouvement des systèmes de points matériels.

La mécanique rationnelle fait partie des sciences naturelles. Elle s'appuie sur des lois tirées de l'expérience reflétant une classe déterminée de phénomènes naturels liés au mouvement des corps matériels. Le rôle et l'importance de la mécanique rationnelle résident non seulement dans le fait qu'elle constitue la base scientifique de nombreuses branches de la technique moderne, mais aussi dans ce que ses lois et ses méthodes permettent d'étudier et d'expliquer un grand nombre de phénomènes importants dans le monde qui nous environne et de contribuer au développement de la science en général ainsi qu'à l'élaboration d'une juste conception matérialiste du monde.

L'apparition et le développement de la mécanique [1] en tant que science sont intimement liés à l'histoire du développement des forces productives de la société, au niveau de la production et de la technique à chaque étape concrète de ce développement.

Dans l'Antiquité, lorsque les buts de la production résidaient dans la satisfaction des besoins de la technique du bâtiment, se

---

[1] Le terme « mécanique », du grec *mêkhanê* (construction, machine, invention), est apparu pour la première fois dans les œuvres d'Aristote (384-322 av. J.-C.), l'un des plus grands philosophes de l'Antiquité.

développa la science des machines simples (poulie, treuil, levier, plan incliné) ainsi que la théorie générale de l'équilibre des corps (statique). On trouve déjà dans les œuvres d'Archimède (287—212 av. J.-C.), l'un des plus grands savants de l'Antiquité, une formulation des éléments de statique.

La dynamique n'apparaît que beaucoup plus tard. Le développement des rapports de production bourgeois dans les pays d'Europe occidentale et centrale stimula le développement de divers métiers, du commerce, de la navigation et de l'art militaire (invention des armes à feu), ainsi que de très importantes découvertes en astronomie. Tout ceci favorisa l'accumulation de nombreuses données d'expérience qui, systématisées et généralisées, ont abouti au XVIIe siècle à la découverte des lois de la dynamique. Le mérite principal de l'élaboration des principes de la dynamique appartient au génial savant Galilée (1564—1642) et à Isaac Newton (1643—1727). Dans son ouvrage « Fondements mathématiques de la philosophie naturelle », édité en 1687, Newton donna un énoncé systématique des lois fondamentales de la mécanique dite classique (lois de Newton). Par la suite ces lois furent maintes fois soumises à une vérification expérimentale et ont reçu leur confirmation dans la pratique de la production sociale. Cela nous permet d'estimer que nos connaissances acquises dans le domaine de la mécanique, à l'aide des lois de Newton, sont des données certaines sur lesquelles tout ingénieur peut se baser hardiment durant son activité pratique [1].

Le XVIIIe siècle vit le développement intense des méthodes analytiques en mécanique, c'est-à-dire des méthodes basées sur l'application du calcul intégral et différentiel. Le célèbre mathématicien suisse L. Euler (1707—1783) élabora les méthodes de résolution des problèmes de la dynamique du point et du corps solide, basées sur la mise en équation et l'intégration des équations différentielles correspondantes. Dans ce domaine les travaux les plus importants pour le développement de la mécanique furent réalisés par les célèbres savants français d'Alembert (1717—1783), qui proposa le principe bien connu de la résolution des problèmes de dynamique, et Lagrange (1736—1813), qui élabora la méthode générale de résolution analytique des problèmes de dynamique sur la base du principe de d'Alembert et du principe des déplacements virtuels. Ces méthodes analy-

---

[1] Le développement ultérieur de la science a montré que pour des vitesses de l'ordre de celle de la lumière le mouvement des corps est soumis aux lois de la mécanique relativiste, et le mouvement des microéléments (électrons, positrons, etc.), aux lois de la mécanique quantique. Ces découvertes n'ont fait toutefois que préciser le domaine d'application de la mécanique classique et confirmer la justesse de ses lois pour le mouvement de tous les corps autres que les particules élémentaires pour des vitesses n'approchant pas celle de la lumière, c'est-à-dire pour les mouvements qui ont toujours eu et ont encore une énorme importance pratique pour la technique et la mécanique céleste.

tiques de résolution des problèmes ont reçu aujourd'hui une application générale en mécanique.

La cinématique ne s'est dégagée en tant que branche particulière de la mécanique qu'au cours de la première moitié du XIXe siècle sous l'influence des exigences du développement des constructions mécaniques. A l'heure actuelle, la cinématique en tant que branche indépendante de la mécanique a une grande importance pour l'étude des mécanismes et des machines.

En Russie les travaux du génial savant et écrivain M. Lomonossov (1711—1765), ainsi que l'œuvre de L. Euler (qui vécut longtemps à Pétersbourg) exercèrent une profonde influence sur le développement des premières recherches dans le domaine de la mécanique. Parmi les nombreux savants russes ayant beaucoup contribué au développement des diverses branches de la mécanique rationnelle il convient avant tout de citer: M. Ostrogradski (1801—1861) auquel on attribue de nombreuses recherches sur les méthodes analytiques de résolution des problèmes de la mécanique; P. Tchébychev (1821—1894) qui donna une nouvelle orientation à l'étude du mouvement des mécanismes; S. Kovalevskaïa (1850—1891) qui, après Euler et Lagrange, a réussi à donner la solution d'un problème spécial particulièrement difficile du mouvement d'un solide autour d'un point immobile; A. Liapounov (1857—1918) qui élabora de nouvelles méthodes d'étude de la stabilité des mouvements; I. Mechtcherski (1859—1935) qui posa les fondements de la mécanique des corps à masse variable; K. Tsiolkovski (1857—1935) auquel il faut attribuer des découvertes fondamentales dans la théorie de la propulsion à réaction; A. Krylov (1863—1945) qui développa la théorie du navire et contribua largement au développement de la théorie des gyroscopes.

Les travaux de N. Joukovski (1847—1921), le «père» de l'aviation russe, et de son élève S. Tchaplyguine (1869—1942) eurent une importance considérable pour les investigations ultérieures en mécanique. Un trait caractéristique de l'œuvre de N. Joukovski réside dans l'application des méthodes de la mécanique à la résolution des problèmes techniques actuels. Les idées de N. Joukovski exercèrent également une grande influence sur l'enseignement de la mécanique rationnelle dans les écoles techniques supérieures de l'Union Soviétique.

Première partie

Statique du corps solide

Chapitre I

NOTIONS PRINCIPALES ET AXIOMES DE LA STATIQUE

§ 1. Objet de la statique. La *statique* est la partie de la mécanique qui étudie les lois de la composition des forces et les conditions d'équilibre des corps matériels soumis à l'action des forces.

Nous dirons qu'un corps est en équilibre s'il se trouve en état de repos par rapport à d'autres corps matériels. Lorsque le corps, par rapport auquel on étudie l'équilibre, peut être considéré comme immobile, l'équilibre est, par définition, appelé absolu, dans le cas contraire il est relatif. En statique nous n'étudierons que l'équilibre absolu. Pratiquement, lors des calculs, on peut considérer comme absolu l'équilibre par rapport à la Terre ou par rapport aux corps rigidement liés à la Terre. La légitimité de cette proposition sera démontrée en dynamique, où l'on pourra donner une définition plus rigoureuse de l'équilibre absolu. C'est également en dynamique que l'on examinera la question de l'équilibre relatif des corps.

Les conditions d'équilibre des corps dépendent considérablement de l'état — solide, liquide ou gazeux — de ces corps. L'équilibre des corps liquides et gazeux est étudié dans les cours d'hydrostatique et d'aérostatique. Dans le cours de mécanique générale, on ne considère habituellement que les problèmes d'équilibre des corps solides.

Tous les corps solides qu'on rencontre dans la nature changent plus ou moins de forme (se déforment) sous l'influence des actions extérieures. L'intensité de ces déformations dépend de la matière des corps, de leur forme géométrique, de leurs dimensions et des efforts appliqués. Pour assurer la solidité des diverses installations et constructions on choisit le matériau et les dimensions de leurs parties de façon que les déformations dues aux charges actives soient assez petites [1]. En conséquence, lorsqu'on étudie les condi-

[1] Par exemple, le matériau et les dimensions des tiges des constructions mécaniques sont choisis de telle manière que sous l'action des charges actives ces tiges s'allongent (ou se raccourcissent) de moins d'un millième de leur longueur initiale. Les déformations admissibles pendant la flexion, la torsion, etc. sont du même ordre.

tions générales de l'équilibre des corps solides, il est parfaitement admis de négliger leurs déformations infimes et de les considérer comme indéformables ou solides parfaits. Un corps sera dit *solide parfait*, si la distance entre deux quelconques de ses points reste constamment inchangée. Par la suite, lorsque nous résolverons des problèmes de statique, nous considérerons tous les corps comme des corps solides parfaits, quoique souvent nous les appellerons « corps solides » ou « solides » tout court. Comme nous le verrons à la fin du § 3, les conditions de l'équilibre obtenues pour des corps solides parfaits peuvent être appliquées non seulement à des corps peu déformables, mais également à tout corps déformable. Ainsi, la statique du corps solide a des applications pratiques assez larges.

Lorsque l'on calcule la solidité des parties d'une construction ou d'une machine, les déformations des corps acquièrent une importance considérable. Ces questions sont étudiées dans les cours de résistance des matériaux et de théorie de l'élasticité.

Pour qu'un corps solide, sous l'action d'un système de forces donné, soit en équilibre (au repos), il faut que ces forces satisfassent à des *conditions d'équilibre* bien déterminées du système de forces donné. La détermination de ces conditions est un des problèmes principaux de la statique. Mais pour déterminer les conditions d'équilibre de différents systèmes de forces, ainsi que pour résoudre une série d'autres problèmes de la mécanique, il est nécessaire de savoir composer les forces agissant sur un corps solide, remplacer l'action d'un système de forces par celle d'un autre et, en particulier, réduire un système de forces donné à sa plus simple forme. La statique du corps solide étudie donc deux problèmes principaux suivants : 1) composition des forces et réduction d'un système de forces appliquées à un corps solide à sa plus simple expression ; 2) détermination des conditions d'équilibre des systèmes de forces agissant sur un corps solide.

Les problèmes de la statique peuvent se résoudre soit par des constructions géométriques appropriées (méthodes géométrique et graphique), soit par des calculs numériques (méthode analytique). Dans ce cours nous étudierons les deux méthodes, mais il faut tenir compte du fait que lorsque l'on résout un problème de mécanique, les constructions géométriques concrètes jouent toujours un rôle primordial.

§ 2. **Force.** L'état d'équilibre ou de mouvement d'un corps dépend du caractère de ses liaisons mécaniques avec les autres corps, c'est-à-dire des pressions, des attractions ou des répulsions qu'il éprouve à la suite de ces actions réciproques. *La grandeur qui mesure quantitativement l'action mécanique réciproque des corps matériels est appelée en mécanique une force.*

Les grandeurs, qu'on est amené à considérer en mécanique, peuvent être divisées en deux catégories: grandeurs scalaires qui sont complètement caractérisées par leur valeur numérique, et grandeurs vectorielles qui, outre leur valeur numérique, sont encore caractérisées par leur sens dans l'espace.

La force est une grandeur vectorielle. Son action sur un corps est caractérisée par: 1) la *valeur numérique* (l'*intensité*) ou le *module*, 2) la *ligne d'action* (la *direction*) et le *sens*, 3) le *point d'application*.

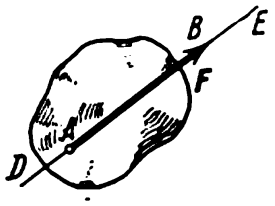


Fig. 1

Pour déterminer le module d'une force on compare sa grandeur à celle d'une force prise pour unité. En statique, nous prendrons comme unité de force un kilogramme-force (1 kgf). Pour mesurer statiquement les forces on se sert, comme on le sait du cours de physique, d'appareils appelés dynamomètres.

Le sens et le point d'application d'une force dépendent du caractère des actions réciproques des corps et de leurs positions relatives. Par exemple, la force de la pesanteur qui agit sur un corps quelconque est dirigée verticalement vers le bas. Les forces de pression agissant sur deux sphères lisses pressées l'une contre l'autre sont dirigées suivant les normales aux surfaces des sphères aux points de contact et sont appliquées en ces points, etc.

Graphiquement la force est représentée par un segment de droite orienté (vecteur). La longueur de ce segment (AB sur la fig. 1) représente, à l'échelle choisie, le module de la force, le sens du segment correspond au sens de la force, son origine (le point A sur la fig. 1) coïncide en général avec le point d'application de la force. Quelquefois il est commode de représenter la force de telle façon que le point d'application coïncide avec son extrémité, la pointe de la flèche (comme sur la fig. 4, *c*). La droite DE, le long de laquelle est dirigée la force, s'appelle *direction d'action de la force*. Une force, ainsi que n'importe quelle autre grandeur vectorielle, sera représentée soit par une lettre grasse ($\boldsymbol{F}$), soit par deux lettres maigres avec un trait au-dessus ($\overline{AB}$). Le module d'une force est représenté par les traits verticaux de chaque côté du vecteur ($|\boldsymbol{F}|$) ou par cette même lettre maigre (F). Lorsque l'on écrit des formules à la main on met des traits au-dessus des lettres si l'on veut désigner un vecteur.

Par la suite, nous appellerons *système de forces* un ensemble de forces agissant sur un corps solide parfait quelconque. Convenons également de donner les définitions suivantes:

1. Un corps non lié à d'autres corps et qu'on peut, à partir d'une position donnée, déplacer arbitrairement dans l'espace, est dit *libre*.

2. Si, sous l'action d'un système de forces donné, un corps solide libre se trouve au repos, ce système de forces est dit *équilibré*.

3. Si l'on peut remplacer un système de forces agissant sur un corps solide libre par un autre système, sans pour cela changer l'état de repos ou de mouvement du corps, ces deux systèmes de forces sont dits *équivalents*.

4. Si un système de forces donné est équivalent à une seule force, cette force est dite *résultante* du système de forces donné. Ainsi, la *résultante est la force qui, à elle seule, peut remplacer l'action d'un système de forces donné sur un corps solide*.

Une force de même intensité et de même direction que la résultante, mais de sens opposé, s'appelle *force d'équilibrage*.

5. Les forces agissant sur un corps solide peuvent être divisées en deux catégories, les forces extérieures et les forces intérieures. Les forces déployées par d'autres corps matériels sur les particules du corps donné sont dites *extérieures*. Les forces, avec lesquelles les particules du corps donné agissent les unes sur les autres, sont dites *intérieures*.

6. Une force appliquée en un point déterminé d'un corps est dite *concentrée*. Les forces qui agissent sur tous les points d'un volume donné ou d'une partie donnée de la surface d'un corps sont dites *réparties*.

La notion de force concentrée est conventionnelle puisqu'il est pratiquement impossible d'appliquer une force à un corps en un seul point. Les forces qu'on considère en mécanique comme concentrées sont, en réalité, les résultantes de certains systèmes de forces réparties.

En particulier, la force de pesanteur qu'on considère habituellement en mécanique et qui agit sur un corps solide donné est en réalité la résultante des forces de pesanteur des particules de ce corps. La direction de cette résultante passe par le point appelé centre de gravité du cours [1].

§ 3. Axiomes de la statique. On démontre tous les théorèmes et toutes les équations de la statique à partir de plusieurs affirmations initiales qu'on accepte sans démonstration mathématique et

[1] La question de la détermination des centres de gravité des corps sera étudiée au chapitre VIII. Remarquons pour le moment que si un corps homogène possède un centre de symétrie (barre rectangulaire, cylindre, sphère, etc.), le centre de gravité de ce corps coïncide avec son centre de symétrie.

qu'on appelle axiomes ou principes de la statique. Les axiomes de la statique sont le résultat des généralisations de nombreuses expériences et observations de l'équilibre et du mouvement des corps, généralisations maintes fois confirmées par la pratique. Certains de ces axiomes sont des conséquences des lois fondamentales de la mécanique que nous étudierons en dynamique.

Axiome 1. *Si deux forces agissent sur un corps solide parfait libre, celui-ci ne peut se trouver en équilibre que dans le cas où ces deux*

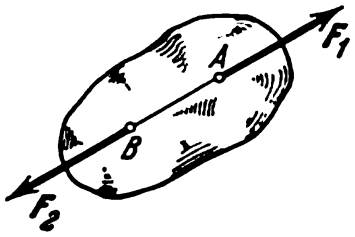


Fig. 2

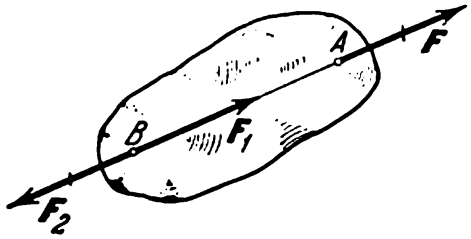


Fig. 3

forces sont de même intensité ($F_1 = F_2$), *de même direction mais de sens opposés* (fig. 2).

L'axiome 1 définit le plus simple des systèmes de forces équilibrés car l'expérience montre qu'un corps libre, sur lequel agit une force unique, ne peut pas se trouver en équilibre.

Axiome 2. *L'action d'un système donné de forces sur un corps solide parfait ne changera pas, si l'on ajoute à ce système ou si l'on lui enlève un système de forces équilibré.*

Cet axiome établit le fait que deux systèmes de forces qui diffèrent l'un de l'autre par un système équilibré sont équivalents.

Conséquences des axiomes 1 et 2. *Sans changer l'action d'une force sur un corps solide parfait, on peut transporter le point d'application de la force le long de sa direction en un autre point quelconque de ce corps.*

Effectivement, soit une force $\boldsymbol{F}$ (fig. 3) agissant sur un corps solide et appliquée au point A. Prenons sur la direction de cette force un point arbitraire B et appliquons en ce point deux forces équilibrées $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$, telles que $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}$. Cela ne change pas l'action de la force $\boldsymbol{F}$ sur le corps. Mais les forces $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{F}_2$, selon l'axiome 1, forment également un système équilibré qui peut être rejeté [1]. En définitive, sur le corps n'agira qu'une seule force $\boldsymbol{F}_1$ égale à $\boldsymbol{F}$, mais appliquée au point B.

Ainsi, le vecteur qui représente la force $\boldsymbol{F}$ peut être considéré comme appliqué en un point quelconque de la ligne d'action de la force (un tel vecteur est dit *glissant*).

[1] Les forces supprimées ou transportées seront barrées sur les figures.

Le résultat obtenu n'est vrai que pour les forces agissant sur un corps solide parfait. On ne peut utiliser ce résultat dans les calculs pratiques que dans le cas où, en déterminant les conditions d'équilibre de telle ou telle construction, on ne tient pas compte des efforts intérieurs qui naissent dans ses parties.

Par exemple, la tige AB, dessinée sur la fig. 4, *a*, sera en équilibre si $F_1 = F_2$. Si l'on transporte les deux forces en un point quelconque C de la tige (fig. 4, *b*) ou bien si l'on transporte la force F_1

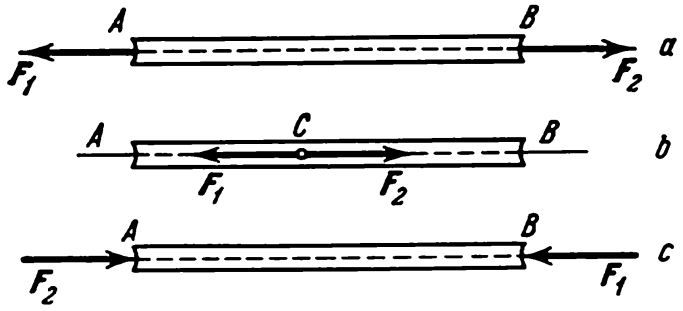


Fig. 4

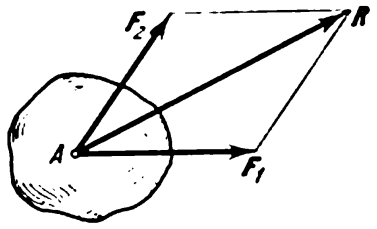


Fig. 5

au point B et la force F_2 au point A (fig. 4, *c*), l'équilibre ne sera pas compromis. Cependant les efforts intérieurs différeront selon le cas. Dans le premier cas la tige s'étire sous l'action des forces appliquées, dans le deuxième, elle ne subit aucune tension et dans le troisième cas, la tige se comprimera [1]. Donc, lorsque l'on détermine les efforts intérieurs, on n'a pas le droit de translater le point d'application de la force le long de sa direction.

Axiome 3 (axiome du parallélogramme des forces). *Deux forces appliquées à un corps en un même point ont une résultante appliquée en ce même point et représentée par la diagonale du parallélogramme ayant ces forces comme côtés.*

Le vecteur $\boldsymbol{R}$, égal à la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ (fig. 5), s'appelle somme géométrique des vecteurs $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2.$$

Par conséquent, l'axiome 3 peut encore être énoncé de la façon suivante: *la résultante de deux forces appliquées en un point d'un corps est égale à la somme géométrique (vectorielle) de ces forces et est appliquée en ce même point.*

---

[1] Pour étirer (ou comprimer) une tige au moyen d'une force $\boldsymbol{F}_1$ il faut appliquer cette force à l'une de ses extrémités et soit fixer rigidement l'autre extrémité, soit la maintenir au moyen d'une force $\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_1$ comme sur la fig. 4. La force de traction (ou de compression) sera, dans les deux cas, la même et égale à $\boldsymbol{F}_1$, et non pas à $2\boldsymbol{F}_1$, comme on pourrait le croire à tort.

Insistons sur la différence des notions de somme de forces et de résultante. Considérons, par exemple, un corps sur lequel agissent deux forces F_1 et F_2 appliquées aux points A et B (fig. 6). Lorsqu'on construit la somme de deux forces, on peut les reporter à partir d'un point arbitraire. Sur la fig. 6 on a représenté une force Q, égale à la somme des forces F_1 et F_2 ($Q = F_1 + F_2$), comme étant la diagonale du parallélogramme correspondant. Mais la force Q n'est pas

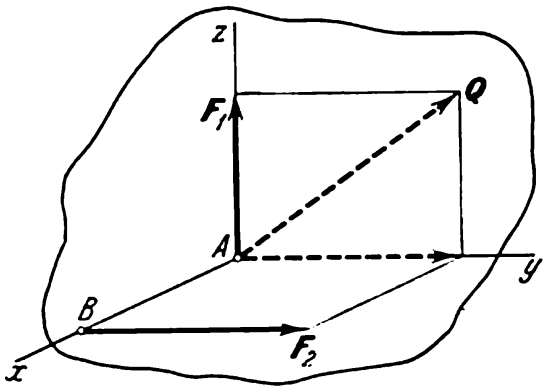


Fig. 6

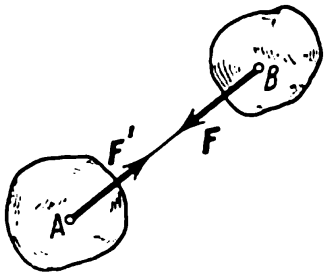


Fig. 7

la résultante de ces forces car, comme il est facile de le comprendre, la seule force Q ne peut pas remplacer l'action des forces F_1 et F_2 sur le corps donné. De plus, ces deux forces, comme on le verra, n'ont pas du tout de résultante (§ 47).

Axiome 4. *Lorsqu'un corps matériel exerce une action quelconque sur un autre corps, il se produit une réaction de même intensité mais de sens opposé.*

La loi de l'égalité de l'action et de la réaction est une des lois fondamentales de la mécanique. Il résulte de cette loi que si le corps A agit sur le corps B avec une force F, en même temps le corps B agit sur le corps A avec une force de même intensité, de même direction mais de sens opposé $F' = -F$ (fig. 7). Toutefois, les forces F et F' ne forment pas un système de forces équilibré car elles sont appliquées à des corps différents.

Propriété des forces intérieures. Selon l'axiome 4 deux particules quelconques d'un corps solide agissent l'une sur l'autre avec des forces d'intensité égale et de sens opposé. Lors des études des conditions générales de l'équilibre, un corps étant considéré comme solide parfait, toutes les forces intérieures constituent (selon l'axiome 1) un système équilibré qui peut être rejeté (axiome 2). En conséquence, lorsqu'on étudie les conditions générales de l'équilibre, il ne faut tenir compte que des forces extérieures agissant sur le corps solide donné ou sur la construction donnée. Par la suite, lorsque nous parlerons de forces, nous n'aurons en vue (sauf réserve spéciale) que les forces extérieures.

Axiome 5 (principe de solidification). *Si, sous l'action d'un système de forces donné, un corps déformable se trouve en équilibre, l'équilibre ne sera pas rompu lorsque ce corps durcira (deviendra un solide parfait).*

L'affirmation énoncée dans cet axiome est évidente. Il est clair par exemple que l'équilibre d'une chaîne ne sera pas modifié si l'on soude bout à bout ses chaînons ni l'équilibre d'un fil souple s'il se transforme en une tige rigide courbée, etc. Puisque sur le corps au repos, avant et après le durcissement, agit un même système de forces, l'axiome 5 peut également être énoncé sous une autre forme: *à l'équilibre, les forces agissant sur un corps déformable quelconque satisfont aux mêmes conditions que dans le cas d'un corps solide parfait; cependant, dans le cas d'un corps déformable ces conditions, étant nécessaires, peuvent ne pas être suffisantes.*

Par exemple, pour qu'ait lieu l'équilibre d'un fil souple soumis à l'action de deux forces appliquées à ses extrémités, les conditions doivent être les mêmes que dans le cas d'une tige rigide (les forces doivent être de même intensité et dirigées le long du fil dans des sens opposés). Mais ces conditions ne sont pas suffisantes. Pour l'équilibre du fil il faut encore que les forces appliquées soient étirantes, c'est-à-dire qu'elles soient dirigées comme le montre la figure 4, *a*.

Les ingénieurs, dans leurs calculs, appliquent très souvent le principe de solidification. Ce principe permet, au cours de la détermination des conditions de l'équilibre, de considérer un corps déformable (courroie, câble, chaîne, etc.) ou une construction déformable quelconque comme absolument rigides et de leur appliquer les procédés de la statique du corps solide. Si le nombre des équations obtenues de cette façon est insuffisant, on pose des équations supplémentaires qui tiennent compte soit des conditions de l'équilibre de certaines parties de la construction, soit de leur déformation (les problèmes dans lesquels il faut tenir compte des déformations se résolvent dans le cours de résistance des matériaux).

§ 4. Liaisons et leurs réactions. Par définition, un corps qui n'est pas lié à d'autres corps et qui peut effectuer des déplacements quelconques dans l'espace s'appelle libre (par exemple, un ballon dans l'air). Un corps, dont les déplacements dans l'espace sont limités par d'autres corps liés à lui ou se trouvant en contact avec lui, s'appelle non libre ou gêné. *Nous appellerons liaison tout ce qui limite les déplacements d'un corps donné dans l'espace.*

Exemples de corps gênés: poids reposant sur une table, porte suspendue à ses charnières, etc. Dans ces cas, les liaisons seront: pour le poids la surface de la table ne lui permettant pas de se déplacer verticalement vers le bas; pour la porte les charnières ne lui permettant pas de s'éloigner du jambage.

Un corps, qui sous l'action de forces directement appliquées tend à effectuer un déplacement entravé par une liaison, agit sur cette dernière avec une certaine force. Réciproquement, selon l'axiome 4, la liaison agira sur le corps avec une force d'intensité égale mais de sens opposé. *On appelle force de liaison, ou force de réaction, ou simplement réaction, la force avec laquelle une liaison donnée agit sur un corps, limitant tel ou tel de ses déplacements.*

Par la suite, les forces qui ne seront pas des réactions (telles que la force de la pesanteur) seront appelées *forces actives*. La particularité d'une force active consiste en ce que son intensité et sa direction ne dépendent pas directement des autres forces agissant sur le corps. La réaction diffère des forces actives qui agissent sur le corps, son intensité dépend toujours de ces forces et ne peut pas être déterminée à l'avance (si aucune force active n'agit sur le corps, les réactions sont nulles); pour connaître l'intensité de la réaction il faut résoudre un problème correspondant de statique. *La réaction est dirigée dans le sens opposé à celui dans lequel la liaison limite le déplacement du corps.* Lorsque la liaison limite les déplacements du corps dans plusieurs directions à la fois, la direction de la réaction est, a priori, inconnue et doit être déterminée au cours de la solution du problème considéré.

Dans les problèmes de la statique, il est très important de savoir déterminer correctement les directions des forces de réaction. C'est pourquoi nous allons examiner maintenant comment sont dirigées les réactions de certains types fondamentaux de liaisons (des exemples supplémentaires sont donnés au § 26).

1. Plan (surface) lisse ou support. Une surface sera dite lisse, si l'on peut, en première approximation, négliger le frottement d'un corps contre elle. Une telle surface n'empêche le corps de se déplacer que dans la direction de la perpendiculaire (normale) aux surfaces des corps en leur point de contact (fig. 8, *a*) [1]. C'est pourquoi la *réaction N d'une surface lisse ou d'un support est dirigée le long de la normale commune aux surfaces des corps en leur point de contact et est appliquée en ce point.* Lorsque l'une des surfaces en contact est un point (fig. 8, *b*) la réaction est dirigée *le long de la normale à l'autre surface.*

2. Fil. La liaison réalisée sous forme d'un fil souple inextensible (fig. 9) empêche le corps M de s'éloigner du point de suspension du fil dans la direction AM. C'est pourquoi *la réaction T du fil est dirigée le long de ce fil vers le point de suspension.*

3. Charnière cylindrique (palier lisse). Si deux corps sont réunis par un boulon qui passe par des orifices pra-

[1] On n'a pas montré sur les figures 8-11 les forces agissant sur les corps. Dans les cas représentés sur les figures 8 et 9, les réactions ont les directions désignées, quelles que soient les forces données et indépendamment du fait que le corps se trouve au repos ou en mouvement.

tiqués dans les deux corps, un tel assemblage s'appelle articulation ou charnière ; la ligne axiale du boulon s'appelle axe de la charnière. Le corps AB, articulé en D (fig. 10, *a*), peut tourner autour de l'axe

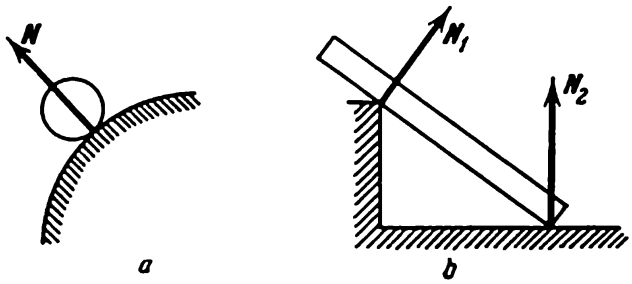


Fig. 8

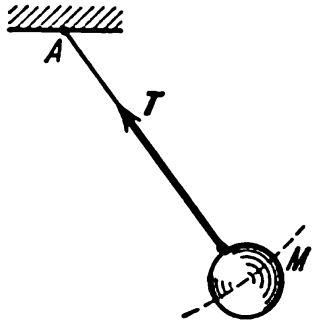


Fig. 9

de la charnière (dans le plan de la figure) ; cependant l'extrémité A du corps ne peut se déplacer en aucune direction perpendiculaire à l'axe de la charnière. C'est pourquoi la *réaction* $\boldsymbol{R}$ *d'une charnière cylindrique peut prendre une direction quelconque dans le plan perpen-*

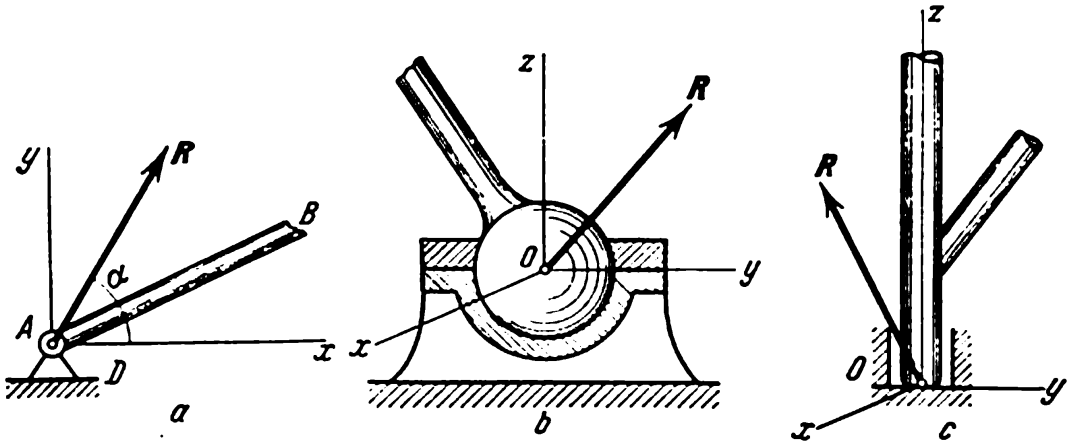
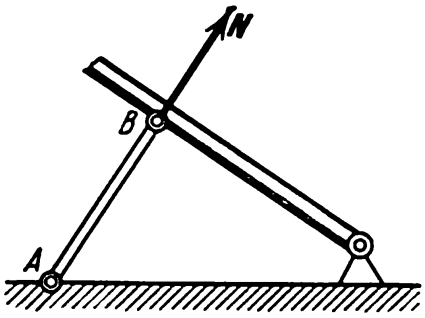


Fig. 10

diculaire à l'axe de la charnière, c'est-à-dire dans le plan Axy. L'intensité R et la direction (angle α) de la force $\boldsymbol{R}$ sont dans ce cas a priori inconnues.

4. Rotule sphérique et crapaudine. Ce type de liaison fixe un point du corps de façon que ce point ne puisse effectuer aucun déplacement dans l'espace. Citons la rotule sphérique au moyen de laquelle on fixe un appareil de photographie sur un pied (fig. 10, *b*) et le coussinet avec appui (crapaudine) (fig. 10, *c*). *La réaction* $\boldsymbol{R}$ *de la rotule sphérique ou de la crapaudine peut avoir une direction quelconque dans l'espace.* L'intensité de la réaction et les angles qu'elle forme avec les axes x, y, z sont a priori inconnus.

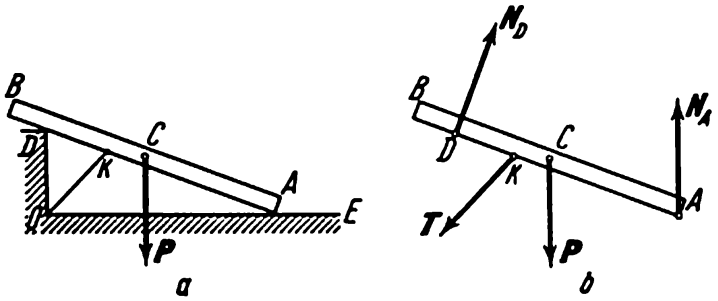
5. T i g e. Si une tige sur laquelle agissent deux forces appliquées à ses extrémités se trouve en équilibre, selon l'axiome 1 ces forces doivent être dirigées le long d'une même droite, c'est-à-dire le long de l'axe de la tige (fig. 4, *a* et 4, *c*). C'est pourquoi une tige,



F i g. 11

chargée à ses extrémités et dont on peut négliger le poids par rapport à ces charges, éprouve soit une traction, soit une compression. Si, dans une construction quelconque, une telle tige AB est une liaison (fig. 11) la *réaction N de la tige sera dirigée le long de son axe* [1].

§ 5. **Axiome des liaisons.** En statique, l'axiome suivant sert de base à l'étude de l'équilibre des corps gênés: *tout corps gêné peut être considéré comme libre si l'on supprime les liaisons et si on leur substitue les forces de liaisons* (*réactions*).



F i g. 12

Par exemple, la barre AB de poids P (fig. 12, *a*), pour laquelle les liaisons sont le plan OE, le support D et le câble KO, peut être considérée comme un corps libre (fig. 12, *b*) se trouvant en équilibre sous l'action de la force donnée P et des réactions N_A, N_D et T.

[1] A rigoureusement parler, ce résultat n'est vrai que dans le cas où les extrémités de la tige sont articulées. Néanmoins, pratiquement on peut estimer que la réaction de la tige est dirigée le long de la tige également dans les cas où ses extrémités sont soudées (par exemple, dans les fermes composées de triangles).

Les intensités de ces réactions, a priori inconnues, peuvent être déterminées à partir des conditions d'équilibre des forces agissant sur le corps désormais libre. C'est en cela même que consiste la méthode principale de solution des problèmes de statique.

La détermination des réactions a l'importance pratique suivante: connaissant ces réactions, nous connaîtrons également les forces agissant sur les liaisons (axiome 4), c'est-à-dire les données initiales qui sont nécessaires pour le calcul de la solidité des parties d'une construction.

Chapitre II

SYSTÈME DE FORCES CONCOURANTES

§ 6. Méthode géométrique de composition des forces. Au cours de l'étude de la statique nous passerons successivement des systèmes de forces simples aux systèmes plus compliqués. Commençons par l'étude d'un système de forces concourantes. *Des forces sont dites concourantes, si leurs directions se coupent en un point* (voir fig. 16, *a*). Un système de forces concourantes, agissant sur un solide parfait,

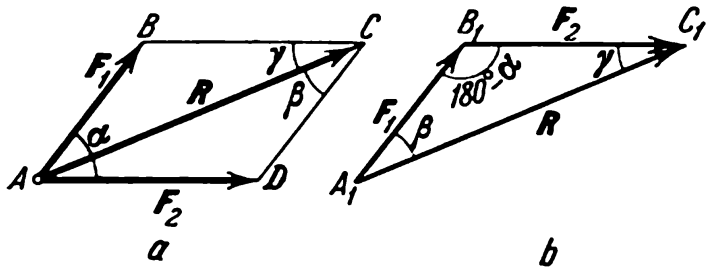


Fig. 13

peut être remplacé par un système équivalent de forces appliquées en un même point (sur la fig. 16, *a* au point *A*).

Déterminer la résultante des forces concourantes revient, selon l'axiome 3 de la statique, à les composer.

1) Composition de deux forces. La résultante $\boldsymbol{R}$ de deux forces concourantes $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ se détermine soit par la règle du parallélogramme (fig. 13, *a*), soit par la construction du triangle des forces (fig. 13, *b*) qui représente la moitié de ce parallélogramme. Pour construire le triangle des forces il faut, à partir d'un point arbitraire A_1, mener un vecteur représentant l'une des forces et, à partir de son extrémité, un vecteur représentant l'autre force. En joignant l'origine du premier vecteur avec l'extrémité du second, nous obtiendrons le vecteur de la force $\boldsymbol{R}$.

Le module de la résultante se détermine par l'égalité

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180^\circ - \alpha),$$

où α est l'angle entre les forces. Donc,

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}. \qquad (1)$$

Les angles β et γ, que la résultante forme avec les forces composantes, se déterminent d'après le théorème des sinus. Constatant

que $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ nous obtenons:

$$\frac{F_1}{\sin\gamma} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\alpha}. \qquad (2)$$

Lorsque le point de rencontre des forces F_1 et F_2 se trouve au-delà du corps (fig. 14, *a*), on peut trouver la résultante de ces forces en donnant, en pensée, au corps les dimensions représentées par le pointillé. Puis on transporte les forces au point O, on construit sur elles le parallélogramme et on applique la résultante R en un point quelconque C se trouvant sur la direction de R.

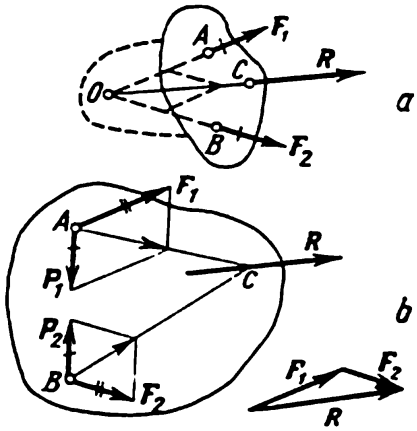


Fig. 14

Si les directions des forces composantes F_1 et F_2 se coupent au-delà des limites du dessin (fig. 14, *b*), on peut trouver le point par lequel passe la résultante, en appliquant aux points A et B deux forces équilibrées quelconques P_1 et P_2 ($P_1 = -P_2$) dirigées le long de AB. Selon l'axiome 2, l'action des forces F_1 et F_2 sur le corps ne sera pas modifiée. Composant maintenant les forces F_1, P_1 et F_2, P_2 selon la règle du parallélogramme, nous remplacerons le système de forces F_1, F_2 par deux autres forces équivalentes à ce système et dont les directions se couperont au point C. Donc, c'est par ce point que passe la résultante R; quant au module du vecteur R il peut être déterminé si l'on construit le triangle des forces (fig. 14, *b*).

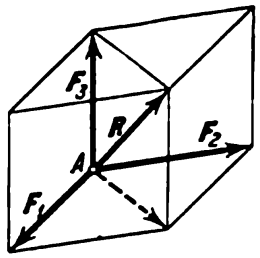


Fig. 15

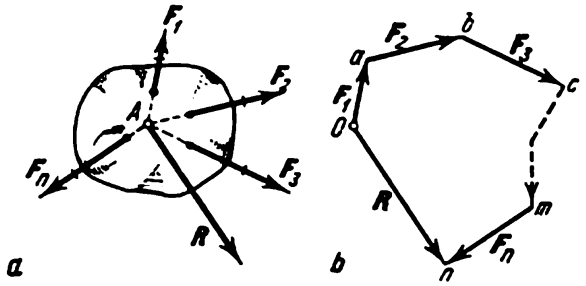


Fig. 16

2) Composition de trois forces ne se trouvant pas dans un même plan. La résultante R de trois forces concourantes F_1, F_2, F_3, ne se trouvant pas dans un même plan, est représentée par la diagonale du parallélépipède construit sur ces forces (règle du parallélépipède). On peut se convaincre de la légitimité de cette règle en appliquant la règle du parallélogramme (fig. 15).

3) Composition d'un système de forces. En appliquant l'axiome du parallélogramme des forces, on vient à la conclusion suivante: *la résultante d'un nombre quelconque de forces concourantes est égale à leur somme géométrique et est appliquée au*

point d'intersection des forces. La grandeur $\boldsymbol{R}$, égale à la somme géométrique de toutes les forces d'un système quelconque, s'appelle *vecteur principal* de ce système. Le vecteur principal se détermine soit par des compositions successives des forces du système selon la règle du parallélogramme, soit par la construction du polygone de forces. Le deuxième procédé est plus simple et plus pratique. Pour trouver par ce procédé la somme des forces $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, ..., $\boldsymbol{F}_n$ (fig. 16, *a*), on mène à partir d'un point arbitraire O (fig. 16, *b*) un vecteur $\overline{Oa}$ représentant, à l'échelle choisie, la force $\boldsymbol{F}_1$; à partir du point a on mène un vecteur $\overline{ab}$ représentant la force $\boldsymbol{F}_2$; à partir du point b on mène un vecteur $\overline{bc}$ représentant la force $\boldsymbol{F}_3$, etc.; à partir de l'extrémité m de l'avant-dernier vecteur on mène un vecteur $\overline{mn}$ représentant la force $\boldsymbol{F}_n$. Joignant l'origine du premier vecteur à l'extrémité du dernier, nous obtenons le vecteur $\overline{On} = \boldsymbol{R}$, qui représente la somme géométrique ou le vecteur principal des forces composantes:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n \text{ ou } \boldsymbol{R} = \Sigma \boldsymbol{F}_k. \qquad (3)$$

L'intensité et le sens de $\boldsymbol{R}$ ne dépendent pas de l'ordre dans lequel seront menés les vecteurs des forces. On remarque facilement que cette construction est le résultat de l'application de la règle du triangle des forces.

Le polygone représenté sur la figure 16, *b* s'appelle *polygone de forces* (dans le cas général, *polygone vectoriel*). Ainsi, *la somme géométrique ou le vecteur principal de plusieurs forces se représente par le côté qui ferme le polygone des forces construit avec ces forces* (*règle du polygone des forces*). Pendant la construction du polygone des forces il ne faut pas oublier que les flèches de tous les vecteurs composants doivent être dirigées dans un même sens (sens de parcours du polygone), et la flèche du vecteur $\boldsymbol{R}$ dans le sens contraire.

La force $\boldsymbol{R}$, trouvée par la construction du polygone des forces, appliquée au point A du corps (fig. 16, *a*), remplacera à elle seule l'action de toutes les forces données, c'est-à-dire qu'elle sera leur résultante.

§ 7. Décomposition des forces. Décomposer une force donnée en plusieurs composantes, c'est trouver un système de plusieurs forces dont la résultante est la force donnée. Ce problème a en général un nombre infini de solutions; pour en choisir une il faut donner les conditions supplémentaires. Considérons deux cas particuliers très importants.

1) Décomposition d'une force suivant deux directions données. Décomposons la force donnée $\boldsymbol{F}$ (fig. 17) suivant des directions parallèles aux droites données AB et AD (la force et les droites se trouvent dans un même plan).

Ce problème revient à construire le parallélogramme dont la diagonale représentera la force $\boldsymbol{F}$ et dont les côtés seront parallèles aux droites AB et AD. Pour résoudre le problème, menons par l'origine et par l'extrémité de la force $\boldsymbol{F}$ des droites parallèles à AB et AD. Les forces $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ seront les composantes cherchées puisque $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{F}$.

On peut également effectuer la décomposition en construisant le triangle des forces (fig. 17, *b*). Pour cela, à partir d'un point arbitraire *a*, on mène la force $\boldsymbol{F}$, et par ses extrémités on mène des

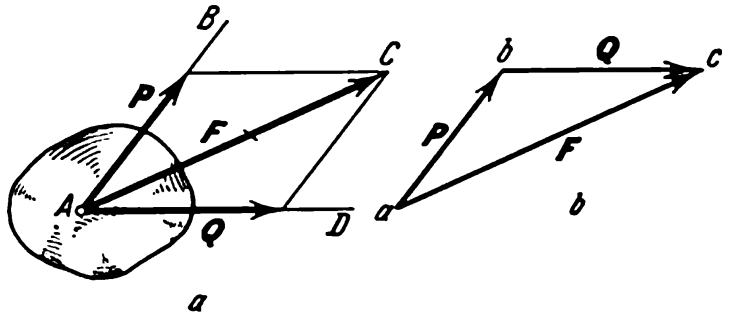


Fig. 17

droites parallèles à AB et AD jusqu'à leur point d'intersection. Les forces trouvées $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ remplacent la force $\boldsymbol{F}$, si on les applique au point A ou bien en un autre point quelconque de la direction de la force $\boldsymbol{F}$.

2) Décomposition d'une force suivant trois directions données. Si les directions données ne se trouvent pas dans un même plan, le problème est parfaitement déterminé et consiste à construire un parallélépipède dont la diagonale représente la force donnée $\boldsymbol{F}$ et dont les côtés sont parallèles aux directions données (voir fig. 15).

Nous proposons au lecteur d'examiner lui-même le cas de la décomposition d'une force donnée $\boldsymbol{F}$ en deux forces $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ se trouvant dans le même plan que $\boldsymbol{F}$, si les intensités de ces forces P et Q sont données et si, de plus, $P + Q \geqslant F$. Ce problème a deux solutions.

Résolution des problèmes. On peut se servir du procédé de la décomposition pour déterminer les efforts exercés par une force donnée sur les liaisons gênant les déplacements du corps. Pour cela il faut décomposer la force donnée suivant les directions des réactions des liaisons puisque, selon l'axiome 4, l'effort exercé sur la liaison et la réaction qui en résulte sont dirigés le long d'une même droite. Donc, pour pouvoir se servir de ce procédé, il faut connaître à l'avance les directions des réactions des liaisons envisagées.

Problème 1. Une console est composée des tiges AC et BC fixées au mur et reliées entre elles par des charnières, avec $\angle BAC = 90°$, $\angle ABC = \alpha$ (fig. 18, *a*). A la charnière C est suspendu un poids P. Négligeant le poids des tiges, trouver la force qui comprime la tige BC.

Solution. La force P agit sur les deux tiges. Leurs réactions sont, dans ce cas, dirigées le long des tiges. Pour déterminer l'effort inconnu, appliquons la force P au point C et décomposons-la suivant les directions AC et BC. La composante S_1 est la force cherchée. Dans le triangle CDE nous avons:

$$S_1 = \frac{P}{\cos\alpha}.$$

Examinant ce même triangle, nous trouvons que la tige AC est tendue avec une force

$$S_2 = P \operatorname{tg}\alpha.$$

Si l'angle α croît, les efforts sur les deux tiges augmentent et lorsque la valeur de l'angle α s'approche de 90° ces efforts deviennent considérables. Par

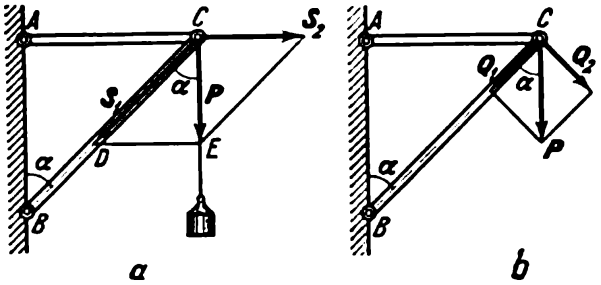


Fig. 18

exemple, lorsque $P = 100$ kgf et $\alpha = 85°$, nous avons $S_1 \approx 1150$ kgf, $S_2 \approx \approx 1140$ kgf. Pour diminuer ces charges il faut diminuer l'angle α.

Les résultats obtenus montrent que, quelquefois, sous l'action d'une petite force donnée les charges sur certaines parties d'une construction peuvent être très grandes (voir également le problème 2). Cela s'explique par le fait que les forces se composent et se décomposent selon la loi du parallélogramme, et dans un parallélogramme la diagonale peut être beaucoup plus petite que les côtés. Alors, si certains efforts (réactions) se trouvent être très grands par comparaison avec les forces données, cela ne veut pas dire que la solution est fausse.

En conclusion, indiquons la faute typique qu'on risque de commettre lorsqu'on applique le procédé de la décomposition des forces. Dans le problème 1 on demande de déterminer l'effort dans la tige BC. Appliquons la force P en point C (fig. 18, *b*) et décomposons-la suivant la direction de la tige BC et la direction qui lui est perpendiculaire. Nous avons:

$$Q_1 = P\cos\alpha,\ Q_2 = P\sin\alpha.$$

La décomposition est correcte, mais la force Q_1 ne donne pas l'effort cherché dans la tige BC puisque l'action de la force Q_2 n'est pas entièrement exercée sur la tige AC. C'est pourquoi la force Q_2 agira simultanément sur les deux tiges et exercera, par conséquent, une pression supplémentaire sur la tige BC, pression dont la grandeur Q_1 ne tient pas compte.

Cet exemple montre que, si l'on décompose une force suivant des directions autres que celles des réactions, on n'obtiendra pas la solution cherchée.

Problème 2. Une lanterne de poids $P = 20$ kgf (fig. 19) est suspendue par deux câbles AC et BC, formant des angles égaux $\alpha = 5°$ avec l'horizontale. Déterminer la force de tension de chaque câble.

Solution. Représentons la force P au point C et décomposons-la suivant les directions des câbles. Le parallélogramme des forces sera, dans

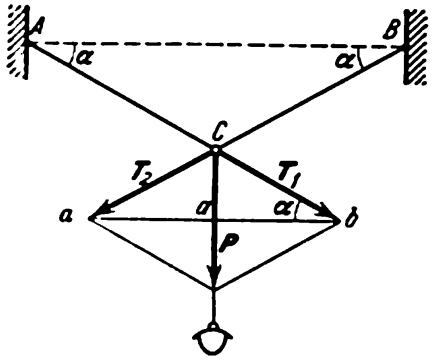


Fig. 19

notre cas, un losange. Ses diagonales sont perpendiculaires entre elles et se coupent en leur milieu. Dans le triangle aCb nous avons :

$$\frac{P}{2} = T_1 \sin \alpha,$$

d'où

$$T_1 = T_2 = \frac{P}{2 \sin \alpha} \approx 115 \text{ kgf}.$$

La formule obtenue montre qu'avec la diminution de l'angle α la tension des câbles augmente (par exemple, lorsque $\alpha = 1°$, $T \approx 573$ kgf). Si l'on essaie de tendre le câble horizontalement, il se rompra car, lorsque $\alpha \to 0$, $T \to \infty$.

Problème 3. Dans le système bielle-manivelle représenté sur la figure 20, déterminer l'effort circonférenciel au point B et la pression de la manivelle

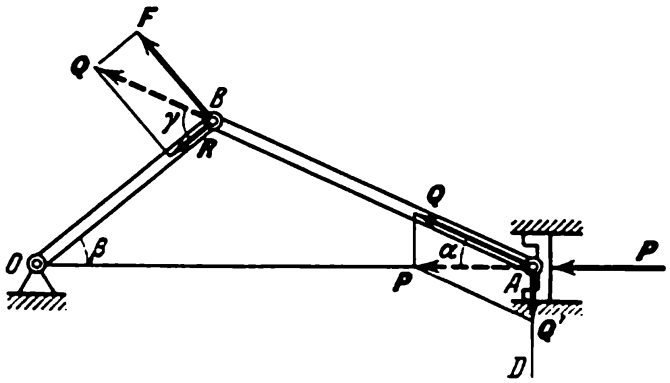


Fig. 20

sur l'axe O due à l'action de la force P appliquée au piston A, pour des angles α et β donnés. On négligera les poids de la bielle AB et de la manivelle OB.

Solution. Pour déterminer les efforts cherchés il faut connaître la force Q avec laquelle la bielle AB agit sur la charnière B. Nous trouverons

la grandeur Q en décomposant la force P suivant les directions AB et AD (AD est la direction selon laquelle le piston A exerce une pression sur les parois de guidage). En définitive, nous obtenons:

$$Q=\frac{P}{\cos\alpha}.$$

En appliquant maintenant la force Q au point B et en la décomposant comme sur la figure 20, nous trouvons l'effort circonférenciel F et la pression R sur l'axe.

$$F = Q\sin\gamma,\ R = Q\cos\gamma.$$

L'angle γ étant l'angle extérieur du triangle OBA, il est égal à $\alpha+\beta$. C'est pourquoi, en définitive, nous obtenons:

$$F=P\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha},\qquad R=P\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}.$$

Vu que $\alpha+\beta\leqslant 180°$ et $\alpha<90°$, la force F sera toujours positive, c'est-à-dire qu'elle sera toujours dirigée comme le montre la figure. Quant à la force R, elle sera dirigée de B vers O tant que $\alpha+\beta<90°$; lorsque $\alpha+\beta>90°$, R prendra le sens opposé. Lorsque $\alpha+\beta=90°$, nous aurons $R=0$.

Cet exemple montre qu'on peut se servir de la décomposition des forces même dans les cas où les forces agissent sur un corps qui ne se trouve pas en équilibre. Dans ce cas, pour déterminer la force exercée sur la liaison, il faut décomposer la force donnée suivant la direction de la réaction de cette liaison et suivant la direction du déplacement du point d'application de la force (comme on l'a fait au point B). Déterminées de cette façon, les forces exercées sur les liaisons sont dites *statiques*, car, au cours des calculs, on ne tient pas compte des masses, des vitesses et des accélérations des corps en mouvement. Pratiquement, on ne peut se servir des résultats de tels calculs que lorsque les vitesses et les accélérations des corps sont petites. Les forces exercées sur les liaisons seront dites *dynamiques* si, au cours de leur détermination, on tient compte des masses, des vitesses et des accélérations des corps en mouvement. De tels calculs se font par des méthodes de la dynamique (§ 161).

§ 8. Projection d'une force sur un axe et sur un plan. Passons maintenant au procédé analytique de résolution des problèmes de statique. Ce procédé est basé sur la notion de projection d'une force sur un axe.

La projection d'une force sur un axe est la grandeur algébrique égale au produit du module de la force par le cosinus de l'angle formé par le vecteur force et la direction orientée de l'axe. Il résulte de cette définition que les projections d'une force donnée sur des axes quelconques, mais parallèles et de même sens, sont égales entre elles. Cette remarque facilitera le calcul de la projection d'une force sur un axe non coplanaire avec la force. La projection de la force F sur l'axe Ox sera désignée par le symbole F_x. Ainsi, pour les forces représentées sur la figure 21, nous aurons [1]:

$$F_x = F\cos\alpha,\qquad Q_x = Q\cos\alpha_1 = -Q\cos\varphi. \tag{4}$$

[1] Nous estimerons que le sens positif de l'axe est le sens du point O (origine) vers la lettre x désignant l'axe. Nous n'emploierons des flèches sur les figures que pour représenter des vecteurs.

Comme nous le voyons, la projection d'une force sur un axe est positive, si l'angle formé par la direction de la force et le sens positif de l'axe est aigu, et négative si cet angle est obtus; si la force est perpendiculaire à l'axe, sa projection sur l'axe est égale à zéro.

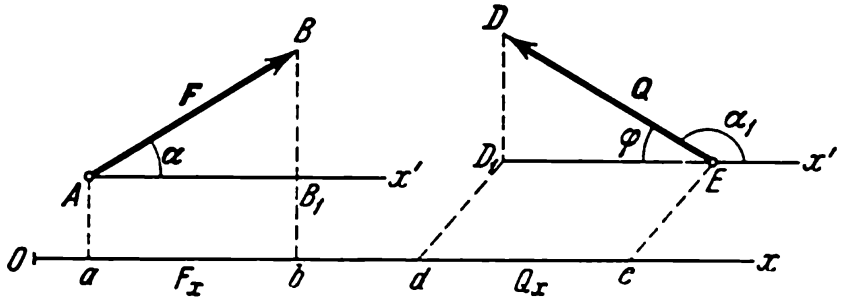


Fig. 21

On voit sur le dessin que la projection d'une force sur un axe est égale à la longueur du segment compris entre les projections de ses extrémités, longueur prise avec le signe convenable ($F_x = AB_1 = ab$, $Q_x = -D_1E = -de$).

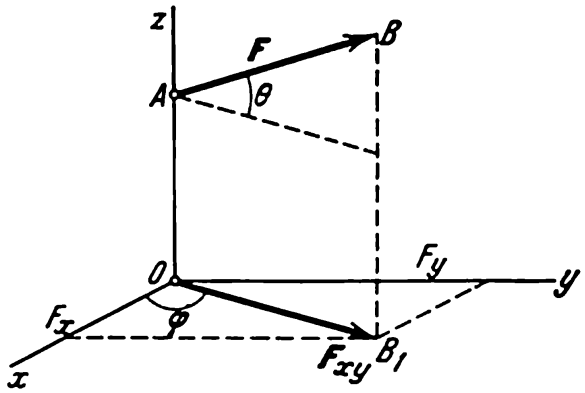


Fig. 22

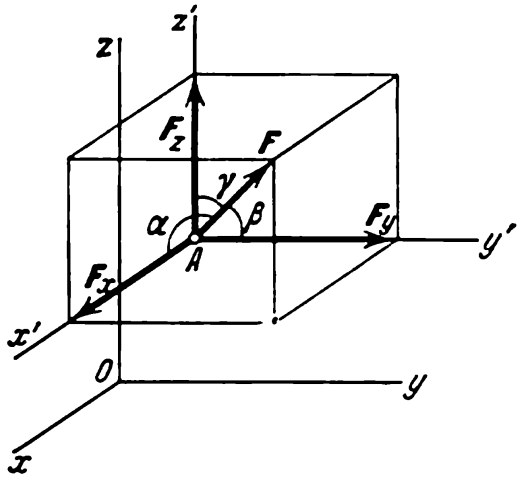


Fig. 23

La projection de la force F sur le plan Oxy est le vecteur $F_{xy} = \overline{OB_1}$ *défini par les projections de l'origine et de l'extrémité de la force F sur ce plan* (fig. 22). Ainsi, la projection d'une force sur un plan est, au contraire de la projection sur un axe, une grandeur vectorielle puisqu'elle est caractérisée non seulement par sa valeur numérique, mais encore par son sens dans le plan *Oxy*. Numériquement $F_{xy} = F \cos \theta$, où θ est l'angle formé par le vecteur force F et sa projection F_{xy}.

Dans certains cas, pour trouver la projection d'une force sur un axe, il est plus commode de trouver d'abord sa projection sur le plan dans lequel se trouve l'axe et, ensuite, de projeter cette projection sur l'axe donné. Par exemple, dans le cas représenté sur la figure 22, si l'on procède ainsi, on trouve que

$$F_x = F_{xy} \cos \varphi = F \cos \theta \cos \varphi, \quad F_y = F_{xy} \sin \varphi = F \cos \theta \sin \varphi.$$

§ 9. **Expression analytique des forces.** Pour se donner une force sous forme analytique il est nécessaire de choisir un système d'axes de coordonnées $Oxyz$, par rapport auquel seront déterminés la direction et le sens de la force dans l'espace. En mécanique nous nous servirons du système de coordonnées dit droit, c'est-à-dire d'un système pour lequel la rotation la plus courte, vue depuis l'extrémité positive de Oz, amenant Ox en coïncidence avec Oy s'effectue dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre (fig. 23). On peut construire le vecteur représentant la force $\boldsymbol{F}$, si l'on connaît le module F de cette force et les angles α, β et γ qu'elle forme avec les axes de coordonnées choisis. Les grandeurs F, α, β, γ déterminent la force $\boldsymbol{F}$. De plus, le point d'application A de la force doit être donné par ses coordonnées x, y, z.

Pour résoudre les problèmes de statique il apparaît plus commode de déterminer une force à l'aide de ses projections. Montrons que la force $\boldsymbol{F}$ est complètement déterminée si ses projections F_x, F_y, F_z sur les axes de coordonnées rectangulaires sont connues. Effectivement, de la formule (4) il résulte que

$$F_x = F \cos \alpha, \quad F_y = F \cos \beta, \quad F_z = F \cos \gamma.$$

En élevant chacune de ces égalités au carré et en les additionnant membre à membre, nous obtenons $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 = F^2$, car $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. En définitive, nous trouvons que:

$$\left.\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \\ \cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta &= \frac{F_y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Les formules (5) permettent, si l'on connaît les projections de la force sur les axes de coordonnées, de trouver son module et les angles qu'elle forme avec les axes, c'est-à-dire qu'elles permettent de déterminer la force. Remarquons que, dans la première de ces formules, il faut toujours prendre le signe plus devant la racine carrée car cette formule détermine le module de la force.

Si l'on décompose la force $\boldsymbol{F}$ suivant des directions parallèles aux axes (voir fig. 23), les composantes obtenues $\boldsymbol{F}_x$, $\boldsymbol{F}_y$, $\boldsymbol{F}_z$ seront numériquement égales aux projections de la force sur ces axes, donc, si les projections de la force sur les axes de coordonnées

sont connues, le vecteur de la force peut être construit géométriquement selon la règle du parallélépipède.

Dans le cas où toutes les forces considérées sont disposées dans un même plan, on peut se donner chacune de ces forces à l'aide de ses projections sur deux axes de coordonnées Ox et Oy. Les formules (5) deviennent alors:

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2},\quad \cos\alpha=\frac{F_x}{F},\quad \cos\beta=\frac{F_y}{F}. \tag{6}$$

Dans ce cas, si les projections de la force sont connues, cette dernière peut être construite graphiquement selon la règle du parallélogramme.

§ 10. Procédé analytique de composition des forces. On passe des relations entre vecteurs aux relations entre leurs projections

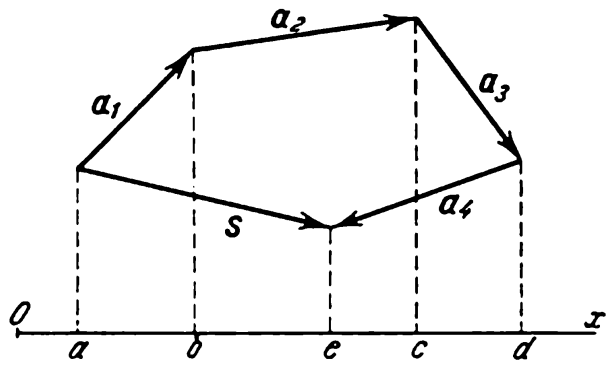


Fig. 24

à l'aide du théorème de géométrie suivant: *la projection du vecteur somme sur un axe quelconque est égale à la somme algébrique des projections des vecteurs composants sur ce même axe.* En effet, soit $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4$ (fig. 24). Alors

$$a_{1x}=ab,\quad a_{2x}=bc,\quad a_{3x}=cd,\quad a_{4x}=-de,\quad s_x=ae.$$

Additionnant maintenant membre à membre les quatre premières égalités nous trouverons

$$a_{1x}+a_{2x}+a_{3x}+a_{4x}=ae=s_x,$$

donc, le théorème est démontré. Pour un nombre quelconque de termes nous aurons:

$$\text{si } \boldsymbol{s}=\sum \boldsymbol{a}_k,\quad s_x=\sum a_{kx}. \tag{7}$$

Passons maintenant à la composition des forces. Soit un système de forces $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ donné par les projections des forces sur les axes de coordonnées. Désignons la somme (le vecteur principal) de ces forces par $\boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{R} = \Sigma \boldsymbol{F}_k$). Alors, il résulte des égalités (7)

que

$$R_x = \sum F_{kx}, \quad R_y = \sum F_{ky}, \quad R_z = \sum F_{kz}. \tag{8}$$

Connaissant R_x, R_y et R_z, les formules (5) donnent:

$$\left.\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}; \\ \cos\alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos\beta &= \frac{R_y}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{R_z}{R}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Les formules (8) et (9) permettent de résoudre analytiquement le problème de la composition des forces.

Pour des forces disposées dans un même plan, les formules correspondantes seront

$$\left.\begin{aligned} R_x = \sum F_{kx}, \quad R_y &= \sum F_{ky}; \\ R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad \cos\alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \cos\beta &= \frac{R_y}{R}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Si les forces sont données par leurs modules et par les angles qu'elles forment avec les axes, il faut, si l'on veut utiliser la méthode analytique de composition, préalablement calculer les projections de ces forces sur les axes de coordonnées.

Problème 4. Trouver la somme de trois forces P, Q et F dont les projections sur les axes de coordonnées sont égales à:

$P_x = 6$ kgf, $P_y = 3$ kgf, $P_z = 12$ kgf; $Q_x = 3$ kgf, $Q_y = -7$ kgf, $Q_z = 1$ kgf; $F_x = 5$ kgf, $F_y = 2$ kgf, $F_z = -8$ kgf.

Solution: Les formules (8) donnent:

$$R_x = 6 + 3 + 5 = 14 \text{ kgf}, \quad R_y = 3 - 7 + 2 = -2 \text{ kgf},$$
$$R_z = 12 + 1 - 8 = 5 \text{ kgf}.$$

Substituant ces valeurs dans les égalités (9), nous obtenons:

$$R = \sqrt{14^2 + (-2)^2 + 5^2} = 15 \text{ kgf},$$
$$\cos\alpha = \frac{14}{15}, \qquad \cos\beta = -\frac{2}{15}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{3}.$$

En définitive: $R = 15$ kgf, $\alpha = 21°$, $\beta = 97°40'$, $\gamma = 70°30'$.

Problème 5. Trouver la résultante de trois forces se trouvant dans un même plan (fig. 25, *a*) si l'on donne:

$$F = 17{,}32 \text{ kgf}, \quad T = 10 \text{ kgf},$$
$$P = 24 \text{ kgf}, \quad \varphi = 30°, \quad \psi = 60°.$$

Solution. Calculons les projections des forces sur les axes de coordonnées:

$$F_x = F\cos\varphi = 15 \text{ kgf}; \quad T_x = -T\cos\psi = -5 \text{ kgf}; \quad P_x = 0;$$
$$F_y = -F\sin\varphi = -8{,}66 \text{ kgf}; \quad T_y = T\sin\psi = 8{,}66 \text{ kgf};$$
$$P_y = -P = -24 \text{ kgf}.$$

Alors, d'après les formules (10):

$$R_x = 15 - 5 = 10 \text{ kgf}; \; R_y = -8{,}66 + 8{,}66 - 24 = -24 \text{ kgf}.$$

Par conséquent,

$$R = \sqrt{10^2 + (-24)^2} = 26 \text{ kgf}; \quad \cos\alpha = \frac{5}{13}; \quad \cos\beta = -\frac{12}{13}.$$

En définitive: $R = 26$ kgf, $\alpha = 67°20'$, $\beta = 157°20'$.

Pour résoudre ce même problème géométriquement il faut, après avoir choisi une échelle convenable (par exemple, 1 cm pour 10 kgf), construire

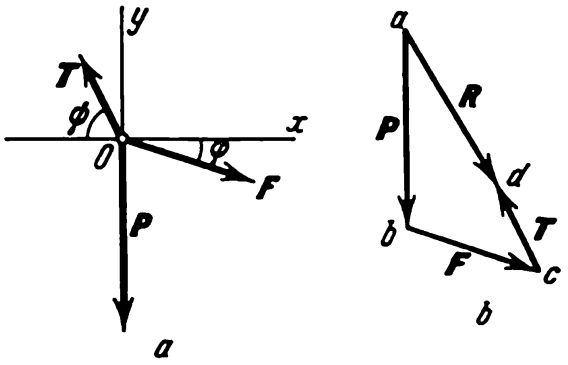


Fig. 25

avec les forces P, F et T le polygone des forces (fig. 25, *b*). Le dernier côté *ad* de ce polygone détermine, à l'échelle choisie, le module et la direction de R. Si, par exemple, $ad \approx 2{,}5$ cm, on a $R \approx 25$ kgf avec une erreur relative de l'ordre de 4 %.

§ 11. Equilibre d'un système de forces concourantes. Il résulte des lois de la mécanique qu'un corps solide, sur lequel agissent des forces extérieures mutuellement équilibrées, peut non seulement se trouver au repos, mais encore effectuer un mouvement que nous appellerons mouvement d'inertie. Tel sera, par exemple, un mouvement de translation uniforme et rectiligne du corps.

Il en résulte une conclusion importante: *les forces agissant sur un corps animé d'un mouvement d'inertie, tout comme les forces qui agissent sur un corps au repos, satisfont aux conditions d'équilibre statique* (voir problème 6). Il est également clair que l'équilibre des forces appliquées à un solide libre est une condition nécessaire, mais non pas suffisante, de l'équilibre (du repos) du corps. Un corps se trouvera au repos seulement s'il était dans cet état avant l'application des forces équilibrées.

Pour qu'un système de forces concourantes appliqué à un solide soit équilibré, il faut et il suffit que la résultante de ces forces soit égale à zéro. Les conditions auxquelles doivent alors satisfaire les forces peuvent être formulées géométriquement et analytiquement.

1. Condition géométrique de l'équilibre. Puisque la résultante $\boldsymbol{R}$ des forces concourantes se définit comme étant le dernier côté du polygone construit sur ces forces, $\boldsymbol{R}$ sera égale à zéro si l'extrémité de la dernière force du polygone coïncide avec l'origine de la première, c'est-à-dire lorsque le polygone est fermé.

En conséquence, *pour qu'un système de forces concourantes soit équilibré, il faut et il suffit que le polygone construit sur ces forces soit fermé.*

2. Conditions analytiques de l'équilibre. Analytiquement, le module de la résultante d'un système de forces concourantes est déterminé par la formule

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Puisque sous la racine carrée nous avons une somme de termes positifs, R sera égale à zéro seulement dans le cas où simultanément $R_x = 0$, $R_y = 0$, $R_z = 0$, c'est-à-dire d'après les formules (8), lorsque les forces qui agissent sur le corps satisferont aux égalités:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0. \tag{11}$$

Les égalités (11) expriment analytiquement les conditions d'équilibre: *pour qu'un système de forces concourantes dans l'espace soit équilibré, il faut et il suffit que les sommes des projections de ces forces sur chacun des trois axes de coordonnées soient nulles.*

Si toutes les forces concourantes, qui agissent sur un corps, se trouvent dans un même plan, elles forment un *système plan de forces concourantes.* Dans ce cas nous n'obtiendrons, évidemment, que deux conditions d'équilibre

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0. \tag{12}$$

Les égalités (11) et (12) expriment également les conditions (ou bien les équations) nécessaires de l'équilibre d'un solide libre soumis à l'action des forces concourantes.

3. Théorème des trois forces. Lors de la solution des problèmes de statique il est quelquefois commode de se servir du théorème suivant: *si un solide libre se trouve en équilibre sous l'action de trois forces non parallèles disposées dans un même plan, les lignes d'action de ces forces se coupent en un même point.*

Pour démontrer le théorème représentons d'abord deux des forces agissant sur le corps, par exemple $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$. Puisque, selon les conditions du théorème, ces forces sont situées dans un même plan et sont non parallèles, leurs lignes d'action se couperont en un certain point A (fig. 26). Appliquons les forces $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ en ce point et remplaçons-les par leur résultante $\boldsymbol{R}$. Alors, le corps subira l'action de deux forces: la force $\boldsymbol{R}$ et la force $\boldsymbol{F}_3$ appliquée au corps

en un certain point B. Si le corps se trouve en équilibre, selon l'axiome 1 les forces $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{F}_3$ doivent être dirigées le long d'une même droite, c'est-à-dire le long de AB. Donc, la force $\boldsymbol{F}_3$ passe également par le point A, ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons que la réciproque du théorème n'est pas vraie, c'est-à-dire que si les lignes d'action de trois forces se coupent en un même point, le corps, sous l'action de ces forces, peut ne pas être

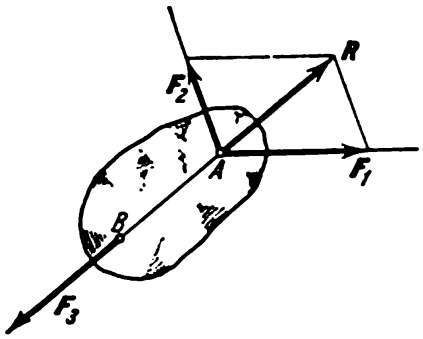


Fig. 26

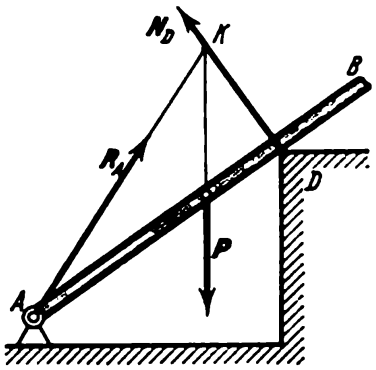


Fig. 27

en équilibre. Le théorème démontré exprime *la condition nécessaire, mais non pas suffisante*, de l'équilibre d'un solide libre soumis à trois forces.

Exemple. Considérons une barre AB articulée au point A et s'appuyant sur le support D (fig. 27). La barre peut être considérée comme libre, si l'on supprime les liaisons et qu'on les remplace par les forces de réactions. Elle sera alors en équilibre sous l'action de trois forces. Les lignes d'action de deux de ces forces $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{N}_D$ sont connues; elles se coupent au point K. Donc, la réaction $\boldsymbol{R}_A$ de la charnière, appliquée au point A, doit également passer par le point K, c'est-à-dire qu'elle doit être dirigée le long de la ligne AK. Le théorème des trois forces a permis dans ce cas de déterminer la direction, a priori inconnue, de la réaction de la charnière A.

§ 12. Problèmes statiquement déterminés et indéterminés. Dans les problèmes où l'on recherche l'équilibre d'un solide gêné, les réactions sont des grandeurs a priori inconnues. Le nombre de ces inconnues dépend du nombre et du caractère des liaisons appliquées. Un problème de statique ne peut être résolu que dans le cas où le nombre d'inconnues introduites par les réactions ne dépasse pas le nombre des équations d'équilibre qui contiennent ces réactions. De tels problèmes sont *déterminés du point de vue statique*, et les systèmes de corps auxquels ils se rapportent sont dits *systèmes déterminables du point de vue statique*.

Dans le cas où le nombre de forces de réactions inconnues dépasse le nombre des équations d'équilibre contenant ces réactions, les problèmes sont dits *indéterminés du point de vue statique* et les sys-

tèmes de corps auxquels ils se rapportent sont dits *systèmes indéterminables du point de vue statique.*

Comme exemple d'un système indéterminable du point de vue statique on peut citer un poids suspendu à trois fils disposés dans un même plan (fig. 28). Ce problème contient trois grandeurs inconnues (les tensions T_1, T_2, et T_3 des fils), or dans le cas d'un système plan de forces concourantes, nous ne pouvons poser que deux équations d'équilibre (formules (12)).

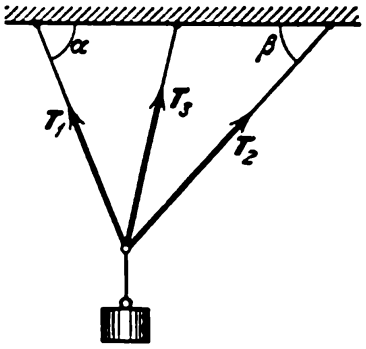


Fig. 28

Il est évident que l'indétermination statique résulte de l'application de liaisons superflues. Dans l'exemple cité, il suffit de suspendre le poids à deux fils pour assurer l'équilibre et cela quels que soient les angles α et β (voir problème 2, fig. 19), le troisième fil étant superflu.

Par la suite, nous n'étudierons que des problèmes déterminés du point de vue statique, c'est-à-dire dans lesquels le nombre des réactions inconnues sera égal au nombre des équations d'équilibre contenant ces réactions. Pour résoudre des problèmes indéterminés du point de vue statique, il faut renoncer à considérer les corps comme des solides parfaits et tenir compte alors de leurs déformations. De tels problèmes se résolvent dans les cours de résistance des matériaux ou de statique des constructions.

§ 13. Résolution des problèmes de statique. Résoudre un problème de statique c'est déterminer les forces agissant sur les supports et les efforts dans telle ou telle partie d'une construction en équilibre, ainsi que déterminer les conditions générales de l'équilibre de cette construction si cette dernière n'est pas fixée rigidement par ses liaisons.

Dans les cas les plus simples, ces problèmes peuvent être résolus par la méthode de décomposition des forces (§ 7). Toutefois, on utilise habituellement une méthode plus générale basée sur l'examen des conditions d'équilibre du corps auquel sont appliquées les forces cherchées ou les forces égales à ces dernières. Puisque la construction examinée est un ensemble de corps reliés entre eux, lorsqu'on applique cette méthode, il faut déterminer avant tout *quel est précisément le corps dont il est souhaitable d'examiner l'équilibre pour trouver les forces cherchées.*

La solution se ramène aux opérations suivantes:

1. Choix du corps dont il faut examiner l'équilibre. Ce corps est celui auquel sont appliquées les forces données et cherchées ou bien les forces égales à ces dernières (par exemple, s'il faut trouver la force agissant sur un support, on peut

examiner l'équilibre du corps auquel est appliquée la réaction du support qui a même grandeur que la force initiale, etc.).

Lorsque les forces données agissent sur un corps, et toutes les forces cherchées sur un autre corps, il est parfois nécessaire d'examiner l'équilibre de chaque corps et quelquefois même l'équilibre de corps intermédiaires.

2. Suppression des liaisons et représentation des forces données agissant sur le corps et des réactions des liaisons rejetées. Un corps libéré de ses liaisons doit être représenté à part [1] (comme sur la figure 12, *b*). Lorsqu'on représente les forces de réaction il faut tenir compte de tout ce qui a été dit au § 4.

3. Etablissement des conditions d'équilibre. Ces conditions dépendront du système de forces qui agira sur le corps libéré de ses liaisons et du procédé de résolution (géométrique ou analytique) qu'on utilisera. Nous parlerons des particularités d'établissement des conditions d'équilibre pour les différents systèmes de forces dans les endroits appropriés du cours.

4. Détermination des grandeurs cherchées, vérification de la solution et discussion des résultats obtenus.

Un dessin soigné joue un rôle important dans la solution (il permet de trouver plus rapidement le procédé approprié et d'éviter des fautes au cours de l'établissement des conditions d'équilibre). Lorsqu'on résout un problème, il est recommandé, en règle générale, d'effectuer tous les calculs sur des données littérales (algébriquement). Dans ce cas on obtiendra pour les grandeurs cherchées des formules qui permettront d'analyser les résultats. De plus, une solution avec des données littérales permet quelquefois de découvrir les fautes commises et cela grâce à la vérification des dimensions des termes (les dimensions de chacun des termes dans les deux membres de l'égalité doivent être les mêmes). Les lettres seront remplacées par leurs valeurs numériques dans les résultats définitifs.

Dans ce paragraphe nous examinerons des problèmes sur l'équilibre d'un corps soumis à l'action de forces concourantes. Pour les résoudre on peut se servir des procédés géométrique et analytique.

a) Procédé géométrique. Ce procédé est plus commode lorsque le nombre total des forces (données et cherchées) qui agissent sur le corps est égal à trois. S'il y a équilibre, le triangle construit sur ces forces doit être fermé (il faut commencer la cons-

[1] Lorsqu'on aura acquis une expérience suffisante, on pourra mentalement isoler le corps dont on examine l'équilibre et dessiner toutes les forces données qui agissent sur lui (et sur lui seul) et les réactions sur le croquis général (voir fig. 31). Néanmoins, s'il est nécessaire d'examiner encore l'équilibre d'un autre corps de la construction, il sera préférable d'isoler ce corps et de le représenter sur un dessin à part.

truction par la force donnée). Résolvant ce triangle nous trouverons les grandeurs cherchées.

b) Procédé analytique. On peut se servir de ce procédé quel que soit le nombre des forces appliquées. Pour établir les conditions d'équilibre, conditions qui seront au nombre de deux dans le cas d'un système plan de forces concourantes (formules 12) et au nombre de trois dans le cas d'un système spatial (formules 11), il faut d'abord choisir les axes de coordonnées. Ce choix peut être arbitraire, mais les équations obtenues se résolveront plus simplement si l'on dirige l'un des axes perpendiculairement à l'une des forces inconnues. Avant d'écrire les conditions d'équilibre, il est recommandé de calculer les projections de toutes les forces sur les axes de coordonnées choisis et de les porter dans un tableau (voir problèmes 6, 10, 11).

Des indications supplémentaires sont données au cours de la résolution des problèmes ci-dessous.

Problème 6. Un poids P repose sur un plan incliné lisse qui forme un angle α avec l'horizontale (fig. 29, *a*). Déterminer l'intensité de la force F parallèle

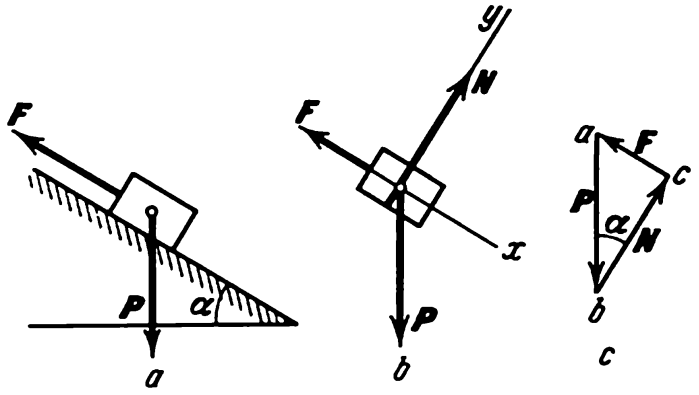


Fig. 29

au plan qu'il faut appliquer au poids pour le maintenir en équilibre et trouver la force de pression Q du poids sur le plan incliné.

Solution. Les forces cherchées agissent sur des corps différents: la force F sur le poids, la force Q sur le plan incliné. Pour résoudre le problème nous chercherons, à la place de la force Q, une force de même intensité mais de sens opposé; ce sera la force de réaction N. Alors, la force donnée P et les forces cherchées F et N agiront sur le poids, c'est-à-dire sur un même corps. Examinons l'équilibre du poids. Eliminant mentalement le support (le plan), nous considérons le poids comme libre (fig. 29, *b*) et nous représentons les forces actives P et F qui agissent sur lui et la réaction d'appui N. Pour déterminer les forces cherchées, on peut se servir des conditions géométriques ou analytiques de l'équilibre d'un solide libre. Examinons les deux procédés de résolution.

Procédé géométrique. Lorsqu'il y a équilibre, le triangle construit avec les forces P, F et N doit être fermé. Nous commençons la construction par la force donnée. A partir d'un point arbitraire *a*, et à l'échelle choisie, nous portons la force P (fig. 29, *c*), puis nous menons par l'origine et par l'extré-

mité de cette force des droites parallèles aux directions des forces F et N. Le point d'intersection de ces droites donne le troisième sommet c du triangle des forces fermé abc dans lequel les côtés bc et ca seront égaux, à l'échelle choisie, aux forces cherchées. Le sens des forces se définit par la règle des flèches: puisque ici la résultante est nulle, les points des flèches ne doivent se renconterr sur le contour du triangle.

Les modules des forces cherchées peuvent être également trouvés dans le triangle abc par un calcul numérique (dans ce cas il n'est pas nécessaire de faire intervenir l'échelle). Remarquant que $\angle abc = \alpha$, nous obtenons

$$F = P \sin \alpha, \quad N = P \cos \alpha.$$

Procédé analytique. Puisque les forces agissantes forment un système plan, nous choisissons deux axes de coordonnées et, en outre, pour faciliter les calculs, nous menons l'axe Ox perpendiculairement à la force inconnue N. Nous calculons les projections de ces forces sur les axes de coordonnées (voir le tableau [1]):

F_k	P	F	N
F_{kx}	$P \sin \alpha$	$-F$	0
F_{ky}	$-P \cos \alpha$	0	N

et nous servant des conditions d'équilibre (12), nous composons les équations:

$$P \sin \alpha - F = 0,$$

$$-P \cos \alpha + N = 0.$$

Résolvant ces équations, nous obtiendrons:

$$F = P \sin \alpha, \quad N = P \cos \alpha.$$

La pression cherchée du poids sur le plan est égale en module à la force trouvée $N = P \cos \alpha$, mais est dirigée dans le sens opposé.

Remarquons que, pour maintenir le poids sur le plan incliné, il faut appliquer une force F moindre que le poids P. Ainsi, le plan incliné est une sorte de machine simple qui permet d'équilibrer une grande force à l'aide d'une force plus petite.

Comme on l'a indiqué au début du § 11, les résultats obtenus sont vrais non seulement lorsque le corps est au repos, mais encore lorsqu'il est animé d'un mouvement d'inertie. Donc, pour déplacer le poids uniformément vers le haut le long du plan lisse donné, il faut appliquer la même force $F = P \sin \alpha$ qui est nécessaire pour le maintenir en équilibre; c'est également avec la force $F = P \sin \alpha$ qu'il faut freiner le poids, si nous voulons qu'il descende d'un mouvement uniforme le long du plan. Pour que le poids effectue l'un de ces mouvements, il faut lui communiquer supplémentairement une vitesse initiale appropriée. Si aucune vitesse supplémentaire ne lui sera pas donnée, le poids restera au repos sous l'action de la force $F = P \sin \alpha$. La pression sur le plan est toujours égale à $P \cos \alpha$.

---

[1] Il est recommandé de remplir le tableau suivant les colonnes, c'est-à-dire de calculer d'abord les projections de la force P sur les deux axes, ensuite celles de la force F, etc. La constitution préalable de tels tableaux diminue la probabilité des erreurs et est particulièrement utile au début, tant qu'on n'a pas acquis une expérience suffisante de projection des forces.

Il en résulte une conclusion générale : *dans les problèmes de statique qu'on résout à l'aide des équations d'équilibre, à la place des forces exercées par le corps sur les liaisons on cherche les réactions des liaisons qui sont de même intensité, mais de sens opposé.* Quand, au contraire, on résout les problèmes par le procédé de décomposition (§ 7), on trouve directement les forces exercées sur les liaisons.

Problème 7. Une tige AB est articulée en A à un support fixe (fig. 30, *a*). A l'extrémité B de la tige est suspendu un poids $P = 10$ kgf et un fil. Celui-ci passe par une poulie C et à son extrémité est suspendu un poids $Q = 14{,}1$ kgf. Les axes de la poulie C et de la charnière A sont disposés sur une même verticale

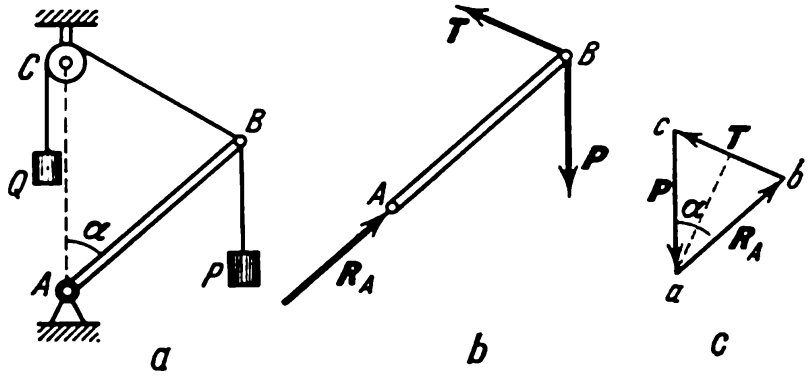


Fig. 30

et, de plus, $AC = AB$. Trouver quel doit être l'angle α pour que le système soit en équilibre et quel sera l'effort dans la tige AB ; on négligera le poids de la tige et les dimensions de la poulie.

Solution. Examinons l'équilibre de la tige AB à laquelle sont appliquées toutes les forces, données et cherchées. Supprimant les liaisons et considérant la tige comme libre (fig. 30, *b*), nous représentons les forces qui agissent sur elle : le poids $\boldsymbol{P}$, la tension du fil $\boldsymbol{T}$ et la réaction de la charnière $\boldsymbol{R}_A$ dirigée le long de AB, puisque la tige, dans ce cas, ne peut que s'étirer ou se comprimer (voir § 4). Si l'on peut négliger le frottement sur l'axe de la poulie, la tension du fil qui passe par cette poulie sera, à l'équilibre, partout la même, donc $T = Q$.

Construisons avec les forces $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{R}_A$ un triangle des forces fermé abc (fig. 30, *c*), en commençant par la force $\boldsymbol{P}$. De la similitude des triangles abc et ABC nous trouvons que $ac = ab$ et $\angle\, cab = \alpha$. Donc

$$R_A = P, \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{Q}{2P},$$

puisque $T = Q = 2P \sin\dfrac{\alpha}{2}$.

Les résultats obtenus montrent que, lorsque $\alpha < 180°$, l'équilibre n'est possible que si $Q < 2P$. La tige sera alors comprimée avec une force égale à P indépendamment de la grandeur du poids Q et de l'angle α.

Le cas où $\alpha = 180°$ doit être examiné à part. Il est évident que dans ce cas l'équilibre est possible quelles que soient les valeurs de P et de Q. De plus, si $P > Q$, la tige sera étirée par une force égale à $P - Q$; et si $Q > P$, la tige sera comprimée par une force égale à $Q - P$.

Les données numériques du problème nous donnent $R_A = 10$ kgf, $\alpha = 90°$ (la tige est horizontale).

Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que la force Q (le poids) n'a pas directement participée à la condition de l'équilibre (triangle des forces), car elle est appliquée au poids et non pas à la tige AB dont on a examiné l'équilibre.

Par la suite, pour ne pas encombrer les dessins, nous ne représenterons pas isolément (comme libre) le corps dont on examinera l'équilibre; néanmoins, en figurant les forces qui agissent sur lui, il faudra toujours, en pensée, se le représenter libre, c'est-à-dire comme sur les figures 29, *b*, 30, *b* ou 12, *b*.

Problème 8. Une grue, qui tourne dans un palier cylindrique A et sur une crapaudine B, porte une charge P (fig. 31). Négligeant le poids de la construction, déterminer les réactions des supports R_A et R_B, si la portée de la grue est égale à l et si $AB = h$.

Solution. Examinons l'équilibre de la grue tout entière car toutes les forces, donnée et cherchées, sont appliquée à elle. Eliminant en pensée

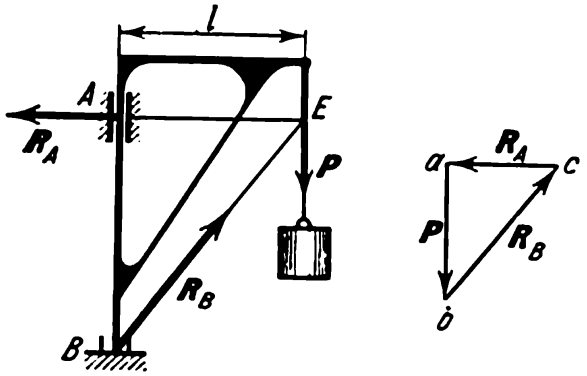


Fig. 31

les liaisons (le palier A et la crapaudine B) et considérant la grue comme libre, représentons la force donnée $\boldsymbol{P}$ et la réaction du palier $\boldsymbol{R}_A$, cette dernière dirigée perpendiculairement à l'axe AB. La réaction de la crapaudine $\boldsymbol{R}_B$ peut prendre n'importe quelle direction dans le plan de la figure. Mais la grue se trouve en équilibre sous l'action de ces trois forces; donc, leurs lignes d'action doivent se couper en un même point. Ce sera en l'occurrence le point E où se coupent les lignes d'action des forces $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}_A$. Ainsi, la réaction $\boldsymbol{R}_B$ sera dirigée le long de BE.

Appliquant la méthode géométrique, construisons avec les forces $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{R}_A$ et $\boldsymbol{R}_B$ le triangle fermé abc en commençant par la force donnée $\boldsymbol{P}$. De la similituda des triangles abc et ABE nous obtenons:

$$\frac{R_A}{P}=\frac{l}{h}, \quad \frac{R_B}{P}=\frac{\sqrt{h^2+l^2}}{h},$$

d'où

$$R_A=\frac{l}{h}P, \qquad R_B=\sqrt{1+\frac{l^2}{h^2}}\,P.$$

Le triangle abc montre que les sens des réactions $\boldsymbol{R}_A$ et $\boldsymbol{R}_B$ sont représentés d'une façon correcte. Les efforts sur le palier A et la crapaudine B seront numériquement égaux à R_A et R_B mais dirigés dans le sens opposé. Les intensités de ces efforts seront d'autant plus grandes que le rapport l/h sera plus grand.

Ce problème donne un exemple d'application du théorème des trois forces.

Notons la conclusion suivante: *si, dans un problème, les données sont des dimensions linéaires des parties de la construction, il est plus commode de se servir*

de la similitude pour la résolution du triangle des forces; si parmi les données il y a des angles (problème 6), *il est plus rationnel de se servir des formules trigonométriques.*

Problème 9. Une force horizontale P est appliquée à la charnière A d'une presse à genouillère (fig. 32, *a*). Négligeant le poids des tiges et du piston, déterminer la force de pression du piston sur le corps M, si les angles α et β sont donnés.

Solution. Examinons d'abord l'équilibre de la charnière A à laquelle est appliquée la seule force donnée P. La charnière étant considérée libre, son axe sera soumis à la force P et aux réactions des tiges R_1 et R_2 dirigées le long de ces tiges. Construisons le triangle des forces (fig. 32, *b*) où $\varphi = 90° - \alpha$, $\psi = 90° - \beta$, $\gamma = \alpha + \beta$. Appliquant le théorème des sinus, nous obtiendrons:

$$\frac{R_1}{\sin\varphi} = \frac{P}{\sin\gamma},$$

$$R_1 = \frac{P\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

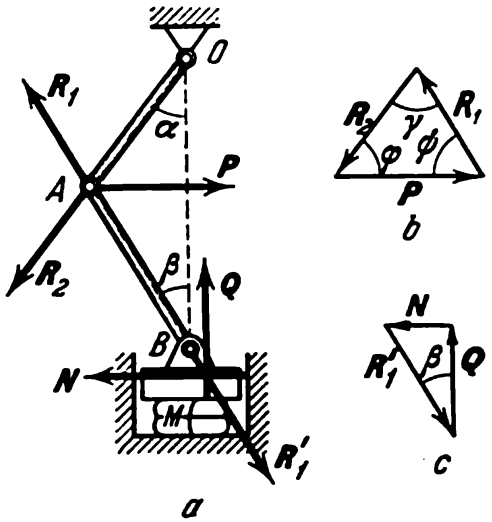


Fig. 32

Maintenant examinons l'équilibre du piston. Le piston libre est également soumis à trois forces: la pression $R_1' = -R_1$ de la tige AB, la réaction N de la paroi et la réaction Q du corps pressé. Les forces étant au nombre de trois, pour qu'il y ait l'équilibre, elles doivent être concourantes.

Construisant le triangle de ces forces (fig. 32, *c*), on trouve

$$Q = R_1' \cos\beta.$$

Remplaçant R_1' par la grandeur égale R_1, nous obtenons définitivement:

$$Q = \frac{P\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{P}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}.$$

La force de pression du piston sur le corps M est égale en module à Q et est dirigée dans le sens contraire.

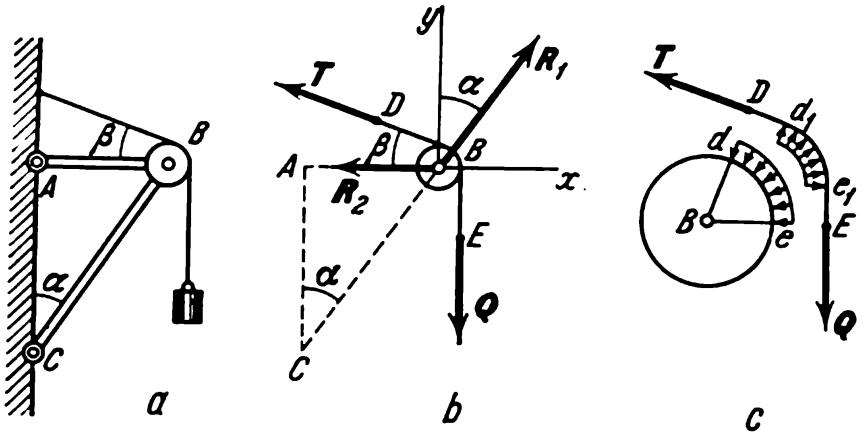
La dernière formule montre que, pour une force déterminée P, la pression Q augmente si les angles α et β diminuent.

Si les longueurs des tiges OA et AB sont égales, $\alpha = \beta$ et $Q = 0{,}5\,P \operatorname{cotg}\alpha$.

Cette solution permet la conclusion suivante: *dans certains problèmes, la force donnée (ou les forces données) peut être appliquée à un corps et la force cherchée (ou les forces cherchées) à un autre corps; dans ces cas il faut d'abord examiner l'équilibre du premier corps et déterminer la force avec laquelle il agit sur l'autre corps et ensuite passer à l'examen du second corps et déterminer les grandeurs cherchées.*

Problème 10. Une console, composée des tiges AB et BC articulées au mur, est munie au point B d'articulation des tiges d'une poulie (fig. 33, *a*). Par cette poulie passe un fil dont l'une des extrémités est attachée au mur et l'autre extrémité supporte un point Q. Déterminer les réactions des tiges en négligeant leur poids et les dimensions de la poulie. Les angles α et β sont donnés.

S o l u t i o n. Examinons l'équilibre de la poulie avec la partie DE du fil qui lui est adjacente [1]; supprimons les liaisons et remplaçons-les par les forces des réactions (fig. 33, *b*). La poulie et la partie du fil seront soumises à quatre forces extérieures : la tension Q de la branche droite du fil, la tension T de la branche gauche, numériquement égale à Q ($T = Q$) et les réactions des tiges R_1 et R_2 dirigées le long de ces dernières. Négligeant les dimensions de la poulie, nous considérons les forces comme concourantes. Le nombre de ces



F i g. 33

forces étant supérieur à trois, il sera plus commode d'appliquer le procédé de résolution analytique. Menons les axes de coordonnées comme c'est fait sur le dessin et calculons les projections de toutes les forces sur ces axes (voir le tableau ci-dessous).

F_k	Q	T	R_1	R_2
F_{kx}	0	$-T\cos\beta$	$R_1\sin\alpha$	$-R_2$
F_{ky}	$-Q$	$T\sin\beta$	$R_1\cos\alpha$	0

Ensuite, en nous servant des conditions d'équilibre (12), nous posons les équations appropriées en remplaçant T par la grandeur égale Q ; nous obtenons

$$-Q\cos\beta + R_1\sin\alpha - R_2 = 0;$$

$$-Q + Q\sin\beta + R_1\cos\alpha = 0.$$

[1] Dans des cas semblables il est rationnel d'examiner la poulie et la partie adjacente du fil comme un seul corps. Les pressions mutuelles, a priori inconnues, du fil et de la poulie, réparties le long de l'arc *de*, forment alors un système de forces intérieures équilibrées et ne participent pas aux conditions d'équilibre (voir § 3, conséquence de l'axiome 4). Si, au contraire, on examine la poulie isolément (fig. 33, *c*), on est amené à considérer l'action des forces de pression du fil réparties le long de l'arc *de*, et donc à chercher leur résultante ; pour cela il faudra examiner en outre les conditions de l'équilibre de la partie DE du fil (appliquant le principe de solidification), ce qui compliquera les calculs.

De la deuxième équation nous tirons:

$$R_1 = \frac{1 - \sin\beta}{\cos\alpha} Q.$$

Substituant cette valeur dans la première équation, nous obtenons après transformations:

$$R_2 = Q\,\frac{\sin\alpha - \cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha}.$$

Il résulte de l'expression trouvée pour R_1 que, quels que soient les angles aigus α et β, $R_1 > 0$. Cela signifie que la réaction $\boldsymbol{R}_1$ est toujours dirigée comme le montre le dessin. Au contraire, la force de pression de la poulie sur la tige est dirigée dans le sens opposé (la tige BC est comprimée). Discutons le cas de $\boldsymbol{R}_2$. Nous considérons que les angles α et β sont toujours aigus. Comme

$$\sin\alpha - \cos(\alpha - \beta) = \sin\alpha - \sin(90° - \alpha + \beta),$$

cette différence sera positive si $\alpha > (90° - \alpha + \beta)$ ou bien lorsque $2\alpha > 90° + \beta$. Il en résulte que, pour $\alpha > (45° + \beta/2)$, $R_2 > 0$, c'est-à-dire que la réaction $\boldsymbol{R}_2$ a la même direction que sur le dessin; si, au contraire, $\alpha < (45° + \beta/2)$, $R_2 < 0$, c'est-à-dire que la réaction $\boldsymbol{R}_2$ a une direction opposée (de A vers B). Dans le premier cas, la tige AB est étirée, dans le deuxième cas, comprimée. Lorsque $\alpha = 45° + \beta/2$, nous obtenons $R_2 = 0$.

Nous attirons l'attention sur les conclusions suivantes: 1) Si un système contient des poulies par lesquelles passent des fils, il est préférable, lorsqu'on établit les conditions de l'équilibre, *de considérer la poulie et la partie adjacente du fil comme un seul corps*. De plus, si l'on néglige le frottement du fil contre la poulie ou le frottement sur l'axe de la poulie, *les tensions aux deux extrémités du fil seront de même intensité et s'écarteront de la poulie* (dans le cas contraire le fil glisserait du côté de la plus forte tension ou bien la poulie tournerait; voir encore le problème 13).

2) *Si, dans la représentation graphique des réactions, l'une d'elles n'a pas été dirigée correctement, le polygone des forces nous le dévoilera directement lors de la résolution géométrique (règle des flèches); d'autre part, l'intensité de la réaction en question sera négative lors de la résolution analytique.*

Néanmoins, dans tous les cas où il est possible de le faire à l'avance, il est préférable de donner aux forces de réaction dès le début leur sens correct. Par exemple, dans le problème 8, la direction de la réaction du palier A se détermine par les raisonnements suivants: si l'on enlève le palier, la grue, sous l'action de la force $\boldsymbol{P}$, va tomber vers la droite; donc la force $\boldsymbol{R}_A$, qui remplace l'action du palier, doit, pour maintenir la grue en équilibre, être dirigée vers la gauche.

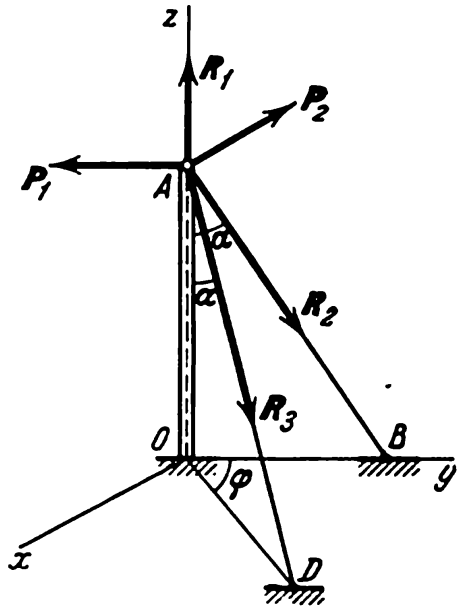


Fig. 34

Problème 11. Un poteau vertical OA posé par terre est maintenu par des câbles AB et AD qui forment avec lui des angles égaux $\alpha = 30°$; l'angle entre les plans AOB et AOD est $\varphi = 60°$ (fig. 34). Deux fils horizontaux perpendiculaires entre eux et tendus chacun avec une force $P = 100$ kgf sont suspendus

au poteau, parallèlement aux axes Ox et Oy. Trouver la pression verticale sur le poteau et les efforts dans les câbles, en négligeant leur poids.

Solution. Examinons l'équilibre du point A auquel sont fixés les fils et les câbles. Sur ce point agissent les forces de tension des fils $\boldsymbol{P}_1$ et $\boldsymbol{P}_2$ ($P_1 = P_2 = P$), les réactions des câbles $\boldsymbol{R}_2$ et $\boldsymbol{R}_3$ et la réaction du poteau $\boldsymbol{R}_1$. C'est un système de forces spatial. Dans ce cas nous n'utiliserons que le procédé de résolution analytique. Menons les axes de coordonnées (voir la figure), calculons les projections de toutes les forces sur ces axes et portons-les dans le tableau (nous calculons les projections de la force $\boldsymbol{R}_3$ sur les axes x et y comme il est indiqué à la fin du § 8).

F_k	P_1	P_2	R_1	R_2	R_3
F_{kx}	0	$-P$	0	0	$R_3 \sin\alpha \sin\varphi$
F_{ky}	$-P$	0	0	$R_2 \sin\alpha$	$R_3 \sin\alpha \cos\varphi$
F_{kz}	0	0	R_1	$-R_2 \cos\alpha$	$-R_3 \cos\alpha$

Maintenant, utilisant les conditions d'équilibre (11), posons les équations

$$-P + R_3 \sin\alpha \sin\varphi = 0,$$
$$-P + R_2 \sin\alpha + R_3 \sin\alpha \cos\varphi = 0,$$
$$R_1 - R_2 \cos\alpha - R_3 \cos\alpha = 0.$$

Résolvant ces équations, nous trouverons:

$$R_3 = \frac{P}{\sin\alpha \sin\varphi}, \quad R_2 = P\frac{1-\operatorname{cotg}\varphi}{\sin\alpha},$$
$$R_1 = P\left(1+\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)\operatorname{cotg}\alpha.$$

Les résultats obtenus montrent que, lorsque $\varphi < 45°$, la grandeur $R_2 < 0$ et la réaction $\boldsymbol{R}_2$ a le sens contraire à celui qui est représenté sur le dessin. Mais comme un câble ne peut pas travailler à la compression, il faut disposer le câble AD de façon que l'angle φ soit plus grand que 45°. Avec les données numériques du problème nous aurons

$$R_3 = 231 \text{ kgf}, \quad R_2 = 85 \text{ kgf}, \quad R_1 = 273 \text{ kgf}.$$

§ 14. Moment d'une force par rapport à un centre (ou à un point). L'expérience montre que, sous l'action d'une force, un solide peut effectuer, outre un déplacement de translation, une rotation autour d'un centre. L'effet de rotation produit par une force est caractérisé par son moment.

Soit une force $\boldsymbol{F}$ appliquée au point A du solide (fig. 35). Supposons que cette force tende à faire tourner le corps autour du centre O. La perpendiculaire h abaissée du centre O sur la ligne d'action de la force $\boldsymbol{F}$ s'appelle le *bras de levier* de la force $\boldsymbol{F}$ par rapport au

centre O. Puisqu'on peut arbitrairement déplacer le point d'application de la force le long de sa ligne d'action, il est évident que l'effet de rotation produit par une force dépendra : 1) du module de la force F et de la longueur du bras de levier h ; 2) de la position du plan de rotation OAB qui passe par le centre O et la force F ; 3) du sens de rotation dans ce plan.

Limitons-nous pour le moment à l'examen des systèmes de forces se trouvant dans un même plan. Dans ce cas le plan de rotation est

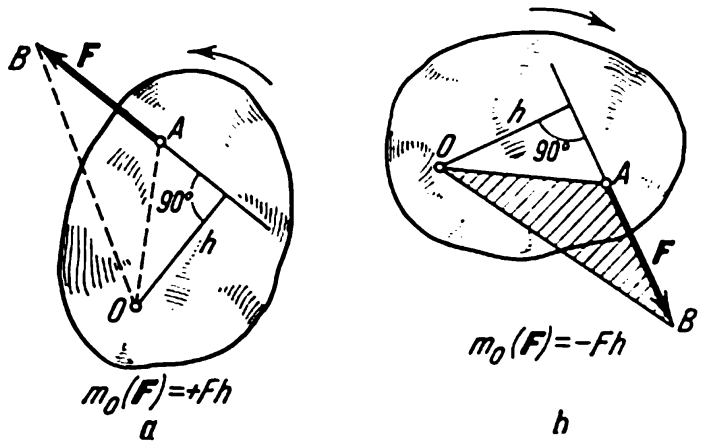


Fig. 35

le même pour toutes les forces de sorte que toute précision supplémentaire est superflue ; le sens de rotation peut être caractérisé par son signe si l'on convient que la rotation sera positive dans un sens et négative, dans l'autre.

Alors, pour mesurer quantitativement l'effet de rotation, on peut introduire la notion suivante de moment d'une force : *on appelle moment d'une force F par rapport au centre O la grandeur égale au produit, pris avec le signe approprié, du module de la force par la longueur du bras de levier.*

Le moment de la force F par rapport au centre O sera désigné par le symbole $m_O(F)$. Donc,

$$m_O(F) = \pm Fh. \tag{13}$$

Par la suite nous estimerons que le moment a le signe plus, si la force tend à faire tourner le corps autour du centre O dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre, et le signe moins, si elle tend à le faire tourner dans le sens des aiguilles d'une montre. Ainsi, pour la force F représentée sur la figure 35, *a*, le moment par rapport au centre O a le signe plus et, pour la force représentée sur la figure 35, *b*, le signe moins. Si la force est mesurée en kilogrammes-force et le bras de levier en mètres, le moment de la force sera mesuré en *kilogrammètres.*

Notons les propriétés suivantes du moment d'une force:

1) Le moment d'une force ne change pas lorsqu'on déplace le point d'application de cette force le long de sa ligne d'action.

2) Le moment d'une force par rapport au centre O n'est nul que lorsque la force est nulle ou quand la ligne d'action de la force passe par le centre O (le bras de levier est nul).

3) Le moment d'une force est numériquement égal au double de l'aire du triangle OAB (fig. 35, *b*)

$$m_O(F) = \pm 2 \text{ surf. } \triangle OAB. \tag{14}$$

Cela résulte du fait que

$$\text{surf. } \triangle OAB = {}^1/_2 AB \cdot h = {}^1/_2 Fh.$$

4) Le moment de la force F par rapport au centre O définit le point par lequel passe la ligne d'action de cette force; ce point se trouve à une distance du centre O égale à

$$h = \frac{|m_O(F)|}{F},$$

où h doit être portée sur la perpendiculaire au vecteur F dans le sens qui sera déterminé par le signe du moment.

§ 15. **Théorème de Varignon du moment de la résultante.** *Le moment de la résultante d'un système plan des forces concourantes par rapport à un centre quelconque est égal à la somme algébrique des moments des forces composantes par rapport à ce centre* (théorème de Varignon [1]).

Pour démontrer ce théorème, trouvons d'abord l'expression du moment par rapport au centre O d'une force quelconque appliquée au point A, par exemple de la force F_1 (fig. 36). Menons l'axe Ox perpendiculaire à la droite OA. Alors 2 surf. $\triangle OAB = OA \cdot Ob = OA \cdot F_{1x}$, où F_{1x} est la projection de la force F_1 sur l'axe Ox; d'où, conformément à (14):

$$m_O(F_1) = OA \cdot F_{1x}. \tag{15}$$

La formule (15) est vraie même dans le cas où la force F est située au-dessous de la droite OA; dans ce cas le moment sera négatif car la projection F_x elle-même sera négative.

Examinons maintenant un système plan des forces concourantes $F_1, F_2, \ldots, F_n$, appliquées au point A (fig. 36). Leur résul-

[1] P. Varignon (1654-1722), savant français bien connu pour ses travaux de mathématiques et de mécanique. Il a formulé des principes de la statique dans son livre « Projet d'une nouvelle mécanique » (1687).

tante $\boldsymbol{R}$ est appliquée à ce même point ; de plus, $\boldsymbol{R} = \Sigma \boldsymbol{F}_k$. Alors, selon le théorème de la projection de la somme de plusieurs forces

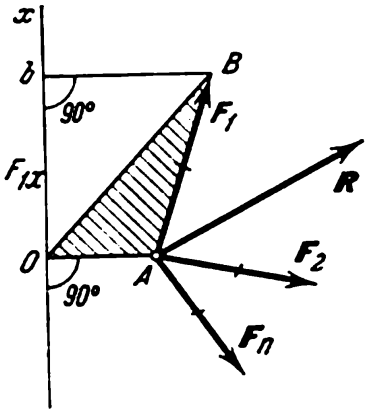


Fig. 36

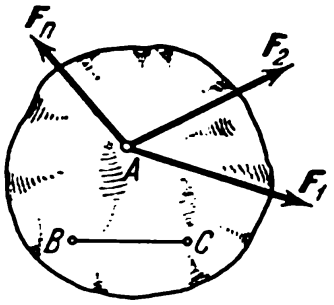


Fig. 37

sur un axe, nous obtenons $R_x = \sum F_{kx}$. Multipliant les deux parties de cette égalité par OA, nous trouvons :

$$OA \cdot R_x = \sum (OA \cdot F_{kx}),$$

ou bien, selon la formule (15),

$$m_O(\boldsymbol{R}) = \Sigma m_O(\boldsymbol{F}_k). \tag{16}$$

La formule (16) donne l'expression mathématique du théorème de Varignon.

§ 16. Equations des moments des forces concourantes. Les conditions analytiques de l'équilibre des forces concourantes peuvent être exprimées non seulement par les projections de ces forces, mais aussi par leurs moments. Montrons que, pour qu'un système plan de forces concourantes soit en équilibre, il faut et il suffit que soient réalisées les conditions suivantes :

$$\Sigma m_B(\boldsymbol{F}_k) = 0, \qquad \Sigma m_C(\boldsymbol{F}_k) = 0, \tag{17}$$

où B et C sont des points quelconques ne se trouvant pas sur une même droite avec le point A en lequel concourent les forces (fig. 37).

Il est évident que ces conditions sont nécessaires car, si par exemple $\Sigma m_B(\boldsymbol{F}_k) \neq 0$, $m_B(\boldsymbol{R}) \neq 0$ d'après la formule (16) et donc $\boldsymbol{R} \neq 0$ et l'équilibre est impossible.

Démontrons que ces conditions sont suffisantes. Si les conditions (17) sont remplies, selon le théorème de Varignon $m_B(\boldsymbol{R}) = 0$ et $m_C(\boldsymbol{R}) = 0$, ce qui n'est possible que lorsque $\boldsymbol{R} = 0$ ou lorsque la ligne d'action de la force $\boldsymbol{R}$ passe simultanément par les points B et C. Mais, dans notre cas, la deuxième hypothèse est impossible car la résultante des forces concourantes doit passer par le point A (fig. 37) et la droite BC, d'après les conditions du théorème, ne

passe pas par le point A. Donc, si les conditions (17) sont remplies, la résultante $\boldsymbol{R} = 0$, c'est-à-dire que le système de forces est effectivement en équilibre.

Il est évident que pour que l'équilibre ait lieu, il ne suffit pas qu'une seule des deux conditions soit remplie.

Lors de la résolution des problèmes à l'aide des conditions (17) on peut obtenir des équations dont chacune ne contiendra qu'une inconnue; pour cela il faut choisir les centres des moments sur les lignes d'action des forces inconnues.

Problème 12. Résoudre le problème 7 à l'aide des équations des moments.

Solution. Désignons $AB = AC$ par a et prenons pour centres des moments les points A et C (fig. 38). Abaissant du point A les perpendiculaires AE et AK sur les lignes d'action des forces $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{P}$, nous trouverons:

$$AE = a\cos\frac{\alpha}{2},\ AK = a\sin\alpha,\ \text{donc}\ m_A(\boldsymbol{T}) = Ta\cos\frac{\alpha}{2},\ m_A(\boldsymbol{P}) = -Pa\sin\alpha.$$

De plus, $m_A(\boldsymbol{R}_A) = 0$. Les moments des forces par rapport au centre C se calculent d'une manière analogue. Finalement, posant les conditions d'équilibre (17), nous obtenons:

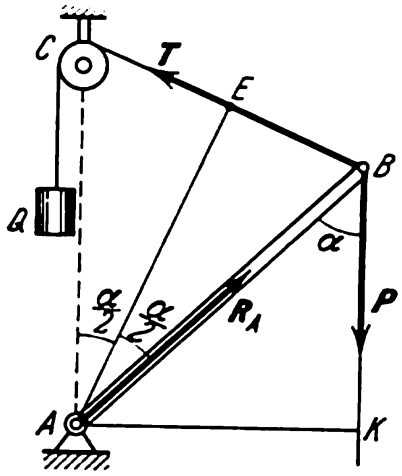


Fig. 38

$$\sum m_A(\boldsymbol{F}_k) \equiv Ta\cos\frac{\alpha}{2} - Pa\sin\alpha = 0,$$

$$\sum m_C(\boldsymbol{F}_k) \equiv R_A a\sin\alpha - Pa\sin\alpha = 0.$$

Puisque $T = Q$, nous trouvons de la première équation

$$\left(Q - 2P\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2} = 0.$$

Il en résulte que l'angle α, qui détermine la position d'équilibre, peut prendre deux valeurs:

$$\alpha = 180^\circ \text{ et } \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{Q}{2P}.$$

Lorsque $\alpha \neq 180^\circ$, nous tirons de la deuxième équation $R_A = P$.

Problème 13. Dans le problème 10 trouver la réaction R_2 à l'aide de l'équation des moments.

Solution. Calculant les moments par rapport au centre C (voir fig. 33, *b*) et posant $CB = a$, nous obtenons:

$$\sum m_C(\boldsymbol{F}_k) \equiv Ta\cos(\alpha - \beta) + R_2 a\cos\alpha - Qa\sin\alpha = 0.$$

De là, puisque $T = Q$, nous trouvons immédiatement:

$$R_2 = Q\,\frac{\sin\alpha - \cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha}.$$

On peut trouver la réaction R_1 en prenant les moments par rapport au centre A.

Comme on le voit, on peut également se servir des équations des moments pour vérifier les solutions obtenues par d'autres procédés.

Remarquons qu'on peut se convaincre de la véracité de l'égalité $T = Q$ en écrivant l'équation des moments par rapport au centre de la poulie (cette équation, comme il sera démontré au § 24, est vraie même pour des forces non concourantes). Nous obtiendrons alors $Tr - Qr = 0$, où r est le rayon de la poulie, ou encore $T = Q$.

Chapitre III

SYSTÈMES DE FORCES PARALLÈLES ET DE COUPLES COPLANAIRES

§ 17. Composition et décomposition des forces parallèles. Cherchons la résultante de deux forces parallèles agissant sur un solide. Deux cas sont possibles : 1) les forces sont dirigées dans un même sens et 2) les forces sont dirigées dans des sens contraires.

1) Composition de deux forces parallèles et de même sens. Considérons un solide sur lequel agissent deux forces parallèles $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ (fig. 39). Utilisant les axiomes 1 et 2 de la statique, passons de ce système de forces parallèles à un système équivalent de forces concourantes $\boldsymbol{Q}_1$ et $\boldsymbol{Q}_2$. Pour cela, appliquons aux points A et B deux forces équilibrées $\boldsymbol{P}_1$ et $\boldsymbol{P}_2$ ($\boldsymbol{P}_1 = -\boldsymbol{P}_2$) dirigées le long de la droite AB et composons-les avec les forces $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ selon la règle du parallélogramme. Transportons les forces obtenues $\boldsymbol{Q}_1$ et $\boldsymbol{Q}_2$ au point O où se coupent leurs lignes d'action et décomposons-les en leurs composantes initiales. Cela fait, sur le point O agiront deux forces équilibrées $\boldsymbol{P}_1$ et $\boldsymbol{P}_2$, que nous rejetons, et deux forces dirigées le long d'une même droite $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$. Transportons ces forces au point C et remplaçons-les par leur résultante $\boldsymbol{R}$ dont le module est :

$$R = F_1 + F_2. \tag{18}$$

La force $\boldsymbol{R}$ est précisément la résultante des forces parallèles $\boldsymbol{F}_1$ et $\boldsymbol{F}_2$ appliquées aux points A et B. Pour déterminer la position du point C, considérons les triangles OAC, Oak et OCB, Omb. De la similitude des triangles respectifs on déduit que

$$\frac{AC}{OC} = \frac{P_1}{F_1} \quad \text{et} \quad \frac{BC}{OC} = \frac{P_2}{F_2}$$

ou encore $AC \cdot F_1 = BC \cdot F_2$ puisque $P_1 = P_2$.

De là, nous servant des propriétés des proportions et tenant compte du fait que $BC + AC = AB$ et $F_1 + F_2 = R$, nous obtenons :

$$\frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}. \tag{19}$$

Ainsi, *la résultante de deux forces parallèles et de même sens agissant sur un solide parfait a un module égal à la somme des modules des forces composantes, leur est parallèle et est dirigée dans le même sens ; la ligne d'action de la résultante passe entre les points d'application*

des forces composantes à des distances de ces points inversement proportionnelles aux forces.

2) Composition de deux forces parallèles et de sens contraire. Soient les forces F_1 et F_2 agissant sur un solide avec, pour plus de précision, $F_1 > F_2$ (fig. 40). Prenons sur le prolongement de BA le point C et appliquons-lui deux

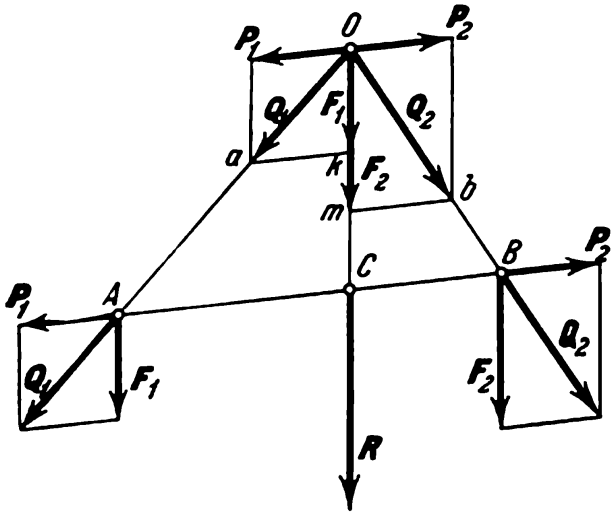


Fig. 39

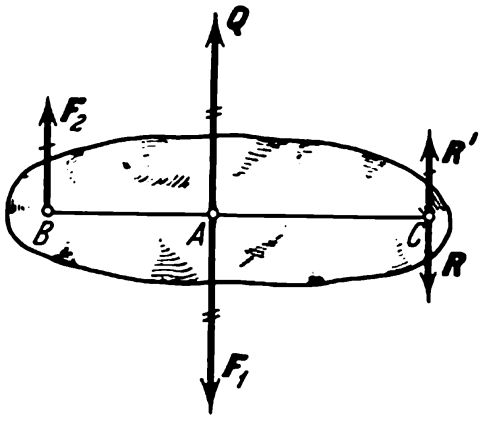


Fig. 40

forces équilibrées R et R' parallèles aux forces F_1, F_2. Choisissons les modules des forces et la position du point C de façon que soient remplies les égalités :

$$R = F_1 - F_2; \tag{20}$$

$$\frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R}. \tag{21}$$

Alors, en composant les forces F_2 et R' nous trouverons d'après les formules (18) et (19) que leur résultante Q aura un module égal à $F_2 + R'$, c'est-à-dire égal à F_1, et qu'elle sera appliquée au point A. Cela fait, on peut supprimer les forces F_1 et Q comme étant équilibrées. En définitive, les forces données F_1 et F_2 seront remplacées par une seule force R qui est précisément leur résultante. Le module de cette résultante et son point d'application C sont déterminés par les formules (20), (21). Ainsi, *la résultante de deux forces parallèles et de sens contraire agissant sur un corps solide parfait a un module égal à la différence des modules des forces composantes, leur est parallèle et est dirigée dans le sens de la plus grande force ; la ligne d'action de la résultante passe en dehors du segment qui joint les points d'application des forces composantes à des distances de ces points inversement proportionnelles aux forces.*

Si un corps est soumis à plusieurs forces parallèles, on peut trouver leur résultante, si elle existe, soit en appliquant les règles

de composition de deux forces, soit par le procédé qui sera examiné au chapitre IV.

3) Décomposition des forces. A l'aide des formules obtenues on peut résoudre le problème de la décomposition d'une force donnée en deux forces parallèles à la première et dirigées dans un même sens ou dans des sens contraires. Ce problème sera déterminé lorsqu'on se donnera des conditions supplémentaires (par exemple, les lignes d'action des deux forces cherchées ou bien le module et la ligne d'action de l'une d'elles).

Problème 14. Déterminer les pressions d'une poutre horizontale sur les appuis A et B, si les poids des charges qui reposent sur la poutre sont $P_1 = P_2 = 80$ kgf (fig. 41). Les dimensions sont données sur le dessin ; on négligera le poids de la poutre.

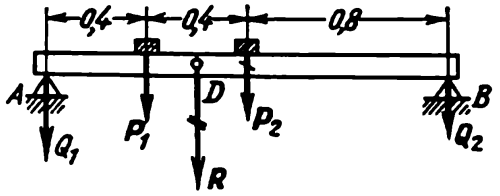


Fig. 41

Solution. Tout d'abord, remplaçons les forces P_1 et P_2 par leur résultante R qui passe par le point D. Son module est $R = 160$ kgf. Maintenant, décomposons la force R suivant les directions des réactions d'appui (voir indica-

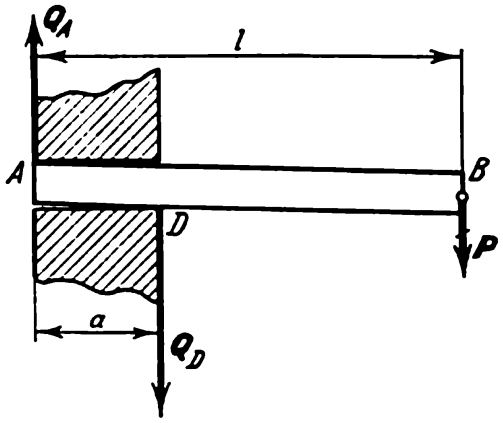


Fig. 42

tion faite au § 7). Nous obtenons les deux forces Q_1 et Q_2 qui donnent précisément les pressions cherchées sur les appuis. Des égalités

$$\frac{Q_1}{DB} = \frac{R}{AB} \text{ et } Q_2 = R - Q_1$$

nous trouvons

$$Q_1 = 100 \text{ kgf}, \; Q_2 = 60 \text{ kgf}.$$

Problème 15. Dans un mur d'épaisseur $a = 0{,}5$ m est encastrée une poutre AB de longueur $l = 2{,}5$ m (fig. 42). A l'extrémité B de la poutre est suspendue

une charge de poids $P = 3\,000$ kgf. Négligeant le poids de la poutre, déterminer les forces de pression sur le mur en supposant qu'elles sont appliquées aux points A et D (la poutre est légèrement inclinée).

Solution. Pour déterminer les pressions cherchées décomposons la force P suivant les directions des réactions des points d'appui D et A. Nous obtenons les forces Q_D et Q_A. Puisque la force P ne se trouve pas entre les forces cherchées, ces dernières seront dirigées dans des sens contraires, et de plus, par son module, la force Q_D (qui est plus près de P) sera plus grande que Q_A et sera dirigée dans le même sens que P. Des égalités

$$\frac{Q_D}{l} = \frac{P}{a} \text{ et } P = Q_D - Q_A$$

nous trouvons

$$Q_D = \frac{l}{a} P = 15\,000 \text{ kgf}, \quad Q_A = 12\,000 \text{ kgf}.$$

Pour vérifier la solution on peut écrire une autre proposition : $\frac{Q_A}{l-a} = \frac{P}{a}$.

§ 18. Couple de forces. Moment d'un couple. Un système de deux forces parallèles, de même module, de sens contraire, agissant sur un corps solide parfait, est appelé *couple de forces* (fig. 43).

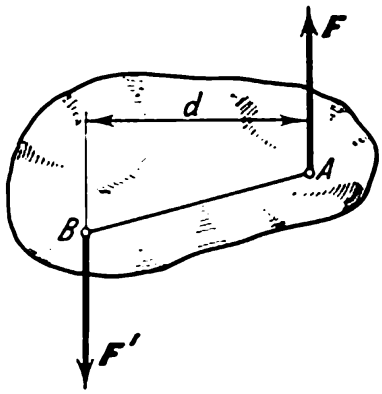


Fig. 43

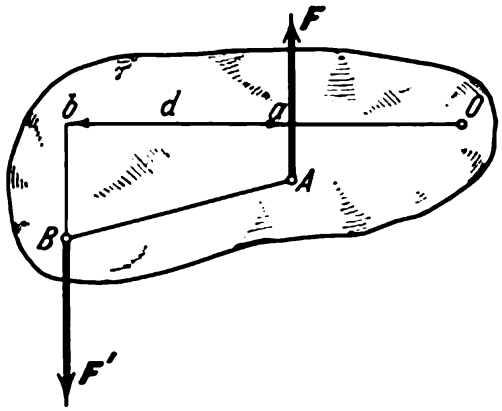


Fig. 44

Un système de forces qui forment un couple n'est évidemment pas en équilibre (voir axiome 1). D'un autre côté, un couple de forces, contrairement aux systèmes étudiés jusqu'ici, n'a pas de résultante.

En effet, si le couple avait une résultante quelconque Q, le système de forces F, F' et $Q' = -Q$ devrait se trouver en équilibre ce qui est impossible car $F + F' + Q' \neq 0$ (puisque $F + F' = 0$ et $Q' \neq 0$) ; pour qu'un système de forces arbitraire soit en équilibre, il est nécessaire, comme on le démontrera, que la somme géométrique de ces forces soit égale à zéro. Ainsi, il est impossible de remplacer ou d'équilibrer un couple de forces par une seule force. C'est pourquoi les propriétés du couple, qui est une mesure particulière de l'action mécanique réciproque des corps, doivent être étudiées à part.

Le plan qui contient les lignes d'action des forces du couple est appelé *plan d'action du couple* et la distance d entre les lignes d'action des forces du couple, *bras de levier du couple*. L'action d'un couple de forces sur un solide se réduit à un certain effet de rotation qui dépend : 1) du module F des forces et de la longueur d du bras de levier ; 2) de la position du plan d'action du couple ; 3) du sens de rotation dans ce plan. Pour caractériser cet effet on introduit la notion de moment d'un couple.

Dans ce chapitre nous étudierons les propriétés des couples coplanaires. Par analogie avec le moment d'une force (§ 14), on introduit la définition suivante : *le moment d'un couple est la grandeur égale au produit, pris avec le signe approprié, du module d'une des forces du couple par le bras de levier du couple* [1]. Nous désignerons le moment d'un couple par la lettre m ou M. Alors

$$m = \pm Fd. \tag{22}$$

Le moment a le signe plus lorsque le couple tend à faire tourner le corps dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre et le signe moins, dans le cas opposé. Le moment d'un couple, comme le moment d'une force, se mesure en mètres × kilogrammes. Il est évident que le moment d'un couple est égal au moment de l'une de ses forces par rapport au point d'application de l'autre force (fig. 43) :

$$m = m_B(F) = m_A(F'). \tag{23}$$

Démontrons le théorème suivant : *la somme algébrique des moments des forces d'un couple par rapport à un centre quelconque de son plan d'action ne dépend pas du choix de ce centre et est égale au moment du couple.* Effectivement, prenant dans le plan d'action du couple un point arbitraire O (fig. 44), nous trouvons : $m_O(F) = -F \cdot Oa$, $m_O(F') = F' \cdot Ob$. Additionnant ces égalités membre à membre et remarquant que $F' = F$ et $Ob - Oa = d$, où d est le bras de levier du couple, nous obtenons :

$$m_O(F) + m_O(F') = m. \tag{24}$$

Il est commode de se servir de ce théorème lorsque l'on calcule les moments des forces d'un couple par rapport à un centre arbitraire.

§ 19. Equivalence des couples. Pour établir les conditions d'équivalence de deux couples, démontrons d'abord le théorème suivant : *sans changer l'action produite sur le corps, on peut remplacer un couple de forces appliqué à un corps solide parfait par un autre*

[1] Il ne faut pas confondre cette notion avec le moment d'une force. La notion de moment d'une force est liée au point par rapport auquel on prend ce moment. Le moment d'un couple ne se définit qu'à l'aide de ses forces et de son bras de levier ; cette grandeur n'est liée à aucun point du plan. La théorie des couples a été élaborée par le savant français L. Poinsot (1777-1859).

couple quelconque se trouvant dans le même plan et ayant le même moment. Soit un couple de forces (F, F') avec un bras de levier d_1. Représentons les forces de ce couple comme étant appliquées en des points arbitraires A et B de leurs lignes d'action (fig. 45) et menons par ces points deux droites parallèles quelconques AD et BE. Soit d_2 la distance entre ces deux droites. Décomposons maintenant

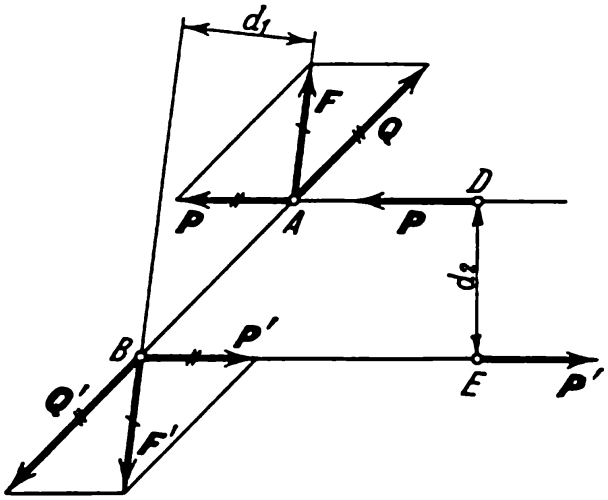


Fig. 45

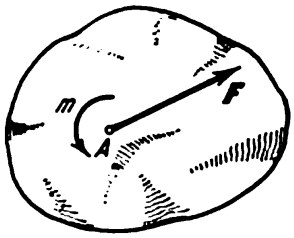


Fig. 46

la force F, suivant les directions BA et AD, en les forces Q et P, et la force F', suivant les directions AB et BE, en les forces Q' et P'. Il est évident que $P = -P'$, $Q = -Q'$. Les forces Q et Q' étant équilibrées, elles peuvent être enlevées. En définitive, le couple de forces (F, F') sera remplacé par le couple (P, P') ayant un bras de levier différent et des forces différentes qui peuvent d'ailleurs être appliquées en des points quelconques D et E de leurs lignes d'action. De plus, du moment que les points A et B et les directions des droites AD et BE ont été choisis arbitrairement, le couple (P, P') peut se trouver, dans son plan d'action, en n'importe quel endroit. Pour terminer, montrons que les moments de ces couples sont égaux. Puisque la force F est la résultante des forces P et Q, on a, selon le théorème de Varignon :

$$m_B(F) = m_B(P) + m_B(Q).$$

Mais $m_B(F) = Fd_1$, $m_B(P) = Pd_2$, $m_B(Q) = 0$; donc, $Fd_1 = Pd_2$, c'est-à-dire que les moments des couples sont égaux, et le théorème est ainsi démontré.

Conséquences de ce théorème :

1) on peut transporter un couple donné en un endroit quelconque de son plan d'action ;

2) on peut arbitrairement changer les modules des forces ou la longueur du bras de levier d'un couple donné à condition de ne pas changer le moment du couple.

Il en résulte que deux couples coplanaires et de même moment sont équivalents puisque, grâce aux opérations citées ci-dessus, ils peuvent être transformés l'un en l'autre. De plus, tous les théorèmes démontrés ci-dessus montrent que l'action d'un couple de forces sur un solide est effectivement bien caractérisée par le moment du couple

Pour définir un couple situé dans un plan donné il suffit, d'après ce qui a été démontré, de se donner son moment ; l'intensité des forces du couple ou la longueur du bras de levier ne sont pas essentielles. C'est pourquoi, particulièrement dans la technique, on représente souvent un couple de forces par une flèche demi-circulaire qui montre le sens de rotation sans représenter les forces elles-mêmes (par exemple, la figure 46 montre que sur le corps agissent la force F et le couple de moment m).

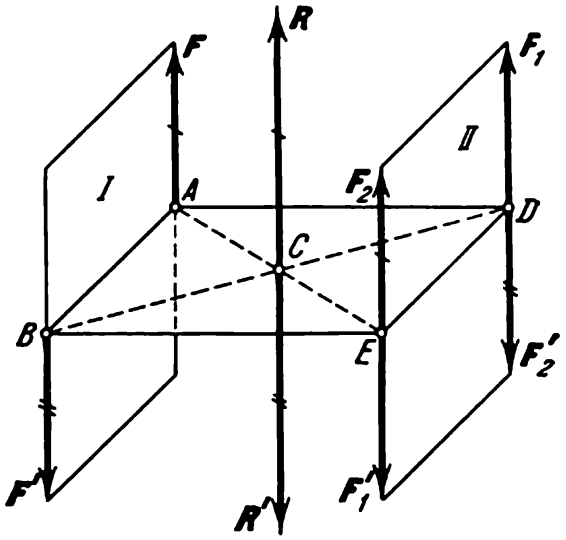


Fig. 47

Démontrons maintenant un deuxième théorème : *l'action d'un couple sur un solide ne change pas si l'on transporte ce couple du plan donné dans un autre plan quelconque parallèle au premier.*

Soit un couple (F, F') situé dans le plan (I) (fig. 47). Menons le plan (II), parallèle au plan (I), et prenons-y le segment DE égal et parallèle à AB. Aux points D et E appliquons quatre forces deux à deux équilibrées, telles que $F_1 = F_2 = F$ et $F'_1 = F'_2 = F'$. Remarquons que la figure $ABDE$ est un parallélogramme dont les diagonales se coupent au point C en leur milieu. Composons maintenant les forces parallèles F et F_2 ; ayant des modules égaux, elles seront remplacées par leur résultante R appliquée au milieu du segment AE, c'est-à-dire au point C ; de plus, $R = 2F$. Quant aux forces F' et F'_2, elles seront remplacées par leur résultante R' appliquée au milieu du segment BD, c'est-à-dire également au point C ; de plus, $R' = 2F' = R$. Donc, les forces R et R' équilibrées peuvent être enlevées. En définitive, le couple (F, F') est remplacé par un même couple (F_1, F'_1) mais disposé dans le plan (II).

Des théorèmes démontrés il résulte que deux couples situés dans des plans parallèles et ayant des moments égaux sont également équivalents.

Nous attirons l'attention sur l'analogie suivante. Une force qui agit sur un solide se définit par son module, sa ligne d'action et son sens le long de cette ligne d'action ; le point d'application de la force peut être placé n'importe où sur la ligne d'action. Un couple

qui agit sur un solide se définit par le module de son moment, son plan d'action et son sens de rotation ; on peut placer le couple n'importe où dans son plan d'action.

L'étude du mouvement d'un solide sous l'action d'un couple de forces appartient aux problèmes de dynamique. A l'aide des théorèmes de la dynamique on peut démontrer que tout couple, agissant sur un solide libre, fera tourner ce solide autour de son centre de gravité (voir § 136). Si le corps a un axe de rotation fixe, l'effort rotatif (moment) qui fait tourner le corps autour de l'axe ne dépend pas de la position du couple dans un plan perpendiculaire à cet axe. Cela résulte de l'égalité (24).

Problème 16. Un levier coudé $ABCD$ (fig. 48) se trouve en équilibre sous l'action de deux forces parallèles P et P' qui forment un couple. Déterminer les forces exercées sur les supports, si $AB = a = 15$ cm, $BC = b = 30$ cm, $CD = c = 20$ cm, $P = P' = 30$ kgf.

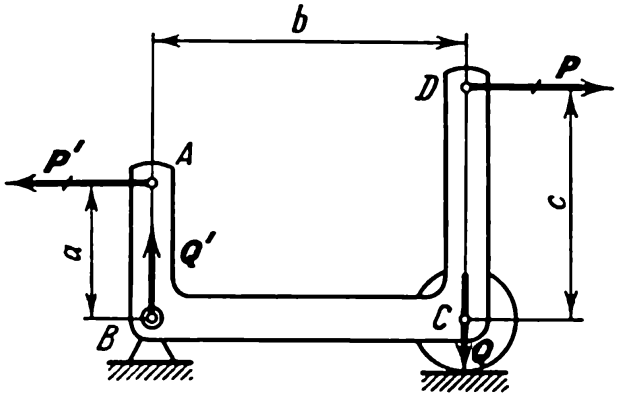


Fig. 48

Solution. Remplaçons le couple (P, P') par le couple équivalent (Q, Q') dont les forces sont dirigées suivant les directions des réactions des supports. Les moments des deux couples doivent être égaux, c'est-à-dire que $P(c - a) = Qb$.

Donc, les pressions sur les supports sont

$$Q = Q' = \frac{c-a}{b} P = 5 \text{ kgf}$$

et sont dirigées comme le montre la figure.

§ 20. Composition des couples coplanaires. Condition d'équilibre des couples. Démontrons le théorème suivant : *un système de couples coplanaires est équivalent à un seul couple disposé dans le plan du système et ayant un moment égal à la somme algébrique des moments des couples composants.* Soient, pour fixer les idées, trois couples de moments m_1, m_2, m_3 (fig. 49) agissant sur un corps. Selon le

théorème de l'équivalence des couples, nous pouvons remplacer ces couples par trois couples (P_1, P_1'), (P_2, P_2'), (P_3, P_3') ayant le bras de levier commun d et les moments des couples initiaux

$$P_1 d = m_1, \quad -P_2 d = m_2, \quad P_3 d = m_3.$$

Cherchons la résultante des forces appliquées au point A et celle des forces au point B, nous obtenons au point B la force $\boldsymbol{R}$ et au point A la force $\boldsymbol{R}'$ dont les modules seront

$$R = R' = P_1 - P_2 + P_3.$$

En définitive, tout le système de couples se réduit à un seul couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}')$ ayant un moment

$$M = Rd = P_1 d + (-P_2 d) + \\ + P_3 d = m_1 + m_2 + m_3.$$

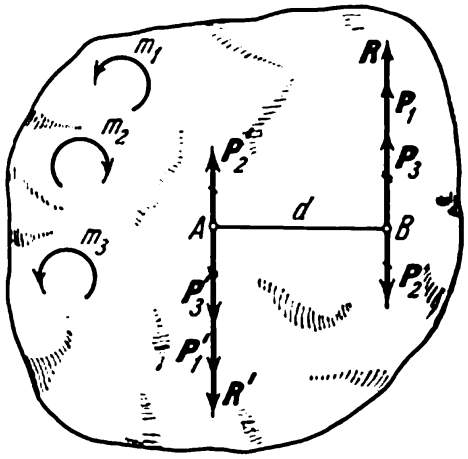


Fig. 49

Dans le cas de trois couples le théorème est démontré. Il est évident que nous obtiendrons le même résultat quel que soit le nombre de couples. Un système composé de n couples avec des moments m_1, m_2, . . ., m_n sera remplacé par un seul couple ayant un moment :

$$M = \Sigma m_k. \tag{25}$$

Il en résulte que, pour qu'un système plan de couples soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme algébrique des moments de ces couples soit égale à zéro :

$$\Sigma m_k = 0. \tag{26}$$

Problème 17. Un couple de forces de moment m_1 agit sur la roue dentée *1* de rayon r_1 (fig. 50, *a*). Déterminer le moment m_2 du couple qu'il faut appliquer à la roue dentée *2* de rayon r_2 pour maintenir l'équilibre.

Solution. Examinons d'abord les conditions de l'équilibre de la roue dentée *1*, soumise à un couple de moment m_1 qui ne peut être équilibré que par l'action d'un autre couple. Ce dernier est, dans ce cas, le couple $(\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{R}_1)$ formé par la pression $\boldsymbol{Q}_1$ exercée par la roue dentée *2* sur une dent de la roue *1* et par la réaction $\boldsymbol{R}_1$ de l'axe A. Alors, selon la condition d'équilibre (26),

$$m_1 + (-Q_1 r_1) = 0 \quad \text{ou} \quad Q_1 = \frac{m_1}{r_1}.$$

Maintenant examinons les conditions de l'équilibre de la roue dentée *2*. Selon l'axiome 4, elle subira l'action de la force $\boldsymbol{Q}_2 = -\boldsymbol{Q}_1$ (fig. 50, *b*), force qui, avec celle de la réaction de l'axe B, forme le couple $(\boldsymbol{Q}_2, \boldsymbol{R}_2)$ dont le moment est égal à $-Q_2 r_2$. Ce couple doit précisément être équilibré par le couple de moment m_2 appliqué à la roue dentée *2* ; donc, selon la condition d'équilibre (26) ·

$m_2 + (-Q_2 r_2) = 0$. D'où, puisque $Q_2 = Q_1$, nous trouvons:

$$m_2 = \frac{r_2}{r_1} m_1.$$

Il est naturel que les couples de moments m_1 et m_2 ne satisfassent pas à la condition d'équilibre (26) puisqu'ils sont appliqués à des corps différents.

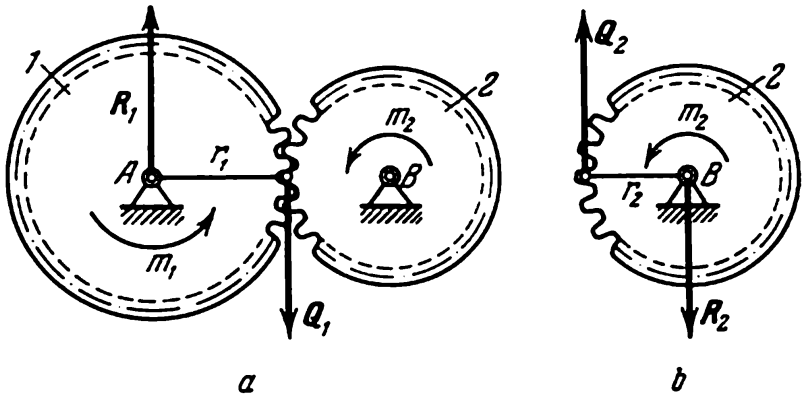


Fig. 50

La force Q_1 (ou Q_2), obtenue lors de la résolution du problème, s'appelle l'*effort circonférenciel* qui agit sur la roue dentée. Comme nous le voyons, l'effort circonférenciel est égal au rapport du moment du couple de rotation au rayon de la roue dentée

$$Q_1 = \frac{m_1}{r_1} = \frac{m_2}{r_2}.$$

Chapitre IV

SYSTÈME DE FORCES ARBITRAIREMENT DISPOSÉES DANS UN PLAN

§ 21. Théorème de la translation d'une force. De nombreux problèmes de la statique, parmi lesquels les problèmes de la réduction d'un système de forces à sa plus simple expression, peuvent être résolus grâce au théorème suivant: *on ne change pas l'action d'une force sur un corps solide parfait en déplaçant cette force parallèlement à elle-même en un point quelconque du corps, à condition*

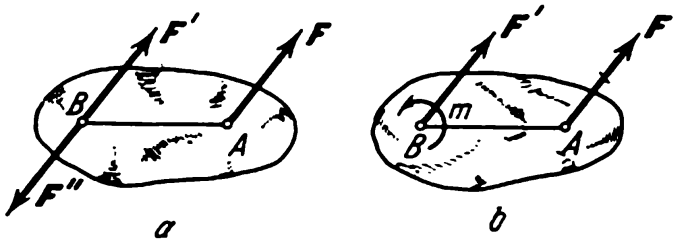


Fig. 51

d'ajouter un couple dont le moment est égal au moment de la force par rapport au point en lequel on désire la déplacer.

Soit une force F appliquée au point A d'un solide (fig. 51, *a*). L'action de cette force ne sera pas modifiée, si l'on applique en un point quelconque B du corps deux forces équilibrées F' et F'' telles que $F' = F$, $F'' = -F$. Le système de trois forces obtenu est précisément composé de la force F' égale à F, mais appliquée au point B, et du couple (F, F'') de moment

$$m = m_B\ (F). \tag{27}$$

Cette dernière égalité résulte de la formule (23). Le théorème est ainsi démontré. Le résultat obtenu peut encore être représenté comme sur la figure 51, *b* (sur cette figure la force F doit être considérée comme enlevée). Examinons quelques exemples d'application du théorème.

Exemple 1. Pour maintenir en équilibre une barre homogène AB de longueur $2a$ et de poids P il faut, de toute évidence, appliquer en son milieu C une force Q dirigée vers le haut et de module P (fig. 52, *a*). D'après le théorème ci-dessus on peut remplacer la force Q par la force Q' appliquée à l'extrémité A de la barre et par le couple de moment $m = Qa$. Si l'on diminue la longueur du bras de levier de ce couple jusqu'à la valeur h, il faut augmenter les forces qui le composent (fig. 52, *b*) de façon que l'on ait $Fh = Qa$. Donc, pour maintenir la barre par son extrémité A, il faut appliquer, outre la force Q', le couple

(F, F'). Ces considérations, qui résultent du théorème établi ci-dessus, sont directement « ressenties » par la main de la personne qui maintient la barre soit par son milieu (fig. 52, *a*), soit par son extrémité (fig. 52, *b*).

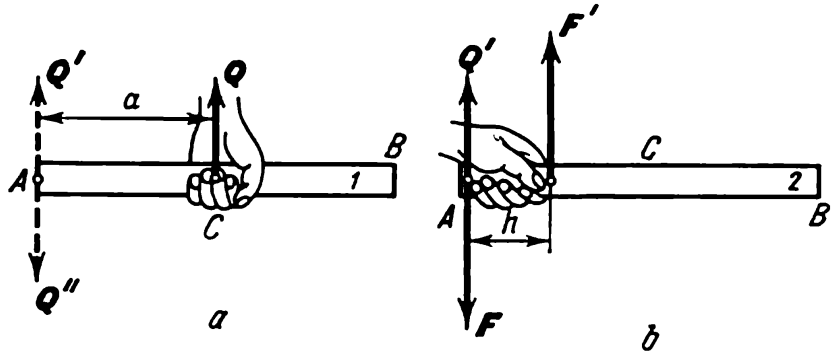


Fig. 52

Exemple 2. Sur le cylindre *1* de rayon r sont enroulés dans des sens opposés deux fils aux extrémités desquels sont appliquées les forces F et $F' = -F$ (fig. 53) ; sur le cylindre *2* de même rayon est enroulé un seul fil auquel est appliquée une force égale à $2F$. Etudions en quoi diffèrent les actions de ces forces.

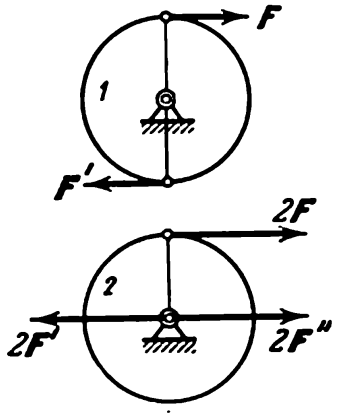


Fig. 53

Le cylindre *1* est soumis à un seul couple de forces (F, F'), de moment $2Fr$, qui fait tourner le cylindre. La force qui agit sur le cylindre *2* peut être remplacée par la force $2F'' = 2F$ appliquée à l'axe du cylindre et par le couple ($2F$, $2F'$). En définitive, nous trouvons que sur ce cylindre agissent : 1) un couple, de même moment $2Fr$ que dans le premier cas, qui fait tourner le cylindre, et 2) une force $2F''$ qui développe une pression sur l'axe du cylindre. Ainsi les deux cylindres tourneront de la même façon, mais tandis que l'axe du deuxième supportera une pression égale à $2F$, l'axe du premier ne supportera aucune pression.

§ 22. Réduction d'un système plan de forces à un centre donné. Soit un système arbitraire de forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ disposées dans un même plan et agissant sur un solide. Prenons dans ce plan un point arbitraire O que nous appellerons *centre de réduction* et, appliquant le théorème démontré au § 21, transportons toutes les forces au centre O (fig. 54, *a*). Le corps subira alors les actions d'un système de forces

$$F'_1 = F_1,\ F'_2 = F_2,\ \ldots,\ F'_n = F_n, \tag{28}$$

appliquées au centre O et d'un système de couples, dont les moments seront d'après la formule (27) :

$$m_1 = m_O(F_1),\quad m_2 = m_O(F_2),\ \ldots,\ m_n = m_O(F_n). \tag{28'}$$

Les forces appliquées au centre O peuvent être remplacées par une seule force $\boldsymbol{R}$ appliquée à ce même centre; de plus, $\boldsymbol{R} = \Sigma \boldsymbol{F}'_k$ ou, selon les égalités (28),

$$\boldsymbol{R} = \Sigma \boldsymbol{F}_k. \tag{29}$$

De même, selon le théorème sur la composition des couples, tous les couples peuvent être remplacés par un seul couple disposé dans

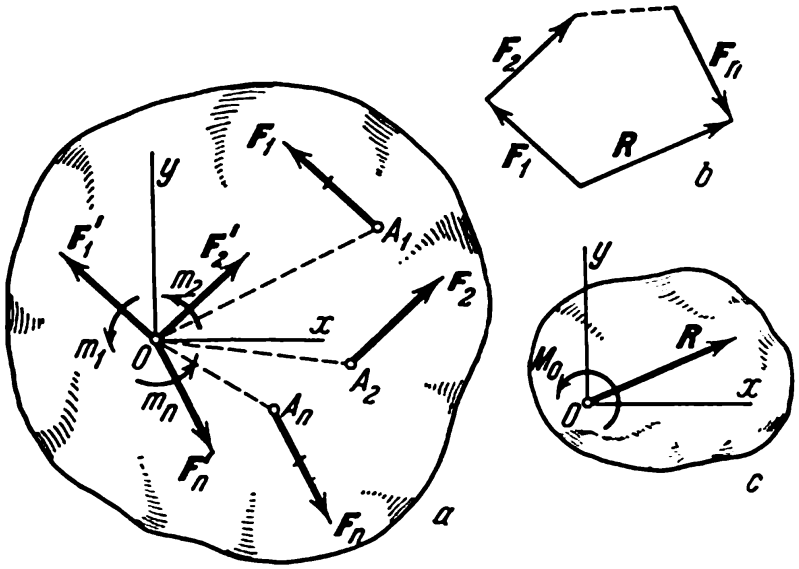


Fig. 54

le même plan. Le moment de ce couple sera $M_O = \Sigma m_k$ ou encore, d'après les égalités (28'):

$$M_O = \Sigma m_O (\boldsymbol{F}_k). \tag{30}$$

La grandeur $\boldsymbol{R}$, égale à la somme géométrique de toutes les forces du système, est, comme on le sait, *le vecteur principal du système*; la grandeur M_O, égale à la somme des moments de toutes les forces du système par rapport au centre O, est appelée *moment principal du système par rapport au centre O*. En définitive, nous avons démontré le théorème suivant: *tout système plan de forces agissant sur un corps solide parfait est remplacé, lorsqu'on réduit le système à un centre arbitraire O, par une force* $\boldsymbol{R}$ *égale au vecteur principal du système et appliquée au centre de réduction O, et par un couple de moment* M_O *égal au moment principal du système par rapport au centre O* (fig. 54, *c*).

Remarquons que la force $\boldsymbol{R}$ n'est pas la résultante du système de forces donné puisque, à elle seule, elle ne remplace pas le système.

Le théorème ci-dessus montre que deux systèmes de forces ayant des vecteurs principaux et des moments principaux égaux

sont statiquement équivalents. Donc, pour définir un système plan de forces, il suffit de donner son vecteur principal $\boldsymbol{R}$ et son moment principal M_O par rapport à un centre quelconque O.

La grandeur $\boldsymbol{R}$ peut être trouvée soit géométriquement par la construction du polygone des forces (fig. 54, *b*), soit analytiquement, par les formules (10) (voir § 10); la valeur de $\boldsymbol{R}$ ne dépend évidemment pas du choix du centre O. La grandeur M_O est déterminée par la formule (30). Lorsqu'on change la position du centre O, en général, la valeur de M_O change puisque les moments des forces composantes prennent des valeurs différentes. C'est pourquoi, lorsqu'on donne le moment principal, il faut obligatoirement désigner par rapport à quel centre il a été calculé.

Problème 18. Une poutre encastrée dans un mur (fig. 55, *a*) est soumise aux forces extérieures données $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, $\boldsymbol{F}_4$. Trouver les efforts intérieurs dans la section *ab* de la poutre [1].

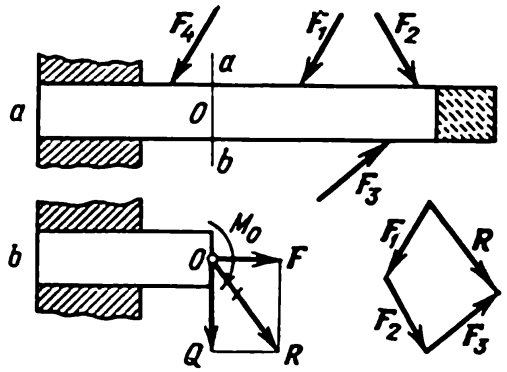


Fig. 55

Solution. Transportons les forces $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, agissant sur la partie de la poutre à droite de la section *ab*, au centre O de cette section. Appliquant le théorème démontré, remplaçons ces forces par une seule force $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3$ appliquée au centre O, et par un couple de moment $M_O = m_O(\boldsymbol{F}_1) + m_O(\boldsymbol{F}_2) + m_O(\boldsymbol{F}_3)$. On voit aisément que si on avait d'abord enlevé l'extrémité non chargée de la poutre (hachurée en pointillé), l'action mutuelle des parties de la poutre n'en aurait pas été modifiée pour autant. Mais après le transfert de toutes les forces au point O, toute la partie droite de la poutre se trouve non chargée; on peut l'enlever, et la poutre peut alors se représenter comme sur la figure 55, *b*. Décomposant la force $\boldsymbol{R}$ en les composantes $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ (le long de l'axe de la poutre et perpendiculairement à lui), nous trouvons que la partie gauche de la poutre, le long de la section *ab*, est soumise: 1) à la *force transversale* $\boldsymbol{Q}$ qui tend à déplacer les parties de la poutre adjacentes à la section *ab* le long de la ligne *ab*; 2) à la *force axiale* $\boldsymbol{P}$ qui provoque l'étirement (si son sens était contraire, la compression) de la poutre le long de son axe; 3) au couple de forces de moment M_O appelé *moment de flexion*, qui, dans le cas donné,

[1] Les efforts intérieurs dans la section *ab* sont les forces avec lesquelles les parties de la poutre, séparées par cette section, agissent l'une sur l'autre. D'après le théorème ci-dessus, le système de ces forces intérieures peut être remplacé par une force, appliquée, par exemple, au centre de la section, et par un couple.

soumet les fibres supérieures de la poutre à la traction et les fibres inférieures, à la compression. Selon l'axiome 4, la partie gauche de la poutre agira sur la partie droite avec des forces et avec un couple de même module mais de sens contraire.

Les efforts dans une section quelconque de la poutre se déterminent de la même façon.

Remarque. Les efforts cherchés peuvent également être trouvés en transférant les forces extérieures appliquées à la partie gauche de la poutre au centre O de la section; ainsi, les efforts dans la section ab, dus à l'action de la partie gauche de la poutre, seront déterminés. Mais dans ce cas il faut tenir compte du fait que les réactions d'encastrement sont des forces extérieures et il faut préalablement les déterminer en examinant l'équilibre de la poutre tout entière (§ 26). Il aurait fallu faire la même chose dans la solution exposée ci-dessus si la partie droite de la poutre n'avait pas été libre de contacts avec d'autres corps.

§ 23. Réduction d'un système plan de forces à sa plus simple expression. Le théorème démontré au § 22 permet de résoudre le problème de la réduction d'un système plan de forces à sa plus

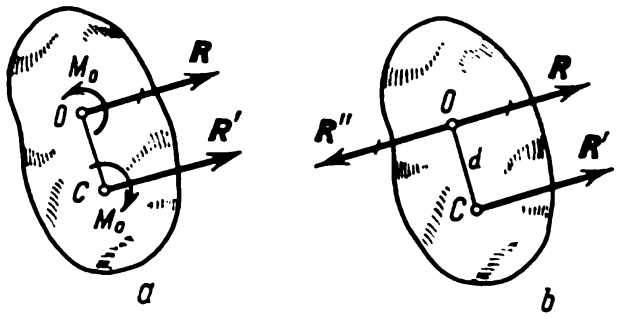


Fig. 56

simple expression. Le résultat dépendra des valeurs du vecteur principal $\boldsymbol{R}$ et du moment principal M_O de ce système.

1) Si pour un système de forces donné nous avons $\boldsymbol{R} = 0$ et $M_O = 0$, ce système est en équilibre. Le cas de l'équilibre sera étudié plus en détail dans le paragraphe suivant.

2) Si pour un système de forces donné, $\boldsymbol{R} = 0$, $M_O \neq 0$, ce système se réduit à un couple de moment $M_O = \Sigma m_O(\boldsymbol{F}_k)$. Dans ce cas la valeur de M_O ne dépend pas du choix du centre O car, dans le cas contraire, nous obtiendrions qu'un même système de forces puisse se remplacer par des couples non équivalents, ce qui est impossible.

3) Si pour un système de forces donné $\boldsymbol{R} \neq 0$, ce système se réduit à une résultante. Deux cas sont alors possibles.

a) $\boldsymbol{R} \neq 0$, $M_O = 0$. Dans ce cas le système se remplace immédiatement par une seule force, c'est-à-dire par la résultante $\boldsymbol{R}$ qui passe par le centre O.

b) $\boldsymbol{R} \neq 0$, $M_O \neq 0$. Dans ce cas (fig. 56, *a*), transférons la force $\boldsymbol{R}$ en un certain point C par rapport auquel son moment

vaut $-M_O$. Alors, comme on le sait, il s'ajoutera un couple de moment $-M_O$ qui équilibrera le couple de moment M_O et tout le système de forces se remplacera par une résultante $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R}$ passant par le point C. La position du point C, c'est-à-dire la distance $d = OC$ ($OC \perp \boldsymbol{R}$), se déterminera par l'égalité

$$Rd = |M_O|. \tag{31}$$

Le résultat obtenu peut être exprimé de la façon suivante: si, en réduisant un système de forces au centre O, on obtient une

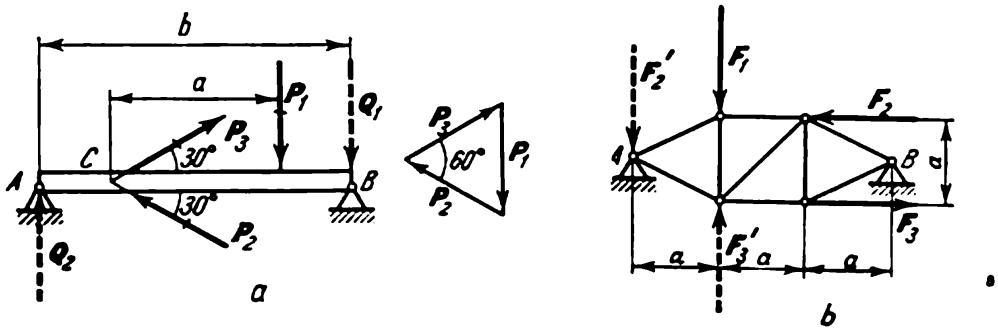


Fig. 57

force $\boldsymbol{R}$ et un couple de moment M_O, on peut remplacer le système par une seule résultante $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R}$ passant à une distance de point O telle que $m_O(\boldsymbol{R}') = M_O$. L'ordre dans lequel s'effectuent les calculs est montré dans le problème 20.

On peut obtenir ce résultat d'une autre façon en représentant le couple de moment M_O comme le montre la figure 56, *b* et en prenant les forces du couple $\boldsymbol{R}'$ et $\boldsymbol{R}''$ numériquement égales à R. Dans ce cas, le bras de levier du couple, c'est-à-dire $d = OC$, se déterminera également par l'égalité (31). Les forces $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{R}''$ étant équilibrées, nous les supprimons et obtenons le système réduit à la résultante $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R}$ passant par le point C; nous aurons obtenu ainsi le même résultat que dans l'opération précédente.

Les cas examinés montrent qu'un système plan de forces, s'il ne se trouve pas en équilibre, se réduit soit à une seule résultante (lorsque $\boldsymbol{R} \neq 0$), soit à un seul couple (lorsque $\boldsymbol{R} = 0$).

Problème 19. Réduire à leurs plus simples expressions les systèmes de forces actives qui agissent sur la poutre et sur la ferme représentées sur les figures 57, *a* et *b*, si toutes les forces sont numériquement égales entre elles; déterminer les efforts sur les supports.

Solution. 1) Le polygone construit avec les forces $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$, qui agissent sur la poutre (fig. 57, *a*), est fermé; donc $\boldsymbol{R} = 0$. La somme des moments de toutes les forces par rapport à n'importe quel point (par exemple, par rapport au point C) est égale à $-Pa$, où P est le module de chacune des forces. Donc, le système de forces donné se réduit à un couple de moment $m = -Pa$. Disposant

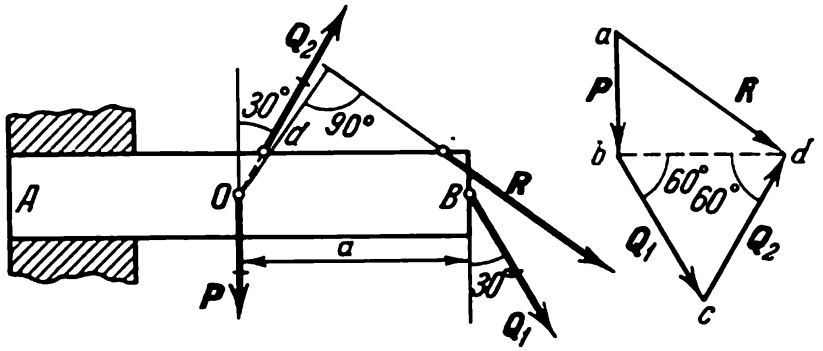
ce couple comme le montre le pointillé sur la figure, nous concluons que les forces P_1, P_2, P_3 exercent sur les supports des efforts Q_1 et Q_2 numériquement égaux à $\frac{Pa}{b}$.

2) Remarquant que les forces F_2 et F_3 (fig. 57, *b*) forment un couple, transportons ce dernier dans la position montrée sur la figure par le pointillé. Alors les forces F_1, F_3' s'équilibrent mutuellement et tout le système de forces se réduit à la résultante $R = F_2'$.

Nous en concluons que l'action des forces F_1, F_2, F_3 est une pression verticale sur le support A ; quant au support B, il n'est pas chargé.

Problème 20. Trouver la résultante des forces qui agissent sur la poutre (fig. 58), si $P = 3$ tf, $Q_1 = Q_2 = Q = 4$ tf, et si la distance $OB = a = 0{,}8$ m.

S o l u t i o n. Construisant avec les forces P, Q_1, Q_2 le polygone des forces, nous trouvons que la force R (le vecteur principal du système) a un



F i g. 58

module $R = 5$ tf puisque dans le polygone des forces $be = 2Q \cos 60° = 4$ tf; $ab = 3$ tf. Ensuite, prenant pour centre des moments le point O où se coupent les forces P et Q_2, nous calculons le moment principal du système $M_O = m_O(Q_1) = -aQ \cos 30° = -1{,}6\sqrt{3}$ mt. Alors, d'après la formule (31),

$$d = \frac{|M_O|}{R} = 0{,}32\sqrt{3} \approx 0{,}55 \text{ m}.$$

Menant du point O une droite perpendiculaire à la direction de R et portant sur elle le segment de longueur d nous trouverons la ligne d'action de la résultante. Puisque $M_O < 0$, la résultante passe à droite du point O (le moment de R par rapport au point O doit être négatif).

§ 24. Conditions d'équilibre d'un système plan de forces. Pour qu'un système plan de forces soit en équilibre il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient remplies simultanément :

$$R = 0, \quad M_O = 0. \tag{32}$$

Ici O est un point quelconque du plan puisque, lorsque $R = 0$, la grandeur M_O ne dépend pas du choix du centre O (voir § 23, 2).

Les conditions (32) sont nécessaires car, si l'une d'elles n'est pas remplie, le système de forces agissant sur le corps se réduit

soit à une résultante (lorsque $\boldsymbol{R} \neq 0$), soit à un couple (lorsque $M_O \neq 0$) et, par conséquent, n'est pas équilibré. De même, les conditions (32) sont suffisantes car, lorsque $\boldsymbol{R}=0$, le système ne peut se réduire qu'à un couple de moment M_O et puisque $M_O = 0$, l'équilibre a effectivement lieu.

Trouvons les conditions d'équilibre analytiques qui découlent des égalités (32). Elles peuvent être obtenues sous trois formes différentes.

1. Expression fondamentale des conditions d'équilibre. Les grandeurs R et M_O sont définies par les égalités:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2},$$

où $R_x = \Sigma F_{kx}$, $R_y = \Sigma F_{ky}$ et $M_O = \Sigma m_O(\boldsymbol{F}_k)$. Mais R ne peut être égale à zéro que si $R_x = 0$ et $R_y = 0$. Par conséquent, les conditions (32) seront remplies si

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum m_O(\boldsymbol{F}_k) = 0. \tag{33}$$

Les égalités (33) traduisent les conditions d'équilibre analytiques suivantes: *pour qu'un système plan de forces soit en équilibre, il faut et il suffit que les sommes des projections de toutes les forces sur chacun des axes de coordonnées et la somme de leurs moments par rapport à un centre quelconque du plan d'action des forces soient égales à zéro.* Les équations (33) expriment en même temps les conditions d'équilibre nécessaires d'un solide libre soumis à l'action d'un système plan de forces. Du point de vue mécanique, les deux premières équations expriment les conditions nécessaires pour que le corps ne se déplace pas le long des axes de coordonnées, et la troisième est la condition de l'absence de rotation dans le plan Oxy.

2. Deuxième expression des conditions d'équilibre: *pour qu'un système plan de forces soit en équilibre, il faut et il suffit que les sommes des moments de toutes ces forces par rapport à deux centres quelconques A et B et la somme de leurs projections sur l'axe Ox, non perpendiculaire à la droite AB, soient égales à zéro*:

$$\sum m_A(\boldsymbol{F}_k) = 0, \quad \sum m_B(\boldsymbol{F}_k) = 0, \quad \sum F_{kx} = 0. \tag{34}$$

Que ces conditions soient nécessaires est évident, car si l'une quelconque d'entre elles n'était pas remplie, nous aurions soit $\boldsymbol{R} \neq 0$, soit $M_A \neq 0$ ($M_B \neq 0$), et l'équilibre n'aurait pas lieu. Démontrons que ces conditions sont suffisantes. Si, pour un système de forces donné, seules sont remplies les deux premières conditions (34), on aura pour ce système $M_A = 0$ et $M_B = 0$. D'après ce qui a été dit aux § 23, un tel système de forces peut ne pas se trouver en équilibre et avoir une résultante $\boldsymbol{R}$ qui passe simultanément par

les points A et B[1] (fig. 59). Mais d'après la troisième condition on doit avoir $R_x = \Sigma F_{kx} = 0$. Puisque l'axe Ox n'est pas perpendiculaire à AB, la dernière condition ne peut être remplie que lorsque la résultante $R = 0$, c'est-à-dire lorsque l'équilibre a lieu.

3. Troisième expression des conditions d'équilibre (*équations des trois moments*): *pour qu'un système plan de forces soit en équilibre, il faut et il suffit que les sommes des*

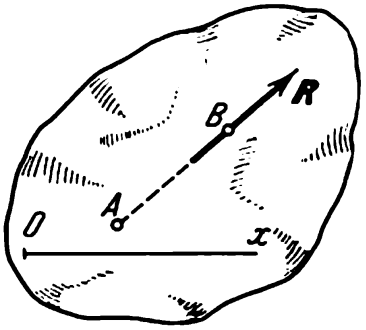


Fig. 59

moments de toutes ces forces par rapport à trois centres quelconques A, B et C, non alignés, soient égales à zéro:

$$\Sigma m_A (F_k) = 0, \quad \Sigma m_B (F_k) = 0, \quad \Sigma m_C (F_k) = 0. \qquad (35)$$

Comme dans le cas précédent, la nécessité de ces conditions est évidente. Les conditions (35) sont suffisantes car, si le système de forces donné ne se trouvait pas en équilibre, les trois conditions étant simultanément remplies, il devrait se réduire à une résultante passant à la fois par les points A, B et C, ce qui est impossible puisque ces points ne sont pas situés sur une même droite. Donc, si les conditions (35) sont remplies, l'équilibre a lieu.

Dans tous les cas examinés, on obtient trois conditions d'équilibre pour un système plan de forces. Nous estimerons que les conditions (33) sont les conditions fondamentales, car elles n'entraînent aucune restriction quant au choix des axes de coordonnées et du centre des moments.

Si un corps subit, outre l'action d'un système plan de forces $F_1, F_2, \ldots, F$, l'action d'un système coplanaire de couples de moments $m_1, m_2, \ldots, m_s$, les couples ne feront pas partie des équations de projections lorsqu'on posera les conditions d'équilibre, car la somme des projections des forces d'un couple sur un axe quelconque est, évidemment, égale à zéro. Par contre, dans les équations des moments, aux moments des forces s'ajouteront algébriquement les moments des couples, car la somme des moments des forces d'un couple par rapport à un centre quelconque est égale au moment du couple (§ 18, formule 24). Ainsi, lorsqu'un corps subira l'action de systèmes coplanaires de forces et de

[1] Cela résulte du cas 3, *a*) examiné au § 23.

couples, les conditions d'équilibre (33) s'exprimeront de la façon suivante:

$$\sum F_{kx}=0, \quad \sum F_{ky}=0, \quad \sum m_O(F_k)+\sum m_i=0. \tag{36}$$

Les conditions (34) et (35) se transforment de façon analogue.

§ 25. Equilibre d'un système plan de forces parallèles. Dans le cas où toutes les forces qui agissent sur un corps sont parallèles nous pouvons diriger l'axe Ox perpendiculairement aux forces et l'axe Oy parallèlement à elles (fig. 60). Alors la projection de

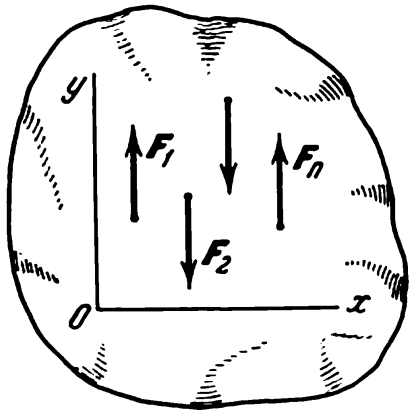


Fig. 60

chacune des forces sur l'axe Ox sera égale à zéro et la première des égalités (33) deviendra une identité $0 = 0$. Pour des forces parallèles, il restera donc deux conditions d'équilibre:

$$\sum F_{ky}=0, \quad \sum m_O(F_k)=0, \tag{37}$$

où l'axe Oy est parallèle aux forces.

En partant des égalités (34), on peut aussi obtenir pour des forces parallèles les conditions d'équilibre suivantes:

$$\Sigma m_A(F_k)=0, \quad \Sigma m_B(F_k)=0, \tag{38}$$

où les points A et B ne doivent pas se trouver sur une droite parallèle aux forces.

§ 26. Résolution des problèmes. En résolvant les problèmes de ce chapitre, il faut tenir compte des indications générales données au § 13.

Nous soulignons une fois de plus qu'au début on doit déterminer quel est précisément le corps dont il est souhaitable d'examiner l'équilibre dans le problème donné. Puis, isolant ce corps et le considérant comme libre, on représentera toutes les forces actives qui agissent sur lui, de même que toutes les réactions provenant des liaisons éliminées.

Ensuite, on écrira les conditions d'équilibre en se servant de l'expression qui donnera le système d'équations le plus simple (le système d'équations sera le plus simple si chacune d'elles ne contient qu'une inconnue).

Pour simplifier les équations, il faut (à moins que cela ne complique les calculs) : a) *mener un axe de coordonnées perpendiculairement à l'une quelconque des forces inconnues lorsqu'on écrit les équations*

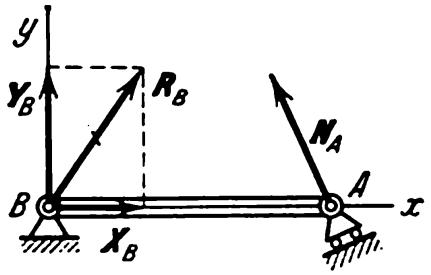


Fig. 61

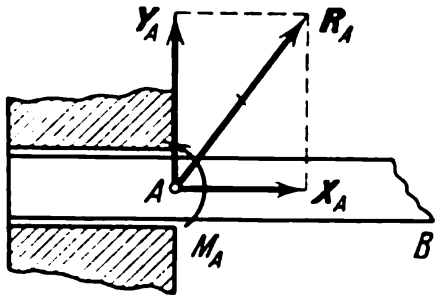


Fig. 62

de projection ; b) *choisir le centre des moments au point d'intersection du plus grand nombre de forces inconnues lorsqu'on écrit les équations des moments.*

Pour le calcul des moments, il est quelquefois commode de décomposer la force donnée en deux composantes et de se servir du théorème de Varignon.

La résolution de nombreux problèmes de la statique revient à déterminer les réactions d'appuis provenant des fixations des poutres, des fermes de ponts, etc. Dans la pratique, on rencontre habituellement les trois types de fixations suivants (outre ceux qui ont été examinés au § 4) :

1. Appui mobile (à rouleaux) articulé (fig. 61, appui A). La réaction N_A d'un tel appui est dirigée le long de la normale à la surface sur laquelle s'appuient ses rouleaux.

2. Appui fixe articulé (fig. 61, appui B). La réaction R_B d'un tel appui passe par l'axe de la charnière et peut prendre n'importe quelle direction dans le plan de la figure. Dans la résolution des problèmes, nous représenterons la réaction R_B à l'aide de ses composantes X_B et Y_B parallèles aux axes de coordonnées. Si, ayant résolu un problème, nous avons trouvé X_B et Y_B, la réaction R_B sera de ce fait déterminée ; son module vaudra $R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$.

On se sert du procédé de fixation, montré sur la figure 61, pour éviter qu'au sein de la poutre AB ne naissent des efforts supplémentaires dus à la variation de sa longueur, variation provoquée par un changement de température ou par une flexion.

3. Encastrement rigide (fig. 62). Dans ce cas, l'action des plans d'appui sur l'extrémité encastrée de la poutre se traduit par un système de forces de réaction réparties. Considérant ces forces comme étant réduites au centre A, nous pouvons les remplacer par une seule force $\boldsymbol{R}_A$ a priori inconnue, appliquée à ce centre, et par un couple de moment M_A a priori inconnu. On peut, à son tour, représenter la force $\boldsymbol{R}_A$ à l'aide de ses composantes $\boldsymbol{X}_A$ et $\boldsymbol{Y}_A$. Ainsi, pour déterminer la réaction d'un encastrement rigide, il faut déterminer trois inconnues X_A, Y_A et M_A.

La question des directions des réactions dans le cas des autres types de liaisons a été examinée au § 4.

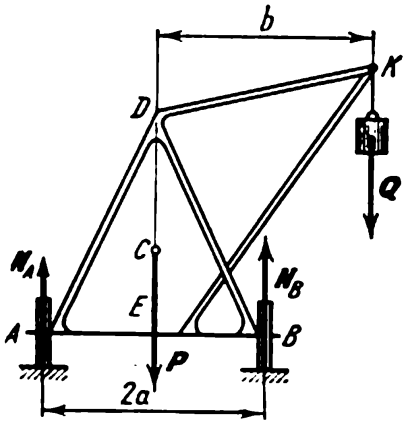


Fig. 63

Problème 21. Déterminer les forces avec lesquelles les roues A et B de la grue schématiquement représentée sur la figure 63 agissent sur les rails. Poids de la grue $P = 4$ tf; son centre de gravité se trouve sur la ligne DE. Poids de la charge soulevée $Q = 1$ tf, portée de la grue $b = 3{,}5$ m, distance $AB = 2a = 2{,}5$ m.

Solution. Examinons l'équilibre de toute la grue. Si l'on considère la grue comme libre, elle subira l'action des forces données $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ et des réactions $\boldsymbol{N}_A$ et $\boldsymbol{N}_B$. Ecrivons, pour le système de forces parallèles obtenu, les conditions d'équilibre (37), en prenant comme centre des moments le point A et en projetant les forces sur l'axe vertical. Nous obtenons:

$$-Pa + N_B \cdot 2a - Q(a + b) = 0,$$
$$N_A + N_B - P - Q = 0.$$

Résolvant ces équations, nous trouvons:

$$N_A = \frac{P}{2} - \frac{Q}{2}\left(\frac{b}{a} - 1\right) = 1{,}1 \text{ tf};$$

$$N_B = \frac{P}{2} + \frac{Q}{2}\left(\frac{b}{a} + 1\right) = 3{,}9 \text{ tf}.$$

Pour vérifier cette solution, écrivons l'équation des moments par rapport au centre B:

$$-N_A 2a + Pa - Q(b - a) = 0.$$

Substituant ici la valeur trouvée pour N_A, nous voyons que l'équation est satisfaite. Les pressions des roues sur les rails sont numériquement égales à N_A et N_B mais dirigées vers le bas.

La solution obtenue ci-dessus montre que pour

$$Q = \frac{a}{b - a} P = 2{,}22 \text{ tf}$$

la réaction N_A s'annule, c'est-à-dire que la roue gauche ne presse plus sur le rail. Si on augmente alors la charge Q, la grue commence à se renverser. La plus grande charge Q pour laquelle la grue conserve l'équilibre est déterminée, évidemment, par la condition $\sum m_B(\boldsymbol{F}_k) = 0$.

Problème 22. Une barre homogène AB de poids P kgf s'appuie par son extrémité A sur un plan horizontal lisse et contre la saillie D, et par son extrémité B sur un plan incliné qui forme avec l'horizontale l'angle α (fig. 64). La barre elle-même est inclinée par rapport à l'horizontale sous un angle β. Déterminer les forces de pression de la barre sur les deux plans et sur la saillie D.

Solution. Examinons l'équilibre de la barre AB considérée comme libre. Les forces qui agissent alors sur elle sont: la force donnée P appliquée au milieu de la barre et les réactions R, N_1, N_2 dirigées perpendiculairement aux plans correspondants. Menons les axes de coordonnées (voir fig. 64) et

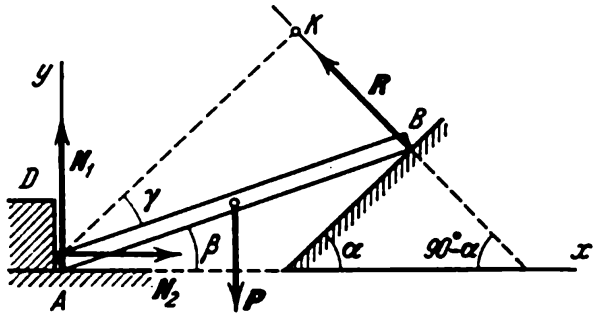


Fig. 64

établissons les conditions d'équilibre (33) en prenant les moments par rapport au centre A où se coupent deux forces inconnues. Préalablement nous calculons les projections de chacune des forces sur les axes de coordonnées et leurs moments par rapport au centre A et nous portons ces grandeurs dans un tableau [1]; introduisons les notations suivantes: $AB = 2a$ et $\angle KAB = \gamma$ (AK est le bras de levier de la force R par rapport au centre A).

F_k	N_1	N_2	P	R
F_{kx}	0	N_2	0	$-R\sin\alpha$
F_{ky}	N_1	0	$-P$	$R\cos\alpha$
$m_A(F_k)$	0	0	$-Pa\cos\beta$	$R2a\cos\gamma$

Ecrivons les conditions d'équilibre:

$$N_2 - R\sin\alpha = 0,$$
$$N_1 - P + R\cos\alpha = 0,$$
$$-Pa\cos\beta + 2Ra\cos\gamma = 0.$$

De la dernière équation nous tirons:

$$R = \frac{P\cos\beta}{2\cos\gamma}.$$

Puisque la droite AK est parallèle au plan incliné, $\angle KAx = \alpha$, d'où $\gamma = \alpha - \beta$. En définitive:

$$R = \frac{P\cos\beta}{2\cos(\alpha-\beta)}.$$

[1] Voir la note en bas de la page 40.

Résolvons maintenant les deux premières équations; nous obtenons:

$$N_1 = P\left[1 - \frac{\cos\alpha\cos\beta}{2\cos(\alpha-\beta)}\right], \quad N_2 = P\frac{\sin\alpha\cos\beta}{2\cos(\alpha-\beta)}.$$

Les pressions sur les plans sont égales par leurs modules aux réactions correspondantes et dirigées dans des sens opposés.

Pour la vérification du calcul des grandeurs N_1 et N_2, on peut poser les équations des moments par rapport aux points où se coupent les lignes d'action des forces R et N_2 et des forces R et N_1.

De la solution ci-dessus on peut tirer la *conclusion* suivante: lorsque, pour déterminer les projections ou les moments des forces, il est nécessaire de connaître une grandeur quelconque (une longueur ou un angle) non donnée par

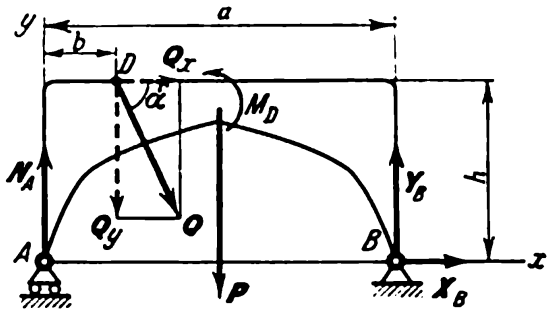


Fig. 65

les conditions du problème, il faut désigner cette grandeur par une lettre arbitraire et la faire entrer dans les équations de l'équilibre. Si, au cours de la résolution du problème, la grandeur introduite ne s'élimine pas, il faut l'exprimer à l'aide des grandeurs données.

Problème 23. Une arche symétrique (fig. 65) est chargée par un système de forces qui se réduit à la force $Q = 4$ tf appliquée au point D, et au couple de moment $M_D = 12$ mt. Le poids de l'arche est $P = 8$ tf; les dimensions sont: $a = 10$ m, $b = 2$ m, $h = 3$ m, $\alpha = 60°$. Déterminer les réactions de l'appui articulé fixe B et de l'appui à rouleaux A.

Solution. Examinons l'équilibre de toute l'arche considérée comme libre. Alors sur l'arche agiront les forces données P et Q et le couple de moment M_D ainsi que les réactions des appuis N_A, X_B et Y_B (nous représentons la réaction de l'appui articulé fixe à l'aide de ses deux composantes, comme sur la figure 61). Dans ce problème il est plus commode de poser les conditions d'équilibre sous la forme (34), en prenant les moments par rapport aux centres A et B et les projections sur l'axe Ax. Alors chaque équation ne contiendra qu'une seule force inconnue. Calculons les moments et les projections de chacune des forces et portons-les dans un tableau. Pour calculer les moments de la force Q, nous la décomposons en ses composantes Q_x, Q_y et nous nous servons du théorème de Varignon.

F_k	N_A	P	X_B	Y_B	Q	M_D
F_{kx}	0	0	X_B	0	$Q\cos\alpha$	0
$m_A(F_k)$	0	$-P\frac{a}{2}$	0	$Y_B a$	$-\lvert Q_x\rvert h - \lvert Q_y\rvert b$	M_D
$m_B(F_k)$	$-N_A a$	$P\frac{a}{2}$	0	0	$-\lvert Q_x\rvert h + \lvert Q_y\rvert (a-b)$	M_D

Ecrivons les conditions d'équilibre avec $|Q_x| = Q\cos\alpha$, $|Q_y| = Q\sin\alpha$. Nous obtenons:

$$X_B + Q\cos\alpha = 0, \tag{a}$$

$$Y_B a - P\frac{a}{2} - hQ\cos\alpha - bQ\sin\alpha + M_D = 0, \tag{b}$$

$$-N_A a + P\frac{a}{2} - hQ\cos\alpha + (a-b)\,Q\sin\alpha + M_D = 0. \tag{c}$$

Résolvant ces équations, nous trouvons:

$$X_B = -Q\cos\alpha = -2 \text{ tf},$$

$$Y_B = \frac{P}{2} + Q\frac{b\sin\alpha + h\cos\alpha}{a} - \frac{M_D}{a} \approx 4{,}09 \text{ tf},$$

$$N_A = \frac{P}{2} + Q\frac{(a-b)\sin\alpha - h\cos\alpha}{a} + \frac{M_D}{a} \approx 7{,}37 \text{ tf}.$$

La grandeur X_B est négative. Donc la composante X_B a le sens contraire à celui qui est montré sur la figure, ce que l'on aurait pu prévoir. La réaction complète de l'appui B est la somme géométrique des forces X_B et Y_B. Numériquement

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} \approx 4{,}55 \text{ tf}.$$

Si le couple qui agit sur l'arche a le sens de rotation contraire à celui qui est montré sur la figure 65, nous aurons $M_D = -12$ mt. Dans ce cas nous obtiendrons $Y_B = 6{,}49$ tf, $N_A = 4{,}97$ tf; la grandeur X_B ne sera pas modifiée.

Pour vérifier les résultats, écrivons l'équation des projections sur l'axe Ay:

$$N_A + Y_B - P - Q\sin\alpha = 0. \tag{d}$$

Introduisant dans cette équation les valeurs trouvées pour N_A et Y_B, nous nous convaincrons qu'elles satisfont à cette équation (il faut faire la substitution avec les données littérales pour vérifier les formules, et avec les données numériques pour vérifier les calculs).

Une telle vérification ne permet pas toujours de trouver les fautes éventuelles dues à une détermination erronée des projections ou des moments des forces perpendiculaires à l'axe Ay. C'est pourquoi il faut soit vérifier une fois de plus cette partie des calculs, soit écrire encore une équation, par exemple l'équation des moments par rapport au centre D.

Notons encore ce qui suit. D'après ce qu'on a dit au sujet de l'application des conditions (34), il faut, dans notre cas, diriger l'axe des projections non perpendiculairement à la ligne AB. Si, négligeant cela, nous avions écrit une troisième équation aux projections sur l'axe Ay, nous aurions obtenu un système d'équations (b), (c), (d) ne contenant que deux inconnues N_A et Y_B (dans ce système l'une des équations serait dérivée des deux autres). En définitive, nous ne pourrions pas déterminer la réaction X_B.

Problème 24. Une barre AB de longueur $b = 0{,}8$ m et de poids $P = 100$ kgf est rigidement encastrée dans un mur et forme avec lui un angle $\alpha = 60°$ (fig. 66, *a*). A l'intérieur de l'angle DAB repose un cylindre, de poids $Q = 180$ kgf, tangent à la barre au point E tel que $AE = a = 0{,}3$ m. Déterminer la réaction de l'encastrement.

Solution. Examinons l'équilibre de la barre considérée comme libre. Alors agissent sur la barre: la force P appliquée au milieu de la barre, la force de pression F du cylindre appliquée au point E perpendiculairement à la barre (mais en aucun cas la force Q qui est appliquée au cylindre et non à la barre!)

et la réaction de l'encastrement que nous représentons à l'aide des composantes X_A, Y_A et du couple de moment M_A (voir fig. 62).

Pour pouvoir écrire les conditions d'équilibre (33), calculons les projections de toutes les forces sur les axes de coordonnées et leurs moments par rapport au centre A (voir le tableau).

F_k	X_A	Y_A	F	P	M_A
F_{kx}	X_A	0	$F\cos\alpha$	0	0
F_{ky}	0	Y_A	$-F\sin\alpha$	$-P$	0
$m_A(F_k)$	0	0	$-Fa$	$-P\frac{b}{2}\sin\alpha$	M_A

Pour déterminer la pression F, décomposons la force Q, appliquée au centre du cylindre, en les composantes F et N perpendiculaires respectivement à la barre et au mur (fig. 66, *b*). Du parallélogramme obtenu nous déduisons:

$$F=\frac{Q}{\sin\alpha}.$$

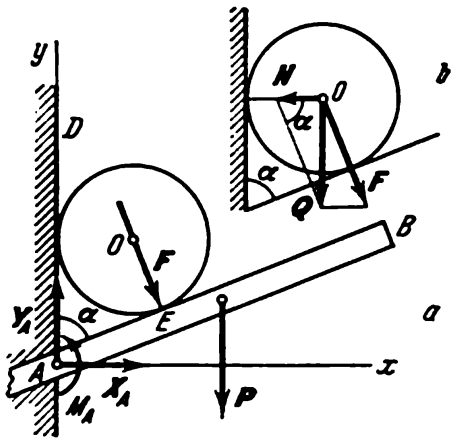


Fig. 66

Maintenant, posant les conditions d'équilibre et remplaçant simultanément F par sa valeur calculée ci-dessus, nous obtenons:

$$X_A + Q\operatorname{cotg}\alpha = 0,$$
$$Y_A - Q - P = 0,$$
$$M_A - Q\frac{a}{\sin\alpha} - P\frac{b}{2}\sin\alpha = 0.$$

Résolvant ces équations, nous trouvons:

$$X_A = -Q\operatorname{cotg}\alpha = -103{,}8 \text{ kgf},$$
$$Y_A = P + Q = 280 \text{ kgf},$$
$$M_A = Q\frac{a}{\sin\alpha} + P\frac{b}{2}\sin\alpha = 96{,}9 \text{ kgm}.$$

La réaction de l'encastrement se compose de la force $R_A=\sqrt{X_A^2+Y_A^2}$ et du couple de moment M_A.

Pour finir, soulignons une fois de plus la conclusion fondamentale qui résulte de la solution des problèmes: les conditions d'équilibre ne contiennent que les forces qui sont *directement appliquées* au corps dont on examine l'équilibre.

Problème 25. A un poteau avec traverse (fig. 67) sont fixées deux poulies C et D sur lesquelles passe une corde retenant une charge de poids $Q = 240$ kgf. L'extrémité inférieure de la corde est fixée au point B. Le poteau est maintenu en équilibre par le câble EE_1. Négligeant le poids du poteau et de sa traverse et le frottement dans les poulies, déterminer la tension dans le câble et la réaction de l'encastrement A qui sera considéré comme articulé (c'est-à-dire comme non rigide, permettant au poteau de pivoter autour du point A). La distance de la poulie C au poteau est égale à 1 m: les autres dimensions sont données sur le dessin.

Solution. Supprimant les liaisons, examinons l'équilibre de toute la construction, c'est-à-dire du poteau avec traverse, des poulies et de la partie $KDCM$ de la corde qui coulisse sur les poulies (voir problème 10 ; la construction est rigide et peut être considérée comme un seul corps solide parfait). Les forces extérieures suivantes agissent sur la construction : le poids de la charge Q, la tension F de la partie DB de la corde et les réactions des liaisons T, X_A, Y_A. Nous ne représentons pas sur la figure les forces intérieures parce qu'elles sont mutuellement équilibrées. Puisqu'il n'y a pas de frottement dans les poulies, la tension de la corde est partout la même et de module $F = Q$.

Calculons les projections de toutes les forces sur les axes de coordonnées et leurs moments par rapport au centre A ; pour cela introduisons les angles α et β (voir le tableau) :

F_k	Q	F	T	X_A	Y_A
F_{kx}	0	$F\cos\alpha$	$-T\cos\beta$	X_A	0
F_{ky}	$-Q$	$-F\sin\alpha$	$-T\sin\beta$	0	Y_A
$m_A(F_k)$	$-Q\cdot 1{,}0$	$-F\cdot 0{,}9\sin\alpha$	$T\cdot 1{,}2\sin\beta$	0	0

Des triangles rectangles AEE_1 et ADB nous déduisons que $EE_1 = 2{,}0$ m, $DB = 1{,}5$ m ; d'où : $\sin\alpha = \sin\beta = 0{,}8$, $\cos\alpha = \cos\beta = 0{,}6$. Donc, dans notre cas, $\alpha = \beta$. Maintenant écrivons les conditions d'équilibre tout en remplaçant les fonctions trigonométriques par leurs valeurs numériques et en tenant compte de l'égalité $F = Q$. Nous obtenons :

$$0{,}6\,Q - 0{,}6\,T + X_A = 0,$$
$$-Q - 0{,}8\,Q - 0{,}8\,T + Y_A = 0,$$
$$-1{,}0\,Q - 0{,}72\,Q + 0{,}96\,T = 0.$$

Résolvant ces équations, nous trouvons :

$$T = \frac{43}{24}\,Q = 430 \text{ kgf},$$
$$X_A = \frac{19}{40}\,Q = 114 \text{ kgf},$$
$$Y_A = \frac{97}{30}\,Q = 776 \text{ kgf}.$$

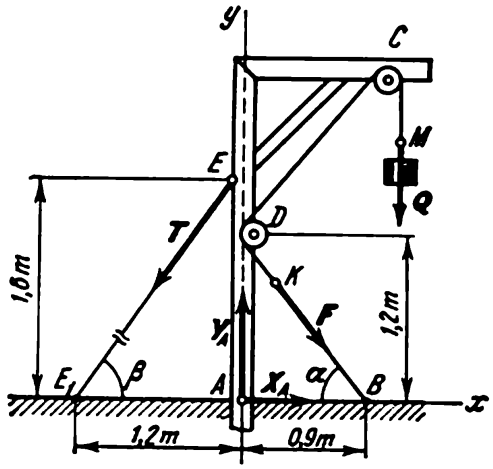


Fig. 67

Attirons l'attention sur les conclusions suivantes : 1) lorsqu'on établit les conditions d'équilibre, toute construction, qui, rendue libre des liaisons, reste rigide, peut être considérée comme un corps solide parfait; 2) les forces intérieures qui agissent sur des parties de la construction (dans le problème considéré les tensions de la partie DC de la corde agissant sur les poulies C et D) n'entrent pas dans les conditions d'équilibre parce que ce sont des forces mutuellement équilibrées.

§ 27. Equilibre des systèmes de corps. Le calcul statique des constructions revient très souvent à examiner les conditions d'équilibre d'une construction composée d'un système de corps liés les uns

aux autres. Les liaisons qui réunissent les parties d'une construction seront appelées *intérieures* pour les distinguer des liaisons *extérieures* qui fixent la construction à des corps qui n'en font pas partie (par exemple, à des appuis).

Si après le rejet des liaisons extérieures (des appuis) la construction reste rigide, les problèmes de statique se résolvent pour elle comme pour un corps solide parfait. Des exemples semblables ont été examinés dans les problèmes 23 et 25 (voir fig. 65 et 67).

Cependant on peut rencontrer des constructions qui, après le rejet des liaisons extérieures, perdent la rigidité. Citons comme

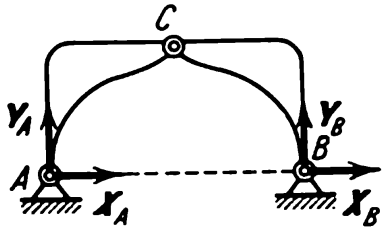


Fig. 68

exemple l'arche à trois charnières (fig. 68). Si l'on rejette les appuis A et B, l'arche ne sera pas rigide : ses parties pourront tourner autour de la charnière C.

Selon le principe de solidification, le système de forces agissant sur une telle construction doit, à l'équilibre, satisfaire aux conditions d'équilibre d'un corps solide. Mais comme on l'a déjà dit, ces conditions sont nécessaires, et non pas suffisantes, et c'est pourquoi elles ne permettront pas de déterminer toutes les inconnues. Pour résoudre le problème, il sera nécessaire d'examiner en outre l'équilibre d'une ou de plusieurs parties de la construction.

Par exemple, posant les conditions d'équilibre statique pour les forces agissant sur une arche à trois charnières (voir fig. 68), nous obtiendrons trois équations avec quatre inconnues X_A, Y_A, X_B, Y_B. Examinant les conditions d'équilibre de sa moitié gauche (ou droite), nous obtiendrons encore trois équations contenant deux nouvelles inconnues X_C, Y_C qui ne sont pas représentées sur la figure 68. Résolvant le système de six équations, nous trouverons les six inconnues.

Un autre procédé de résolution des problèmes semblables consiste à démembrer dès le début la construction en des corps séparés et à établir les conditions d'équilibre pour chacun des corps en le considérant comme libre. Alors, les réactions des liaisons intérieures seront deux à deux égales par leurs modules et dirigées dans des sens opposés. Pour une construction composée de n corps sur chacun desquels agit un système plan de forces arbitraire, on obtiendra ain-

si $3n$ équations permettant de déterminer $3n$ inconnues (pour d'autres systèmes de forces, le nombre des équations changera en conséquence).

Un exemple d'un tel procédé de résolution est examiné plus bas, au problème 27. Si le nombre des réactions inconnues dépasse le nombre des équations dont font partie ces réactions, le problème est statiquement indéterminé.

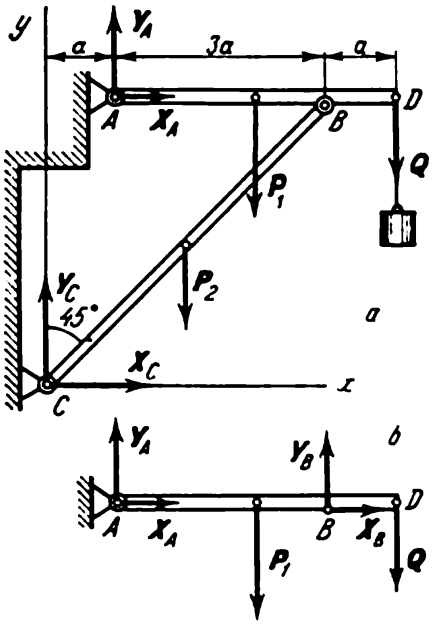


Fig. 69

Problème 26. Une console est composée d'une barre horizontale AD (fig. 69, *a*) de poids $P_1 = 15$ kgf, articulée au mur, et d'une contre-fiche CB de poids $P_2 = 12$ kgf qui est également articulée à la barre AD et au mur (toutes les dimensions sont données sur la figure). A l'extrémité D de la barre est suspendue une charge de poids $Q = 30$ kgf. Déterminer les réactions des charnières A et C.

Solution. Supprimant les liaisons extérieures, examinons l'équilibre de toute la console qui est soumise aux forces données P_1, P_2, Q et aux réactions des liaisons X_A, Y_A; X_C, Y_C. La console, libérée des liaisons extérieures, ne forme pas une construction rigide (les barres peuvent tourner autour de la charnière B) mais, selon le principe de solidification, les forces qui agissent sur elle doivent, à l'équilibre, satisfaire aux conditions d'équilibre statique. Etablissant ces conditions, nous trouvons:

$$\sum F_{kx} \equiv X_A + X_C = 0,$$

$$\sum F_{ky} \equiv Y_A + Y_C - P_1 - P_2 - Q = 0,$$

$$\sum m_A(F_k) \equiv X_C 4a - Y_C a - P_2 a - P_1 \cdot 2a - Q \cdot 4a = 0.$$

Ces trois équations contiennent, comme nous le voyons, quatre inconnues X_A, Y_A, X_C, Y_C. Pour résoudre le problème, examinons encore les conditions d'équilibre de la barre AD seule (fig. 69, *b*), soumise aux forces P_1, Q et aux réactions X_A, Y_A, X_B, Y_B. Nous écrirons la quatrième équation nécessaire prenant les moments de ces forces par rapport au centre B (l'équation ne contiendra pas alors les nouvelles inconnues X_B et Y_B). On a:

$$\sum m_B(F_k) \equiv -Y_A \cdot 3a + P_1 a - Qa = 0.$$

Résolvant maintenant le système des quatre équations obtenues (en commençant par la dernière), nous trouvons:

$$Y_A = \frac{1}{3}(P_1 - Q) = -5 \text{ kgf}, \quad Y_C = \frac{2}{3}P_1 + P_2 + \frac{4}{3}Q = 62 \text{ kgf},$$

$$X_C = \frac{2}{3}P_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{4}{3}Q = 56 \text{ kgf}, \quad X_A = -X_C = -56 \text{ kgf}.$$

Ces résultats montrent que les forces Y_A et X_A ont des sens opposés à ceux qui sont indiqués sur la figure. En cas de besoin les réactions de la charnière B pourront être déterminées à partir des équations des projections sur les axes x et y des forces qui agissent sur la barre AD. On aura: $X_B = -X_A$; $Y_B = P_1 + Q - Y_A = 50$ kgf.

Nous attirons l'attention sur le fait qu'il faut, lorsqu'on résout un système d'équations, porter dans l'équation suivante la valeur de chacune des grandeurs avec le signe qui lui correspond d'après la résolution de l'équation précédente. Dans notre cas, par exemple, à la place de Y_A dans la dernière égalité, nous substituons —5 kgf et non pas 5 kgf. Pour cette raison il ne faut pas, comme on le fait quelquefois, ayant trouvé que $Y_A = -5$ kgf, changer le sens de la force sur la figure et estimer $Y_A = 5$ kgf, car cela peut être une cause d'erreur pour la résolution des équations d'équilibre suivantes.

Comme nous le voyons, la résolution des problèmes de statique ne nécessite pas toujours l'écriture de *toutes* les conditions d'équilibre pour le corps examiné. *Si dans le problème on ne demande pas de déterminer les réactions de certaines liaisons, il faut, s'il est possible, écrire seulement les équations dans lesquelles ces réactions inconnues n'entreront pas.* C'est ce que nous avons fait dans ce problème: nous avons examiné l'équilibre de la barre AD et nous n'avons écrit qu'une seule équation des moments par rapport au centre B.

Problème 27. Une poutre horizontale AB de poids $Q = 20$ kgf est articulée au mur en A et s'appuie sur le support C (fig. 70, *a*). A son extrémité B

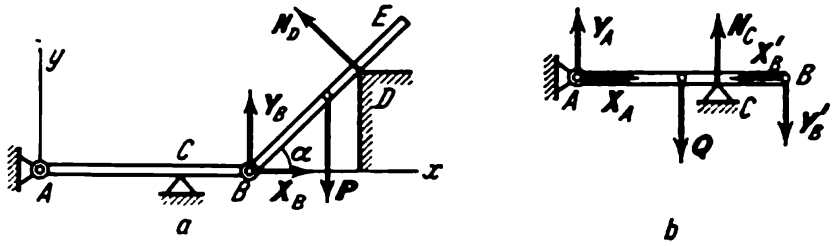


Fig. 70

est articulée une barre BE de poids $P = 40$ kgf qui s'appuie sur la saillie D. De plus, $CB = \frac{1}{3} AB$ et $DE = \frac{1}{3} BE$; l'angle $\alpha = 45°$. Déterminer les réactions des appuis.

Solution. Démembrant le système en deux parties, examinons séparément les équilibres de la barre BE et de la poutre AB. Sur la barre BE, considérée comme libre (fig. 70, *a*), agissent la force P et les réactions des liaisons N_D, X_B, Y_B. Introduisant la notation $BE = a$ et appliquant pour ces forces les conditions d'équilibre (33), nous obtenons:

$$\sum F_{kx} \equiv X_B - N_D \sin\alpha = 0,$$

$$\sum F_{ky} \equiv Y_B - P + N_D \cos\alpha = 0,$$

$$\sum m_B(F_k) \equiv N_D \frac{2}{3} a - P \frac{a}{2} \cos\alpha = 0.$$

Résolvant ces équations, nous trouvons:

$$N_D = \frac{3}{4} P \cos\alpha = 21{,}2 \text{ kgf}, \quad X_B = \frac{3}{8} P \sin 2\alpha = 15 \text{ kgf},$$

$$Y_B = P\left(1 - \frac{3}{4}\cos^2\alpha\right) = 25 \text{ kgf}.$$

La poutre AB, considérée comme libre, est soumise à la force Q, aux réactions des liaisons extérieures N_C, X_A, Y_A et aux réactions X'_B et Y'_B provenant de la barre BE et transmises par la charnière B (fig. 70, b); selon l'axiome 4, les forces X'_B et Y'_B doivent être dirigées dans les sens opposés à ceux de X_B et Y_B; en module on a: $X'_B = X_B$, $Y'_B = Y_B$.

Introduisant la notation $AB = b$ et appliquant les conditions d'équilibre (34) pour les forces qui agissent sur la poutre, nous obtenons:

$$\sum F_{kx} \equiv X_A - X'_B = 0,$$

$$\sum m_A(F_k) \equiv -Y'_B b + N_C \cdot \frac{2}{3} b - Q \frac{b}{2} = 0,$$

$$\sum m_C(F_k) \equiv -Y_A \cdot \frac{2}{3} b + Q \frac{b}{6} - Y'_B \frac{b}{3} = 0.$$

Posant dans ces équations $X'_B = X_B$ et $Y'_B = Y_B$ et les résolvant, nous trouvons:

$$X_A = X_B = 15 \text{ kgf}, \quad Y_A = \frac{1}{4} Q - \frac{1}{2} Y_B = -7{,}5 \text{ kgf},$$

$$N_C = \frac{3}{4} Q + \frac{3}{2} Y_B = 52{,}5 \text{ kgf}.$$

Les résultats obtenus montrent que toutes les réactions, sauf Y_A, ont les sens indiqués sur la figure 70; quant à la réaction Y_A, elle est en fait dirigée vers le bas.

Lors de l'emploi de ce procédé de résolution, il est important de ne pas oublier que *si la pression d'un corps quelconque sur un autre corps est représentée par la force* $\mathbf{R}$ *ou par les composantes* $\mathbf{X}$ *et* $\mathbf{Y}$, *alors selon l'axiome 4 la pression du deuxième corps sur le premier doit être représentée par la force* $\mathbf{R}'$ *dirigée dans le sens opposé à celui de* $\mathbf{R}$ (*avec, en module,* $R' = R$) *ou bien par les composantes* $\mathbf{X}'$, $\mathbf{Y}'$ *dirigées dans les sens opposés à ceux de* $\mathbf{X}$ *et* $\mathbf{Y}$ (*avec, en module,* $X' = X$, $Y' = Y$).

En utilisant ce procédé de résolution, on fait souvent l'une des fautes suivantes: 1) on ne dirige pas les forces $\mathbf{X}'$ et $\mathbf{Y}'$ dans les sens opposés à ceux de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ et de ce fait la solution obtenue est fausse; 2) on dirige correctement les forces $\mathbf{X}'$ et $\mathbf{Y}'$ (c'est-à-dire dans les sens opposés à ceux de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$), mais en résolvant les équations, on pose $X' = -X$, $Y' = -Y$; en définitive, la solution est également fausse car, au fond, on commet ici la même faute que dans le premier cas.

Pour éviter des fautes semblables, il est recommandé en règle générale de se servir du procédé de résolution qui a été utilisé au problème 26. De plus, ce procédé aboutit habituellement à des systèmes d'équations plus simples car les conditions d'équilibre de la construction en entier (voir la solution du problème 26) ne contiennent pas les forces intérieures.

Problème 28. Sur une arche à trois charnières (fig. 71) agit une force horizontale $\mathbf{F}$. Montrer que, lorsqu'on détermine les réactions des appuis A et B, on n'a pas le droit de transférer le point d'application de la force $\mathbf{F}$, le long de sa ligne d'action, au point E.

S o l u t i o n. L'arche libérée des liaisons extérieures (des appuis A et B) se présente comme une construction non rigide qu'on n'a pas le droit de considérer comme un corps solide parfait. Donc, même pour la détermination des conditions d'équilibre de la construction, on n'a pas le droit de transférer le long de la ligne DE le point d'application de la force qui agit sur une telle construction (voir § 3, conséquence des axiomes 1 et 2).

Pour nous en convaincre résolvons le problème de façon directe, négligeant le poids de l'arche. Considérons d'abord la moitié droite de l'arche comme libre. Elle ne sera soumise qu'à deux forces : les réactions $\boldsymbol{R}_B$ et $\boldsymbol{R}_C$ des charnières B et C (la force $\boldsymbol{R}_C$ n'est pas montrée sur la figure). A l'équilibre ces forces doivent être dirigées le long d'une même droite, c'est-à-dire le long de BC. Donc, la réaction $\boldsymbol{R}_B$ est dirigée le long de BC.

Examinant maintenant l'équilibre de l'arche en entier, nous trouvons que trois forces agissent sur elle : la force donnée $\boldsymbol{F}$, les réactions des appuis $\boldsymbol{R}_B$ (dont nous avons trouvé la direction) et $\boldsymbol{R}_A$. Selon le théorème des trois forces,

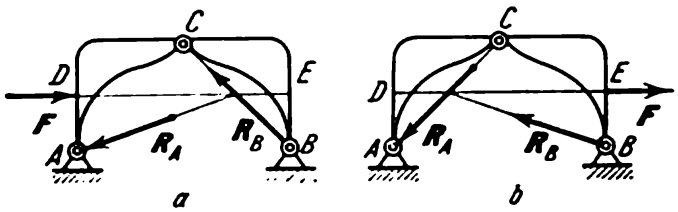


Fig. 71

les lignes d'action de ces forces équilibrées doivent se couper en un même point : cela nous permet de trouver la direction de la réaction $\boldsymbol{R}_A$. Les modules des réactions $\boldsymbol{R}_A$ et $\boldsymbol{R}_B$ se détermineront à partir du triangle des forces.

Par contre, si l'on applique la force $\boldsymbol{F}$ au point E et si, en raisonnant de la même façon, on fait les constructions nécessaires (fig. 71, *b*), on se convaincra que dans ce cas les réactions des appuis $\boldsymbol{R}_A$ et $\boldsymbol{R}_B$ seront différentes et par leurs modules et par leurs directions.

§ 28. **Forces réparties.** Dans les calculs qu'ont à faire les ingénieurs, on rencontre souvent des charges qui sont réparties le long d'une surface donnée selon telle ou telle loi. Examinons certains exemples très simples de forces réparties situées dans un même plan.

Un système plan de forces réparties se caractérise par son *intensité* q, c'est-à-dire par la grandeur de la force appliquée à l'unité de longueur du segment chargé. L'intensité est mesurée en kilogrammes-force par mètre (kgf/m).

1) Forces uniformément réparties le long d'un segment de droite (fig. 72). Pour un tel système de forces, l'intensité q est une grandeur constante. Lors des calculs statiques ce système de forces peut être remplacé par la résultante Q de module

$$Q = aq. \tag{39}$$

La force Q est appliquée au milieu du segment AB.

2) Forces réparties le long d'un segment de droite selon une loi linéaire (fig. 73). Ce sont, par exemple, les forces de pression de l'eau sur un barrage : elles ont une valeur maximum au fond et cette valeur s'annule à la surface de l'eau. Leur intensité q est une grandeur variable qui croît de zéro jusqu'à une valeur maximum q_m, et leur résultante Q se déterminera

comme se détermine la résultante des forces de pesanteur agissant sur une plaque homogène triangulaire ABC. Puisque le poids d'une plaque homogène est proportionnel à sa surface, on aura en module :

$$Q = \frac{1}{2} a q_m. \tag{40}$$

La force Q est appliquée à la distance $\frac{a}{3}$ du côté BC du triangle ABC (voir § 56, 2).

3) Forces réparties le long d'un segment de droite selon une loi arbitraire (fig. 74).

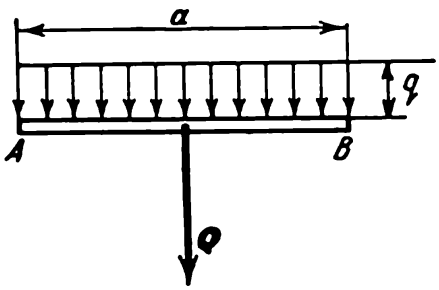


Fig. 72

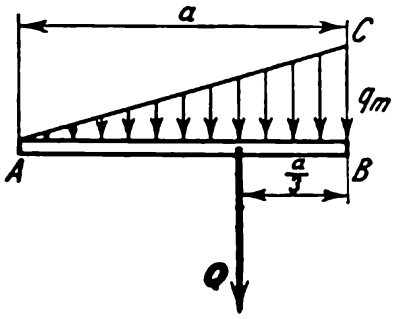


Fig. 73

La résultante Q de telles forces, par analogie avec la force de pesanteur, sera égale en module à la surface de la figure $ABDE$ mesurée à une échelle appropriée et passera par le centre de gravité de cette

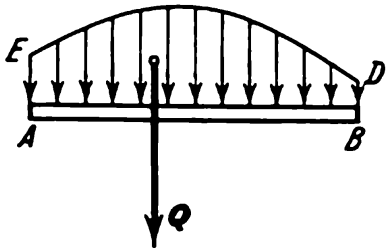


Fig. 74

figure (la question de la détermination des centres de gravité des figures sera étudiée au § 54).

4) Forces uniformément réparties le long d'un arc de circonférence (fig. 75). Comme exemple de telles forces, on peut citer les forces de pression hydrostatique sur les parois d'un récipient cylindrique. Par raison de symétrie la somme des projections de ces forces sur l'axe Oy perpendiculaire à l'axe de symétrie Ox est égale à zéro. La résultante Q est donc dirigée le long de l'axe Ox. En module, $Q = Q_x = \Sigma\,(q\Delta l_k)\cos\varphi_k$,

où $q\Delta l_k$ est la force de pression agissant sur l'élément d'arc de longueur Δl_k, et φ_k l'angle formé par cette force avec l'axe Ox. Mais on voit sur la figure que $\Delta l_k \cos \varphi_k = \Delta y_k$. Alors, mettant en évidence le facteur commun q, nous obtenons : $Q = \Sigma q \Delta y_k = q \Sigma \Delta y_k = qAB$. Ainsi

$$Q = qh, \tag{41}$$

où h est la longueur de la corde qui joint les extrémités de l'arc $\widehat{AB}$.

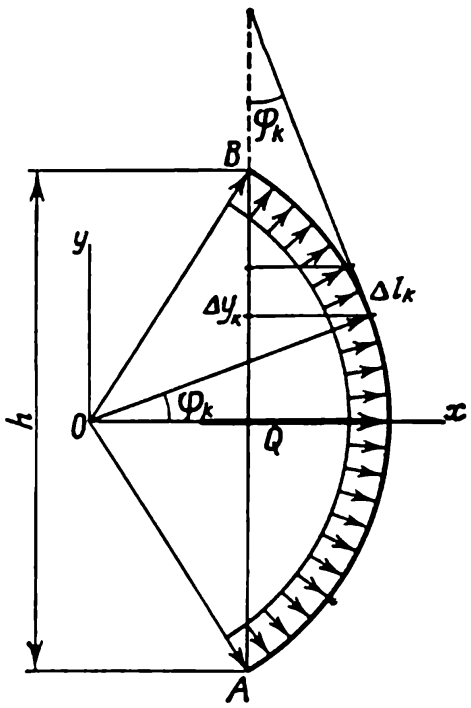


Fig. 75

Problème 29. La poutre AB d'une console dont les dimensions sont données sur la figure 76 est soumise à une charge uniformément répartie d'intensité q_0 kgf. Négligeant le poids de la poutre et admettant que les forces de pression sur son extrémité encastrée sont réparties selon une loi linéaire, déterminer les valeurs des intensités maxima q_m et q'_m de ces forces, si $b = 2a$ (comparer avec le schéma du problème 15, § 17).

Solution. Remplaçons les forces réparties par leurs résultantes $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{R}'$; selon les formules (39) et (40) :

$$Q = q_0 b, \qquad R = \frac{1}{2} q_m a, \qquad R' = \frac{1}{2} q'_m a.$$

Ecrivons les conditions d'équilibre (37) pour les forces parallèles qui agissent sur la poutre :

$$\sum F_{ky} \equiv Q + R - R' = 0,$$

$$\sum m_C(F_k) \equiv R\frac{a}{3} - Q\left(\frac{b}{2} + \frac{a}{3}\right) = 0.$$

Remplaçant ici Q, R et R' par leurs valeurs et résolvant les équations obtenues, nous trouvons en définitive :

$$q_m = \left(3\frac{b^2}{a^2} + 2\frac{b}{a}\right) q_0; \qquad q'_m = \left(3\frac{b^2}{a^2} + 4\frac{b}{a}\right) q_0.$$

Si $b = 2a$, nous obtenons $q_m = 16q_0$, $q'_m = 20q_0$.

Problème 30. Une digue de section transversale rectangulaire de hauteur h et de largeur a repose sur une base horizontale AB (fig. 77). Le poids d'eau par unité de volume est égal à γ, et le poids de maçonnerie par unite de volume vaut γ_1. Admettant que les forces de pression sur le fondement sont réparties linéairement (selon une loi trapézoïdale), déterminer la valeur minimum (q_1) et la valeur maximum (q_2) de l'intensité de ces forces.

Solution. Examinons une partie de la digue de longueur égale à l'unité dans la direction perpendiculaire au plan de la figure. Nous admettons que les forces qui agissent sur cette partie de la digue sont appliquées dans sa section moyenne, qui est précisément représentée sur la figure 77. Ces forces seront : la force de pression de l'eau $\boldsymbol{P}$, le poids de la digue $\boldsymbol{Q}$, la réaction verticale de la base que nous représentons par deux forces $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{R}'$, et la réaction horizontale $\boldsymbol{F}$.

Comme la pression de l'eau au fond se définit par le poids de la colonne du liquide de hauteur h, pour les forces de pression de l'eau l'intensité maximum $q_m = \gamma h$ et d'après la formule (40) $P = \frac{1}{2} q_m h = \frac{1}{2} \gamma h^2$. La composante $\boldsymbol{R}$ de la réaction de la base est la résultante des forces uniformément réparties d'intensité q_1; donc, selon la formule (39) $R = q_1 a$. La composante $\boldsymbol{R}'$ est la

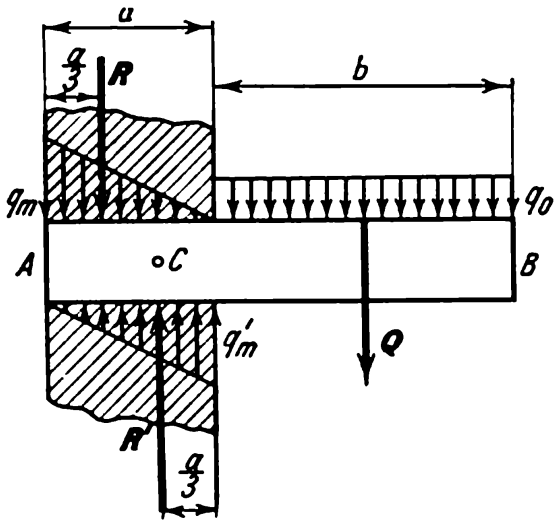


Fig. 76

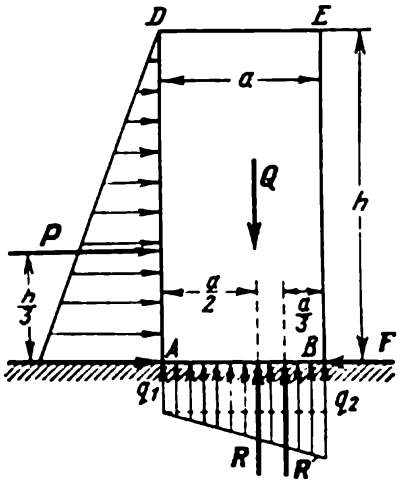


Fig. 77

résultante des forces réparties linéairement, dont l'intensité varie de zéro à la valeur $(q_2 - q_1)$; donc, selon la formule (40) $R' = (q_2 - q_1)\frac{a}{2}$. Enfin, le poids de l'unité de longueur de la digue $Q = \gamma_1 a h$. Ainsi,

$$P = \frac{1}{2}\gamma h^2, \quad Q = \gamma_1 a h, \quad R = q_1 a, \quad R' = (q_2 - q_1)\frac{a}{2}.$$

Posant maintenant les conditions d'équilibre (33), nous avons (les moments sont pris par rapport au point d'application de la force $\boldsymbol{R}$):

$$\sum F_{kx} \equiv P - F = 0,$$

$$\sum F_{ky} \equiv R + R' - Q = 0,$$

$$\sum m_O(F_k) \equiv -P\frac{h}{3} + R'\frac{a}{6} = 0.$$

La première équation permet de déterminer la réaction horizontale $\boldsymbol{F}$. Des deuxième et troisième équations nous trouvons:

$$R' = 2P\frac{h}{a}; \qquad R + R' = Q.$$

Remplaçant dans ces égalités toutes les forces par leurs valeurs, nous obtenons un système de deux équations:

$$q_2 - q_1 = 2\gamma\frac{h^3}{a^2}, \qquad q_2 + q_1 = 2\gamma_1 h.$$

Résolvant ces équations, nous trouvons finalement

$$q_1=\left(\gamma_1-\frac{h^2}{a^2}\gamma\right)h, \qquad q_2=\left(\gamma_1+\frac{h^2}{a^2}\gamma\right)h.$$

Il est intéressant de remarquer que lorsque le rapport de la largeur a de la digue à sa hauteur h est

$$\frac{a}{h}=\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}},$$

la grandeur q_1 s'annule. Si a est inférieur à $h\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}}$, q_1 est négatif. Cela signifie qu'une certaine partie de la digue sur son bord A ne presse pas sur la base, ce qui permet à l'eau de s'infiltrer et peut provoquer la destruction de la digue.

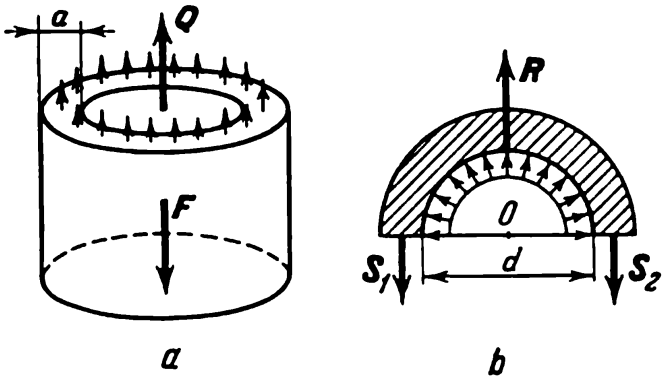


Fig. 78

Problème 31. Un ballon cylindrique de hauteur H et de diamètre intérieur d est rempli d'un gaz sous une pression égale à p kgf/m². L'épaisseur des parois cylindriques du ballon est égale à a. Déterminer les tensions de traction qu'éprouvent ces parois dans les directions 1) longitudinale et 2) transversale (la tension se mesure par le rapport de la force de traction à la surface de la section transversale).

Solution. 1) Sectionnons le cylindre en deux parties par un plan perpendiculaire à son axe et examinons l'équilibre de l'une des parties (fig. 78, *a*). Sur celle-ci, dans la direction de l'axe du cylindre, agissent deux forces: la force de pression sur le fond $F=\frac{\pi d^2}{4}p$ et les forces réparties sur la surface de la section (action de la moitié rejetée) dont la résultante sera désignée par Q. Pour l'équilibre, $Q=F=\frac{\pi d^2}{4}p$. Admettant que la surface de la section transversale est à peu près égale à πda, nous obtenons pour la tension σ_1 la valeur

$$\sigma_1=\frac{Q}{\pi da}=\frac{1}{4}\frac{d}{a}p \text{ kgf/m}^2.$$

2) Sectionnons maintenant le cylindre d'une autre façon par un plan passant par son axe et examinons l'équilibre de l'une des moitiés en admettant que toutes les forces sont appliquées à elle dans le plan de la section moyenne (fig. 78, *b*). Cette moitié subit l'action: a) des forces de pression uniformément réparties le long de l'arc d'une demi-circonférence et d'intensité $q=pH$; d'après la formule (41), la résultante de ces forces $R=qd=pHd$; b) des

forces réparties sur les sections A et B (action de la moitié rejetée) dont nous désignons les résultantes par S_1 et S_2, avec, par raison de symétrie, $S_1 = S_2 = S$. Des conditions d'équilibre nous obtenons $S_1 + S_2 = R$, d'où $S = \frac{1}{2} pdH$. Puisque la surface de la section sur laquelle est répartie la force S est égale à aH (nous négligeons la surface de la section du fond du cylindre), la valeur de la tension de traction σ_2 vaut :

$$\sigma_2 = \frac{S}{aH} = \frac{1}{2} \frac{d}{a} p \text{ kgf/m}^2.$$

Comme nous le voyons, la tension de traction transversale est deux fois plus grande que la tension longitudinale.

Chapitre V

NOTIONS DE STATIQUE GRAPHIQUE

§ 29. Polygone des forces et polygone funiculaire. Réduction d'un système plan de forces à deux forces. Au cours de leurs calculs les ingénieurs utilisent souvent des procédés graphiques qui, bien

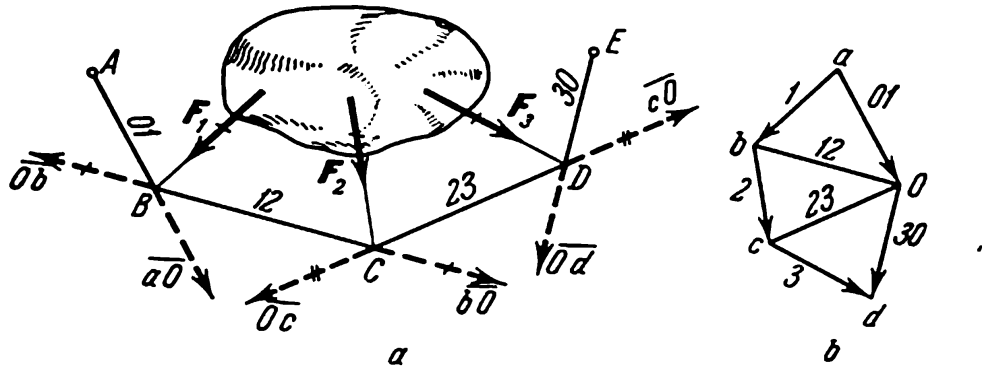


Fig. 79

qu'étant moins précis que les procédés analytiques, permettent d'obtenir les résultats plus rapidement et d'une manière plus évidente.

Le procédé graphique de résolution des problèmes de statique pour un système plan de forces est basé sur la construction du polygone des forces et du polygone funiculaire.

Soient trois forces F_1, F_2, F_3 agissant sur un solide (fig. 79, *a*). La figure *abcd* construite avec ces forces (fig. 79, *b*) s'appelle, comme on le sait, *polygone des forces*[1]. Nous rappelons que lorsque l'extrémité de la dernière force coïncide avec l'origine de la première, le polygone des forces est dit *fermé*, dans le cas contraire — *ouvert*.

Prenons dans le plan du polygone des forces un point arbitraire *O* (le pôle) non situé sur les côtés du polygone ni sur leurs prolongements et réunissons-le aux sommets du polygone par les rayons *Oa*, *Ob*, *Oc*, *Od* que nous désignerons *01*, *12*, *23*, *30* (on lit : « zéro-un », « un-deux », etc. ; ces chiffres indiquent les numéros des forces qui concourent en sommet où aboutit le rayon).

---

[1] Nous désignerons les forces dans le polygone des forces par des chiffres (des numéros) : à la place de F_1, nous écrivons *1*, au lieu de F_2, nous mettrons *2*, etc.

Maintenant prenons sur le dessin principal (fig. 79, *a*) un point arbitraire A et menons par lui une droite parallèle au rayon *01* jusqu'à son intersection avec la ligne d'action de la force F_1. Du point B menons une droite parallèle au rayon *12* jusqu'à son intersection avec la ligne d'action de la force F_2 au point C, etc. La figure $ABCDE$ construite de cette façon est appelée *polygone funiculaire*. Ce nom est dû au fait que si l'on fixe une corde aux points A et E et si l'on lui applique aux points B, C et D les forces F_1, F_2, F_3, elle aura, à l'équilibre, la forme de la ligne brisée $ABCDE$ (comme un câble de funiculaire). Le polygone funiculaire est dit *fermé* lorsque ses côtés extrêmes (dans notre cas AB et DE) se confondent, c'est-à-dire sont dirigés le long d'une même droite. Dans le cas contraire il est dit *ouvert*.

Utilisant les constructions qui viennent d'être faites, on peut remplacer un système plan de forces arbitraire par deux forces dirigées suivant les côtés extrêmes (AB et DE) du polygone funiculaire. En effet, sur la figure 79, *b* on voit qu'en menant les rayons Oa, Ob, etc., on décompose chacune des forces F_1, F_2, F_3 en deux forces, car

$$F_1 = \overline{ab} = \overline{aO} + \overline{Ob}, \qquad F_2 = \overline{bc} = \overline{bO} + \overline{Oc},$$
$$F_3 = \overline{cd} = \overline{cO} + \overline{Od}.$$

Or, comme on le sait (voir § 7 et fig. 17), les forces égales à $\overline{aO}$ et $\overline{Ob}$ remplacent la force F_1, si on les applique en un point quelconque de la ligne d'action de F_1. Appliquons ces forces au point B du polygone funiculaire (fig. 79, *a*). Remplaçons également les forces F_2 et F_3 par les forces $\overline{bO}$ et $\overline{Oc}$, $\overline{cO}$ et $\overline{Od}$ en les appliquant respectivement aux points C et D. Maintenant nous remarquons que les forces $\overline{Ob}$, $\overline{bO}$ et $\overline{Oc}$, $\overline{cO}$, dirigées suivant les lignes BC et CD, s'équilibrent mutuellement car, comme on le voit sur la figure 79, *b*, $\overline{Ob} = -\overline{bO}$ et $\overline{Oc} = -\overline{cO}$; ces forces peuvent donc être enlevées. En définitive, le système de forces F_1, F_2, F_3 sera effectivement remplacé par les deux forces $\overline{aO}$ et $\overline{Od}$ dirigées suivant les côtés extrêmes AB et DE du polygone funiculaire.

On obtiendra un résultat analogue quel que soit le nombre des forces.

§ 30. Détermination graphique de la résultante. Si le polygone des forces construit pour un système plan de forces n'est pas fermé (vecteur principal $R \neq 0$), ce système de forces se réduit, d'après le § 23, à une résultante.

On peut trouver graphiquement la résultante en appliquant la règle du parallélogramme, mais ce procédé est trop encombrant lorsque le nombre de forces est grand. Le problème se résout plus

simplement par la construction du polygone des forces et du polygone funiculaire.

Soit un système de forces F_1, F_2, F_3, F_4 agissant sur un solide (fig. 80, *a*). Construisons avec ces forces, à une échelle déterminée,

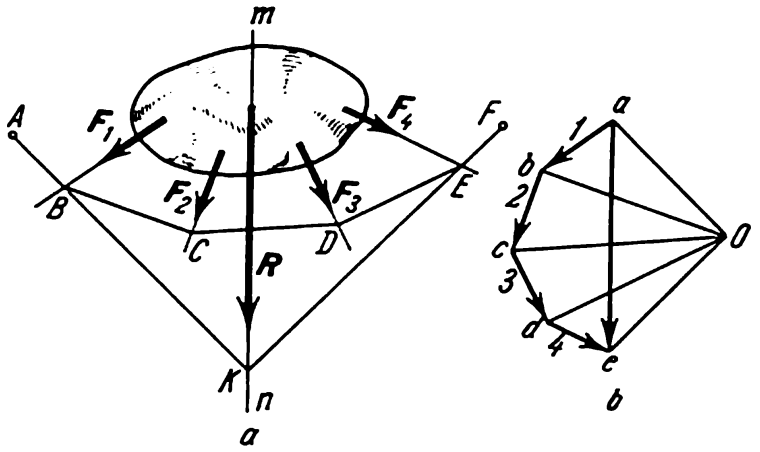


Fig. 80

le polygone des forces *abcde* (fig. 80, *b*). Le côté *ae* qui le ferme détermine le module et la direction de la résultante R. Pour trouver le point d'application de la résultante, joignons les sommets *a*,

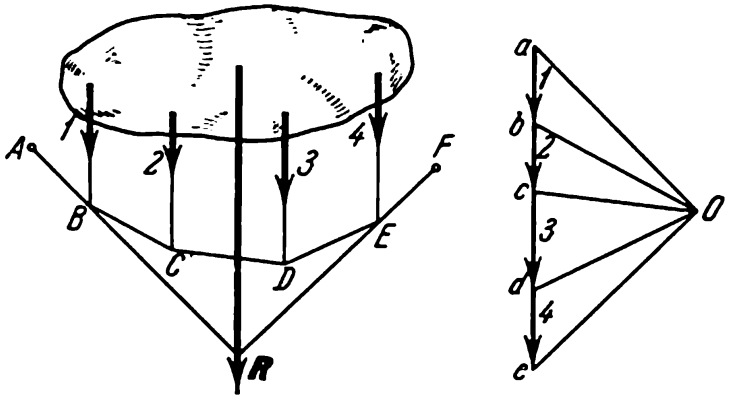


Fig. 81

b, *c*, *d*, *e* à un pôle arbitraire *O* et construisons le polygone funiculaire *ABCDEF* en menant les lignes $AB \parallel aO$, $BC \parallel bO$, etc. (fig. 80, *a*). D'après ce qui a été démontré, les forces données peuvent être remplacées par deux forces dirigées suivant les lignes *AB* et *EF*. Par conséquent, la résultante de ces forces (et donc des forces F_1, F_2, F_3, F_4) passe par le point d'intersection des droites *AB* et *EF*. Ainsi, construisant le polygone funiculaire et prolongeant ses côtés extrêmes jusqu'à ce qu'ils se coupent, nous trouverons le point *K*

par lequel passe la résultante des forces composantes. Menant maintenant par le point K une droite parallèle à ae et appliquant à un quelconque de ses points la force R, nous trouvons la résultante cherchée.

Une construction analogue pour le cas de forces parallèles est montrée sur la figure 81. Le polygone des forces, dans ce cas, devient un segment de droite et la résultante $R = \overline{ae}$.

§ 31. Détermination graphique du couple résultant. Si le polygone des forces construit pour un système plan de forces donné est fermé et si le polygone funiculaire ne l'est pas, ce système de forces se réduit à un couple résultant.

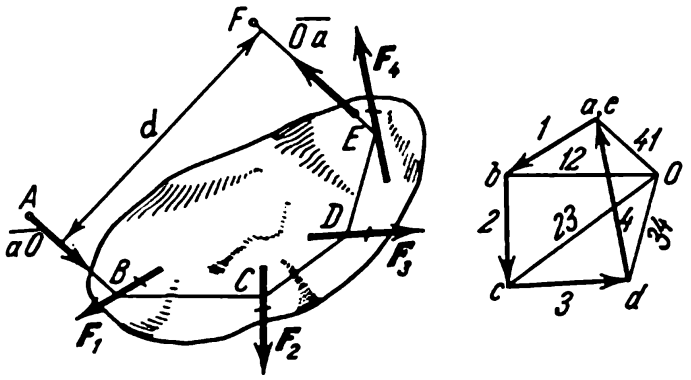


Fig. 82

En effet, lorsque le polygone des forces $abcde$ construit avec les forces F_1, F_2, F_3, F_4 est fermé (fig. 82), les rayons aO et Oe sont confondus [1]. Alors, les côtés extrêmes AB et EF du polygone funiculaire, s'il n'est pas fermé, seront parallèles.

D'après ce qui a été démontré au § 29, les forces données peuvent être remplacées par deux forces égales, dans notre cas, à $\overline{aO}$ et $\overline{Oa}$ (puisque $\overline{Oe} = \overline{Oa}$) et dirigées le long des droites AB et EF. Ainsi, le système de forces F_1, F_2, F_3, F_4 se remplace par le couple ($\overline{aO}$, $\overline{Oa}$) dont le bras de levier est d. Le moment de ce couple est égal à $Oa \cdot d$, où Oa est mesuré à l'échelle des forces qui a été choisie pour la construction du polygone des forces, et d est mesuré à l'échelle des longueurs qui a été choisie pour la représentation du dessin principal.

§ 32. Conditions graphiques d'équilibre d'un système plan de forces. Les résultats obtenus dans les paragraphes précédents montrent que *les conditions nécessaires et suffisantes d'équilibre d'un*

[1] Dans ce cas nous désignons les rayons Oa, Ob, ... par les nombres *12*, *23*, *34*, *41*, car dans un polygone des forces fermé en chaque sommet concourent deux forces.

système plan de forces arbitraire agissant sur un solide sont que le polygone des forces et le polygone funiculaire construits pour ces forces soient fermés (conditions graphiques d'équilibre).

En effet, si l'une des figures citées n'est pas fermée, le système de forces se réduit soit à une résultante, soit à un couple, et l'équilibre n'a pas lieu. Si, au contraire, ces deux figures sont fermées, les forces agissant sur le corps se réduisent de toute évidence à deux forces de même module et dirigées le long d'une même droite dans des sens opposés (fig. 82 lorsque $d = 0$), et le corps est alors en équilibre.

§ 33. **Détermination des réactions d'appui.** Trouvons graphiquement les réactions des appuis A et K de la ferme représentée sur la figure 83, *a*. A l'aide d'une échelle des longueurs appropriée (par

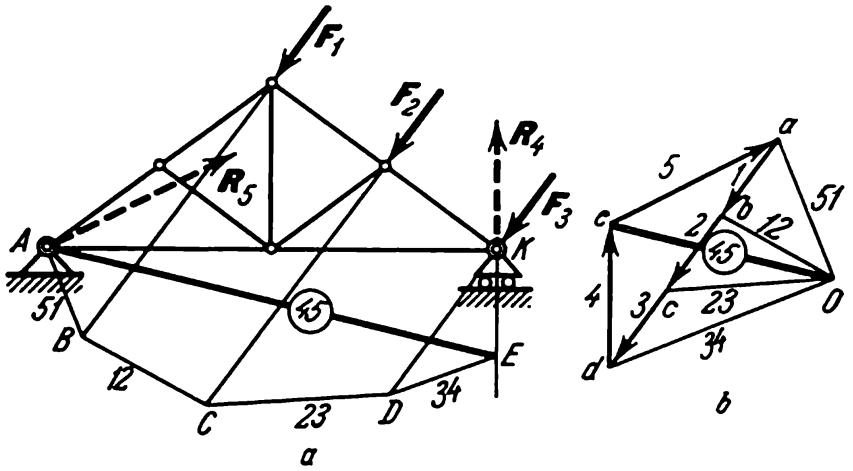


Fig. 83

exemple, 1 cm pour 0,4 m), nous représentons tout d'abord sur la figure la ferme et les forces données F_1, F_2, F_3 qui lui sont appliquées. Désignons les réactions d'appui par R_4 et R_5; la direction de R_4 est connue, celle de R_5 ne l'est pas. Maintenant, choisissant une échelle pour la représentation des forces (par exemple, 1 cm pour 0,5 t), nous construisons le polygone des forces qui agissent sur la ferme (fig. 83, *b*) en commençant par les forces *1*, *2*, *3*. La construction ne peut être complète, car on ne peut représenter que la direction de la force R_4, le module R_4 étant inconnu (le point *e* est inconnu). On sait seulement que l'extrémité de la force R_5 se trouve au point *a* parce qu'à l'équilibre le polygone des forces doit être fermé.

Pour continuer la résolution, on choisit le pôle *O* et on mène les rayons *12*, *23*, *34*, *51*. La direction du rayon *45* nous est inconnue car on ne connaît pas la position du sommet *e* du polygone des forces.

Pour trouver ce rayon, nous construisons sur la figure 83, *a* le polygone funiculaire *en commençant à partir du point A où est appliquée la force* R_5 *dont la direction est inconnue* (sinon nous ne saurions pas fermer ce polygone puisque nous ne connaissons, a priori, aucun autre point sur la ligne d'action de la force R_5). Le rayon *51* se mène à partir du point *A*, puisque la force R_5 y est appliquée, jusqu'à son intersection au point *B* avec la ligne d'action de la force F_1. Ensuite, nous menons le rayon *12* jusqu'à son intersection au point

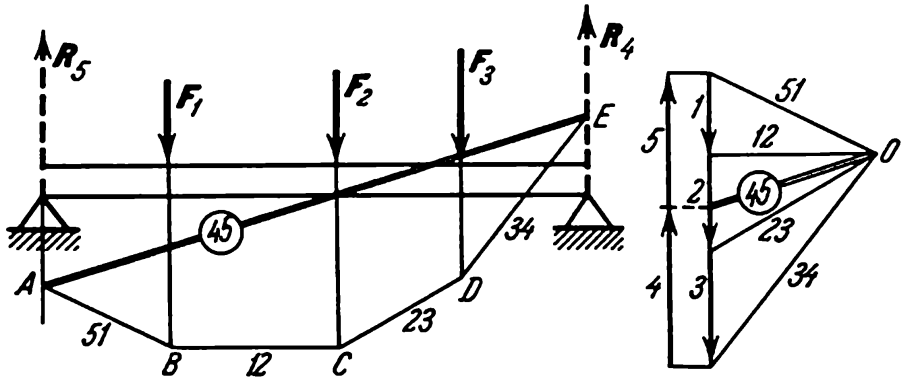


Fig. 84

C avec la ligne d'action de la force F_2, le rayon *23* jusqu'à son intersection au point *D* avec la ligne d'action de la force F_3 et le rayon *34* jusqu'à son intersection au point *E* avec la ligne d'action de la force R_4. Appliquant maintenant les conditions d'équilibre, fermons le polygone funiculaire à l'aide de la ligne *EA*; nous trouvons ainsi la direction du rayon *45*.

Ensuite, menons à partir du pôle *O* (fig. 83, *b*) le rayon *45* parallèlement à la ligne *EA*. Le point d'intersection de ce rayon avec la direction de la force *4* détermine le sommet inconnu *e* du polygone des forces. En définitive, le vecteur $\overline{de}$ représentera, à l'échelle choisie, la force inconnue R_4, et le vecteur $\overline{ea}$, la force R_5. Le problème est donc résolu.

Un exemple de détermination graphique des réactions d'appui dans le cas de forces parallèles est montré sur la figure 84. Dans ce cas, on peut commencer la construction du polygone funiculaire à partir d'un point quelconque car les directions des deux réactions sont connues à l'avance. Le rayon cherché *45* est représenté sur les dessins par des lignes doubles.

§ 34. Calcul graphique des fermes planes. *Une ferme est une construction rigide de tiges droites réunies à leurs extrémités par des charnières.* Si toutes les tiges de la ferme sont disposées dans un même plan, la ferme est dite *plane*. Les endroits où se joignent les tiges de la ferme sont appelés *nœuds*. Toutes les charges extérieures

de la ferme ne s'appliquent qu'aux nœuds. Lorsqu'on calcule une ferme on néglige le frottement dans les nœuds et le poids des tiges (par rapport aux charges extérieures) ou bien on répartit les poids des tiges entre les nœuds. Chaque tige de la ferme ne subira que deux forces appliquées à ses extrémités. A l'équilibre, ces forces

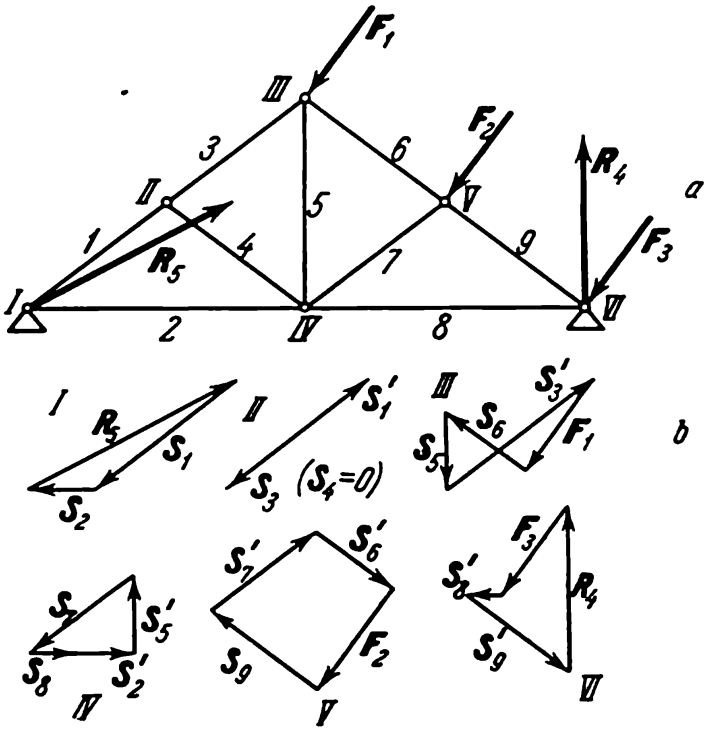


Fig. 85

ne peuvent être dirigées que le long de la tige. On peut donc admettre que *les tiges d'une ferme ne travaillent qu'à la traction ou à la compression.* Bornons-nous ici à l'étude des fermes planes rigides sans tiges superflues et composées de triangles. Dans de telles fermes le nombre de tiges k et le nombre de nœuds n sont reliés par l'égalité

$$k = 2n - 3. \tag{42}$$

En effet, dans un triangle rigide formé de trois tiges, il y a trois nœuds (voir, par exemple, le triangle formé par les tiges *1*, *2* et *4* de la figure 85). L'adjonction de chaque nœud suivant nécessitera deux tiges (par exemple, sur la figure 85 le nœud *III* est adjoint grâce aux tiges *3*, *5*, etc.) ; par conséquent, les $(n - 3)$ autres nœuds nécessiteront $2(n - 3)$ tiges. En définitive, le nombre de tiges dans la ferme $k = 3 + 2(n - 3) = 2n - 3$. Pour un nombre de tiges inférieur la ferme ne sera pas rigide, et pour un nombre de tiges supérieur elle sera statiquement indéterminable.

Le calcul d'une ferme consiste à déterminer les réactions d'appui et les efforts dans ses tiges. Par le procédé graphique (§ 33) ou analytique (§ 26), on détermine d'abord les réactions d'appui, en examinant l'équilibre de toute la ferme considérée comme un solide. Ensuite on cherche les efforts dans les tiges en isolant successivement chacun des nœuds et en examinant l'équilibre des tiges qui concourent en ce nœud. On commence le calcul par un nœud en lequel concourent deux tiges (autrement il serait impossible de déterminer les efforts inconnus).

Comme exemple, examinons la ferme représentée sur la figure 85, *a*. Dans cette ferme le nombre de nœuds $n = 6$ et le nombre de tiges $k = 9$. Donc, l'égalité (42) est satisfaite et la ferme est rigide et sans tiges superflues. Les réactions d'appui R_4 et R_5 pour la ferme en question ont déjà été trouvées au § 33. Nous les représentons, de même que les forces F_1, F_2 et F_3, comme connues.

Examinons maintenant l'équilibre du nœud *I* (nous désignerons les nœuds par des chiffres romains et les tiges par des chiffres arabes). En pensée nous isolons ce nœud de la partie restante de la ferme [1] et nous remplaçons l'action de la partie rejetée par les forces S_1 et S_2 qui doivent être dirigées le long des tiges *1* et *2*. Avec les forces R_5, S_1 et S_2, qui concourent en nœud *I*, nous construisons un triangle fermé (fig. 85, *b*). Pour ce faire, nous représentons d'abord à une échelle choisie la force connue R_5 et ensuite, par son origine et par son extrémité, nous menons des droites parallèles aux tiges *1* et *2*. Ainsi seront trouvés les efforts S_1 et S_2 dans les tiges *1* et *2*. Ensuite nous examinons l'équilibre du nœud *II*. L'action exercée sur ce nœud par le reste de la ferme est représentée par les forces S_1', S_3 et S_4 dirigées le long des tiges correspondantes ; la force S_1' est connue, car d'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction $S_1' = -S_1$. Ayant construit avec les forces concourantes en nœud *II* un triangle fermé (en commençant par la force S_1'), nous trouverons les grandeurs S_3 et S_4 (dans ce cas, il se trouve que $S_4 = 0$). De manière analogue on déterminera les efforts dans les autres tiges. Les polygones des forces correspondant à tous les nœuds sont montrés sur la figure 85, *b*. Le dernier polygone (pour le nœud *VI*) se construit aux fins de contrôle, puisque toutes les forces qui le composent sont déjà connues.

Le caractère de l'effort dans chaque tige se détermine de la façon suivante. Isolant en pensée le nœud avec les tiges qui y concourent du reste de la construction (par exemple, le nœud *III*), appliquons aux extrémités coupées des tiges les forces trouvées (fig. 86) ; une force dirigée vers l'extérieur du nœud (S_5 sur la figure 86) étire la

[1] Pour le nœud *III* de la ferme, le schéma du nœud rendu isolé, dont on examine l'équilibre, est montré sur la figure 86. C'est ainsi qu'on doit concevoir tous les autres nœuds quand on les isole du reste de la construction.

tige, et une force dirigée vers le nœud (S'_3 et S_6 sur la fig. 86), la comprime. Il est convenu habituellement de donner aux efforts de

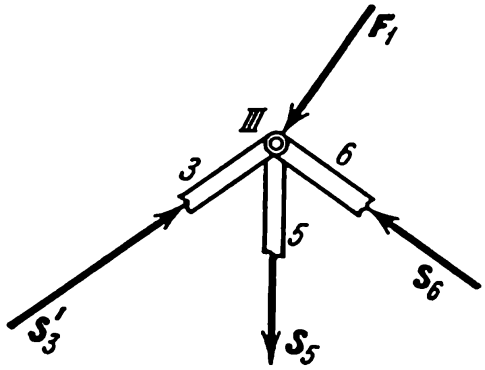


Fig. 86

traction le signe «+» et aux efforts de compression le signe «—». Dans l'exemple étudié (fig. 85) les tiges *1*, *2*, *3*, *6*, *7*, *9* sont comprimées, et les tiges *5*, *8* étirées.

§ 35. Diagramme de Maxwell-Cremona. Le calcul graphique d'une ferme peut être effectué plus rapidement et les résultats peuvent être présentés sous une forme plus compacte si, lors de leur construction, on réunit les polygones

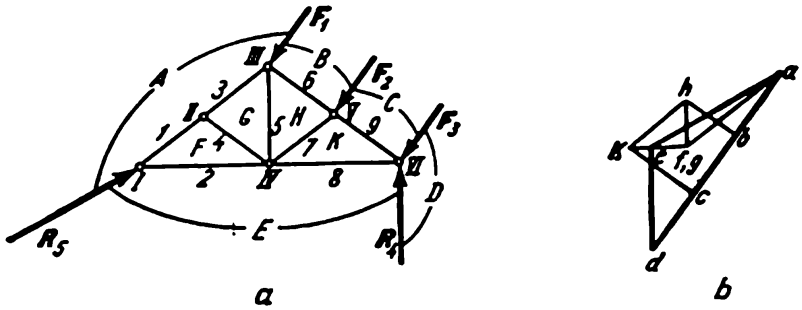


Fig. 87

des forces construits pour chaque nœud de la ferme en un seul diagramme des efforts, appelé *diagramme de Maxwell-Cremona*.

Pour construire un tel diagramme, il faut suivre un ordre déterminé, par exemple l'ordre suivant:

1) Trouver les réactions d'appuis de la ferme.

2) Représenter les forces données et les réactions d'appuis qui agissent sur la ferme de manière qu'elles soient toutes disposées *en dehors du contour de la ferme* (fig. 87, *a*); désigner les parties du plan se trouvant entre ces forces et le contour de la ferme, ainsi que celles qui se trouvent entre les tiges de la ferme, par des lettres *A*, *B*, *C*, . . ., *K*.

3) Construire, à une échelle choisie, avec les forces extérieures (c'est-à-dire les forces données et les réactions d'appuis) agissant sur la ferme, un polygone des forces fermé *en menant chacune des forces suivant l'ordre dans lequel on les rencontre en contournant la ferme dans le sens des aiguilles d'une montre* (fig. 87, *b*,

lignes grasses). Il est alors commode de désigner l'origine et l'extrémité de la force par des petites lettres correspondant aux dénominations des parties du plan qui, lorsqu'on décrit le contour, sont disposées à gauche et à droite de la force (la force F_1 est désignée par $\overline{ab}$, la force F_2 par $\overline{bc}$, etc.). Ainsi, pour la ferme en question le polygone des forces extérieures sera le polygone *abcdea*. (Sur le diagramme on ne met pas de flèches aux extrémités des forces.)

4) Adjoindre au polygone des forces extérieures successivement les polygones des forces pour tous les nœuds de la ferme, en commençant par le nœud

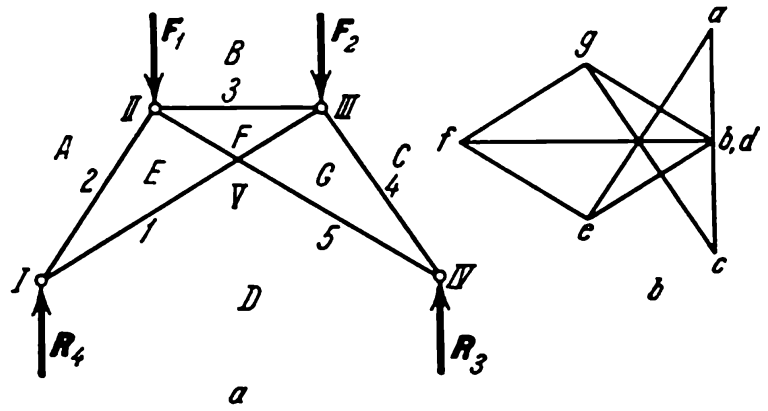


Fig. 88

en lequel concourent deux tiges; *il faut commencer la construction de chaque polygone par les forces connues et porter toutes les forces suivant l'ordre dans lequel elles se rencontrent lorsqu'on fait le tour du nœud considéré dans le sens des aiguilles d'une montre* (les efforts dans les tiges se désignent de la même façon que les forces extérieures: l'effort dans la tige *1* est $\overline{af}$, dans la tige *2* il est $\overline{fe}$, etc.).

Par exemple, pour le nœud *VI* (fig. 87, *a*) les forces données F_2 et R_4 sont déjà représentées sur le diagramme par les segments *cd* et *de* (fig. 87, *b*). A partir du point *e* nous menons une ligne parallèle à la tige *8* et à partir du point *c* une ligne parallèle à la tige *9*. L'intersection de ces lignes nous donne précisément le sommet *k* du polygone des forces fermé *cdekc* pour le nœud *VI*. On construit de façon analogue les polygones des forces des autres nœuds.

En définitive, on obtient le diagramme des efforts pour toute la ferme (fig. 87, *b*). Pour trouver l'effort, par exemple, dans la tige *1*, nous isolons en pensée le nœud *I* et, contournant ce nœud dans le sens des aiguilles d'une montre, nous lisons la dénomination de la force: *af*. Ayant trouvé sur le diagramme le vecteur $\overline{af}$, nous déterminons son module; appliquant ce vecteur à la tige coupée *1* (voir fig. 86), nous établissons que la tige est comprimée. On obtiendra le même résultat si l'on isole le nœud *II*, mais alors, contournant le nœud dans le sens des aiguilles d'une montre, on trouvera que la force correspondante se représente par le vecteur $\overline{fa}$. Ainsi, le procédé adopté pour la dénomination des forces tient automatiquement compte du principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

Nous attirons l'attention sur les cas particuliers suivants.

1) Si en un nœud non chargé par des forces extérieures concourent trois tiges dont deux sont colinéaires (nœud *II* sur la fig. 87, *a*), l'effort dans la troisième tige sera nul (fig. 87, *a*, la tige *4*), comme il est facile de s'en convaincre par la construction du polygone des forces correspondant, et la tige sera dite *tige nulle*. C'est pourquoi sur le diagramme (fig. 87, *b*) les points *g* et *f* coïncident ($gf = 0$).

2) Si dans une ferme il y a des tiges qui se croisent (fig. 88, *a*, les tiges *1* et *5*), on peut construire pour cette ferme le diagramme des efforts de la façon habituelle en considérant le point d'intersection des tiges comme un nœud. Les efforts de même module et de même sens dans les parties des tiges *1* et *5* seront alors représentés deux fois sur le diagramme. Le diagramme correspondant est montré sur la fig. 88, *b* : les segments *de* et *fg* y représentent l'effort dans la tige *1* et les segments *ef* et *gd*, dans la tige *5*.

3) Si lors de la construction du diagramme on rencontre un nœud pour lequel le nombre des inconnues est supérieur à deux, il faut essayer de construire le diagramme simultanément à partir des deux extrémités de la ferme (si la ferme n'est pas symétrique), ou bien déterminer analytiquement les efforts dans certaines tiges par le procédé des coupes.

Pour trouver analytiquement les efforts dans certaines tiges, il faut séparer la ferme en deux parties par une coupe passant par 3 tiges (par exemple, par les tiges *3*, *4*, *2* sur la fig. 87, *a*) et établir pour l'une quelconque des deux moitiés de la ferme les conditions d'équilibre (35) en prenant les moments par rapport aux points où concourent les tiges coupées. Lorsque deux de ces tiges sont parallèles, il est plus commode d'établir les conditions (34) en prenant les projections sur l'axe perpendiculaire aux tiges. De la même façon on peut, au choix, vérifier la précision du calcul graphique.

Chapitre VI

FROTTEMENT

§ 36. Lois du frottement de glissement. L'expérience montre que lorsqu'on tend à déplacer un corps sur la surface d'un autre corps, dans le plan de contact des corps naît une force de résistance à leur glissement relatif appelée force de frottement de glissement.

L'apparition du frottement est conditionnée avant tout par la rugosité des surfaces, engendrant une résistance au déplacement, et par l'adhésion présente entre les corps pressés l'un contre l'autre. L'étude de toutes les particularités du phénomène de frottement est un problème physico-mécanique assez compliqué qui dépasse les limites d'un cours de mécanique rationnelle.

Dans les calculs de pratique courante on se base d'habitude sur une série de lois générales établies expérimentalement, et qui reflètent avec une précision suffisante les particularités principales du phénomène de frottement. Ces lois, appelées lois du frottement de glissement au repos, peuvent être énoncées de la façon suivante:

1. Lorsqu'on tend à déplacer un corps sur la surface d'un autre, il apparaît, dans le plan de contact des corps, une force de frottement dont l'intensité peut être comprise entre zéro et la valeur $F_{\lim}$ appelée *force de frottement limite*.

La force de frottement est dirigée dans le sens opposé à celui dans lequel les forces actives tendent à déplacer le corps.

2. L'intensité de la force de frottement limite est égale au produit du coefficient de frottement statique par la force de pression normale ou la réaction normale:

$$F_{\lim} = f_0 N. \tag{43}$$

Le coefficient de frottement statique f_0 est un nombre pur; il se détermine expérimentalement et dépend de la matière des corps en contact et de l'état des surfaces (caractère du traitement, température, humidité, graissage, etc.).

3. L'intensité de la force de frottement limite ne dépend pas, dans les limites assez larges, des dimensions des surfaces en contact.

Réunissant les première et deuxième lois, nous pouvons écrire qu'à l'équilibre la force de frottement au repos $F \leqslant F_{\lim}$ ou

$$F \leqslant f_0 N. \tag{44}$$

Expérimentalement, le coefficient de frottement peut être déterminé à l'aide de l'appareil extrêmement simple représenté sur la

fig. 89. Une dalle horizontale AB et une barre rectangulaire D sont faites avec les matériaux pour lesquels on détermine le coefficient de frottement. La barre D sera soumise à la force de pesanteur P, équilibrée par la réaction normale N de la dalle, et à la force motrice Q qui, au repos, est équilibrée par la force de frottement F (la force Q est numériquement égale au poids du plateau E et de sa charge). Augmentant la charge du plateau, nous trouvons la charge Q^*

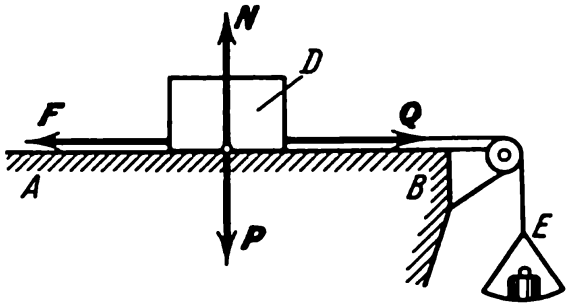


Fig. 89

pour laquelle la barre commence à se déplacer. Il est évident que la force limite de frottement $F_{lim} = Q^*$. Alors, puisque dans ce cas $N = P$, nous trouvons d'après la formule (43):

$$f_0 = \frac{F_{lim}}{N} = \frac{Q^*}{P}.$$

Faisant une série d'expériences analogues, on peut voir que si l'on fait varier dans des limites déterminées le poids de la barre P, la grandeur Q^* augmente proportionnellement à P; quant à la valeur de f_0, elle reste constante. Si l'on change les dimensions des faces de la barre dans des limites déterminées, f_0 restera également constante. Cela confirme la validité des deuxième et troisième lois du frottement. La légitimité de la première loi résulte du fait que pour toutes les charges Q inférieures à Q^* la barre reste au repos. Par conséquent, la force de frottement F qui équilibre la force Q peut effectivement prendre des valeurs quelconques à partir de zéro (lorsque $Q = 0$) jusqu'à F_{lim} (lorsque $Q \geqslant Q^*$).

Il faut tenir compte du fait que, tant que la barre se trouve au repos, la force de frottement F est égale à la force motrice Q et non pas à la grandeur $F_{lim} = f_0 N$. La force de frottement ne prend la valeur $f_0 N$ que lorsque la position d'équilibre devient limite.

Valeurs de quelques coefficients de frottement:

Bois sur bois	0,4 ÷ 0,7;
Métal sur métal	0,15 ÷ 0,25;
Acier sur glace	0,027.

On peut trouver les données plus précises dans différents aide-mémoire techniques.

Tout ce qui a été dit ci-dessus se rapportait au frottement de glissement au repos. Lors du mouvement la force de frottement est dirigée dans le sens opposé au mouvement et est égale au produit du coefficient de frottement dynamique par la force de pression normale :

$$F = fN.$$

Le coefficient de frottement de glissement dynamique f est également une grandeur adimensionnée et se détermine expérimentalement. La valeur du coefficient f dépend non seulement de la matière et de l'état des surfaces mais également, dans une certaine mesure, de la vitesse du mouvement relatif des corps. Dans la majorité des cas, lorsque la vitesse augmente, la grandeur f diminue d'abord quelque peu pour, ensuite, conserver une valeur presque constante.

§ 37. Réactions des liaisons en présence du frottement. Angle de frottement. Jusqu'à présent, dans la résolution des problèmes de statique, nous avons négligé le frottement et admis que les surfaces des liaisons étaient lisses et leurs réactions dirigées suivant les

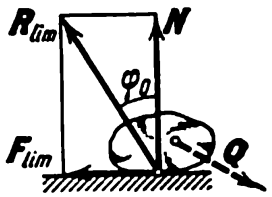


Fig. 90

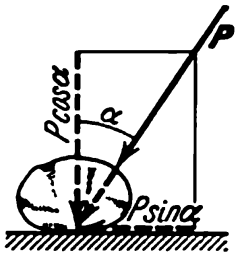


Fig. 91

normales à ces surfaces. La réaction d'une liaison réelle (avec frottement) sera la somme de deux composantes : la réaction normale N et la force de frottement F qui lui est perpendiculaire. Par conséquent, la réaction complète R s'écartera de la normale à la surface d'un certain angle. Lorsque la force de frottement variera de zéro jusqu'à F_{lim}, la force R variera de N à R_{lim} et son angle avec la normale augmentera de zéro jusqu'à une certaine valeur limite φ_0 (fig. 90). L'angle maximum φ_0 que la réaction complète en présence du frottement forme avec la normale à la surface est appelé *angle de frottement.*

On voit d'après le dessin que

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{F_{lim}}{N}.$$

Comme $F_{lim} = f_0 N$, nous trouvons la relation suivante entre l'angle de frottement et le coefficient de frottement :

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = f_0. \tag{45}$$

A l'équilibre, la réaction complète $\boldsymbol{R}$ peut passer n'importe où à l'intérieur de l'angle de frottement. Cela dépend des forces motrices. Lorsque l'équilibre devient limite, la réaction s'écartera de la normale d'un angle φ_0.

Si l'on applique à un corps reposant sur une surface rugueuse une force P formant un angle α avec la normale (fig. 91), le corps ne se déplacera que lorsque l'effort moteur $P \sin \alpha$ sera supérieur à $F_{\lim} = f_0 P \cos \alpha$ (nous admettons $N = P \cos \alpha$, en négligeant le poids du corps). Mais l'inégalité $P \sin \alpha > f_0 P \cos \alpha$ où $f_0 = \operatorname{tg} \varphi_0$, n'est remplie que lorsque $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \varphi_0$, c'est-à-dire lorsque $\alpha > \varphi_0$. Par conséquent, une force qui forme avec la normale un angle α inférieur à l'angle de frottement φ_0 ne pourra déplacer le corps le long de la surface donnée. Cela explique les phénomènes bien connus de calage ou d'autofreinage des corps.

§ 38. Equilibre en présence du frottement. L'étude de l'équilibre des corps compte tenu du frottement consiste habituellement à examiner la position d'équilibre limite lorsque la force de frottement atteint sa valeur maximum $F_{\lim}$. Si l'on résout le problème analytiquement, on représente dans ce cas la réaction par les deux composantes N et $F_{\lim}$, où $F_{\lim} = f_0 N$. Ensuite, on établit les conditions d'équilibre habituelles de la statique, on y remplace $F_{\lim}$ par les grandeurs $f_0 N$ et, résolvant les équations obtenues, on détermine les grandeurs cherchées.

S'il faut déterminer toutes les positions d'équilibre possibles il suffit pour résoudre le problème de n'examiner que les positions d'équilibre limite. Les autres positions d'équilibre se trouveront si l'on diminue, dans la solution obtenue, le coefficient de frottement f_0 jusqu'à zéro [1].

Remarquons que dans les positions d'équilibre qui ne sont pas des cas limites, la force de frottement F n'est pas égale à $F_{\lim}$ et son intensité doit se déterminer à partir des conditions d'équilibre comme une nouvelle inconnue (voir deuxième partie du problème 32).

Lorsqu'on résout le problème géométriquement, il est plus commode de représenter la réaction par une seule force $\boldsymbol{R}$ qui, dans la position d'équilibre limite, s'écartera de la normale à la surface d'un angle φ_0.

Problème 32. Déterminer quelle est la force Q faisant un angle $\alpha = 30°$ avec l'horizontale qu'il faut appliquer à la charge de poids $P = 10$ kgf reposant sur un plan horizontal (fig. 92) pour la déplacer si le coefficient de frottement statique de la charge contre la surface $f_0 = 0{,}6$.

---

[1] En effet, lorsque l'équilibre est limite, la force de frottement $F = F_{\lim} = f_0 N$. Dans les autres positions d'équilibre $F < f_0 N$. Donc, ces positions peuvent être trouvées si l'on diminue dans l'égalité $F = f_0 N$ la grandeur f_0. Lorsque $f_0 = 0$ nous obtiendrons la position d'équilibre correspondant au cas où la liaison est lisse (idéale).

Solution. D'après les conditions du problème, il faut étudier la position d'équilibre limite de la charge. Dans cette position, la charge subit l'action des forces P, Q, N et $F_{\lim}$. Ecrivant les conditions d'équilibre pour les projections sur les axes de coordonnées, nous obtenons:

$$Q\cos\alpha - F_{\lim} = 0, \quad N + Q\sin\alpha - P = 0.$$

La dernière équation donne $N = P - Q\sin\alpha$. Alors

$$F_{\lim} = f_0 N = f_0 (P - Q\sin\alpha).$$

Portant cette valeur de $F_{\lim}$ dans la première équation et résolvant celle-ci, nous trouvons finalement

$$Q = \frac{f_0 P}{\cos\alpha + f_0 \sin\alpha} \approx 5{,}2 \text{ kgf}.$$

Si l'on applique à la charge une force moindre, par exemple la force $Q' = 4$ kgf, alors l'effort moteur sera égal à $Q' \cos 30° = 2\sqrt{3} = 3{,}46$ kgf; quant

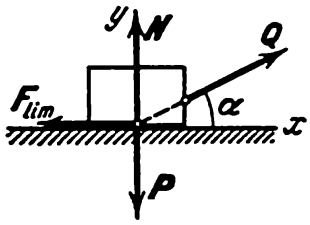


Fig. 92

à la force maximum de frottement qui peut apparaître, elle sera $F_{\lim} = f_0 (P - Q' \sin 30°) = 4{,}8$ kgf. Donc la charge restera au repos. Dans ce cas la force de frottement qui la maintient en équilibre se déterminera à partir de l'équation d'équilibre posée à l'aide des projections sur l'axe Ox et sera égale à la force motrice ($F' = Q' \cos 30° = 3{,}46$ kgf) et non pas à la force $F_{\lim}$.

Nous attirons l'attention sur le fait qu'au cours de tous les calculs il faut déterminer $F_{\lim}$ par la formule $F_{\lim} = f_0 N$, en tirant la valeur de N des conditions d'équilibre. La faute, que l'on commet souvent dans les problèmes semblables à celui qui vient d'être résolu, est d'estimer que $F_{\lim} = f_0 P$, alors que la pression sur le plan n'est pas, ici, égale au poids de la charge P.

Problème 33. Déterminer pour quelles valeurs de l'angle d'inclinaison α la charge reposant sur le plan incliné restera en équilibre si son coefficient de frottement contre le plan est égal à f_0.

Solution. Dans ce problème il faut déterminer toutes les positions d'équilibre de la charge. Pour cela, trouvons d'abord la position d'équilibre limite pour laquelle l'angle α est égal à $\alpha_{\lim}$. Dans cette position (fig. 93), la force de pesanteur P, la réaction normale N et la force de frottement limite $F_{\lim}$ agissent sur la charge. Construisant avec les forces énumérées un triangle fermé, nous trouvons que $F_{\lim} = N \operatorname{tg} \alpha_{\lim}$. Mais, d'autre part, $F_{\lim} = f_0 N$. Donc

$$\operatorname{tg} \alpha_{\lim} = f_0. \tag{a}$$

Si dans l'égalité obtenue on diminue f_0, la grandeur $\alpha_{\lim}$ diminuera elle aussi. D'où nous concluons que l'équilibre est également possible lorsque $\alpha < \alpha_{\lim}$. En définitive, toutes les valeurs de l'angle α, pour lesquelles la charge sera en équilibre, se déterminent par l'inégalité

$$\operatorname{tg} \alpha \leqslant f_0. \tag{b}$$

S'il n'y a pas de frottement ($f_0 = 0$), l'équilibre ne peut avoir lieu que lorsque $\alpha = 0$. Par conséquent, alors qu'en présence du frottement l'équilibre est possible lorsque l'angle α a une valeur quelconque comprise entre zéro et α_{lim}, en l'absence de frottement l'équilibre ne peut avoir lieu que quand l'angle α est égal à zéro. C'est ce qui distingue l'équilibre en présence du frottement de l'équilibre des systèmes avec liaisons idéales (sans frottement).

Le résultat obtenu et exprimé par l'égalité (a) peut être utilisé pour la détermination expérimentale du coefficient de frottement: il suffit pour cela de trouver par expérience l'angle α_{lim}.

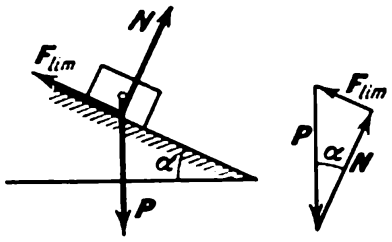


Fig 93.

Comme $f_0 = \operatorname{tg} \varphi_0$, avec φ_0 angle de frottement, on a $\alpha_{lim} = \varphi_0$, c'est-à-dire que l'angle maximum α pour lequel une charge reposant sur un plan incliné reste en équilibre est égal à l'angle de frottement.

Problème 34. Une barre coudée à angle droit s'appuie par sa partie verticale contre les saillies A et B pour lesquelles la différence de niveau est égale à h (fig. 94, *a*). Négligeant le poids de la barre, trouver pour quelle valeur de la

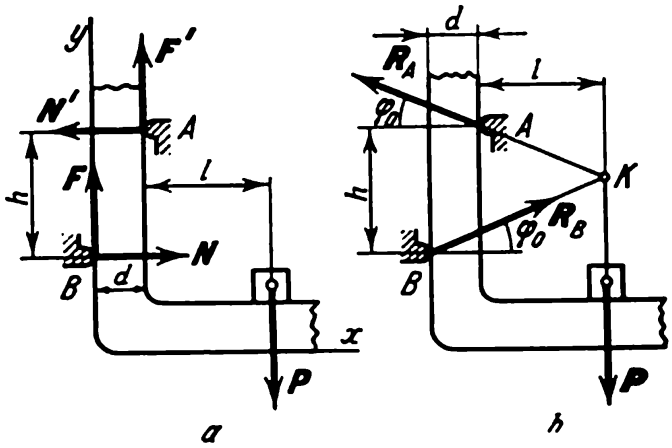


Fig. 94

largeur d la barre avec une charge reposant sur sa partie horizontale se trouvera en équilibre, quelle que soit la position de la charge. Le coefficient de frottement de la barre contre les éléments de guidage est égal à f_0.

Solution. Désignons le poids de la charge par P et sa distance à la partie verticale de la barre par l. Examinons la position d'équilibre limite de la barre pour laquelle $d = d_{lim}$. Dans cette position agissent sur la barre les forces P, N, F, N', F', où F et F' sont les forces de frottement limites. Posant les conditions d'équilibre (33) et prenant les moments par rapport au centre A,

nous obtenons:

$$N-N'=0, \qquad F+F'-P=0, \qquad Nh-Fd_{\lim}-Pl=0,$$

où $F = f_0N$, $F' = f_0N'$. Des deux premières équations nous tirons:

$$N = N', \; P = 2f_0N.$$

Portant ces valeurs dans la troisième équation et divisant par N, nous aurons

$$h-f_0d_{\lim}-2f_0l=0,$$

d'où

$$d_{\lim}=\frac{h}{f_0}-2l.$$

Si l'on diminue f_0 jusqu'à zéro, la partie droite de l'égalité augmentera jusqu'à l'infini. Donc, l'équilibre est possible pour n'importe quelle valeur de $d > d_{\lim}$. A son tour, $d_{\lim}$ prend une valeur maximum lorsque $l = 0$. Donc, la barre sera en équilibre indépendamment de la position de la charge (lorsque $l \geqslant 0$), si l'inégalité suivante est remplie:

$$d \geqslant \frac{h}{f_0}.$$

Plus le frottement est petit, plus d doit être grand. En l'absence de frottement ($f_0 = 0$), l'équilibre est, évidemment, impossible, car dans ce cas on a $d = \infty$.

Montrons encore comment ce problème se résout géométriquement. Nous représentons aux points A et B à la place des réactions normales et des forces de frottement les réactions complètes $\boldsymbol{R}_A$ et $\boldsymbol{R}_B$ qui, dans la position limite, s'écarteront de la normale d'un angle φ_0 (fig. 94, *b*). Alors, agiront sur la barre trois forces: $\boldsymbol{R}_A, \boldsymbol{R}_B, \boldsymbol{P}$. A l'équilibre les lignes d'action de ces forces doivent se couper en un même point, c'est-à-dire au point K où se coupent les forces $\boldsymbol{R}_A$ et $\boldsymbol{R}_B$. Nous obtenons ainsi l'égalité évidente (voir dessin) $h = (l+d_{\lim})\operatorname{tg}\varphi_0 + l\operatorname{tg}\varphi_0$ ou bien $h=(2l+d_{\lim})f_0$, puisque $\operatorname{tg}\varphi_0=f_0$. En définitive, nous trouvons pour $d_{\lim}$ la même valeur que celle qui a été obtenue par la résolution analytique.

Ce problème donne un exemple d'un dispositif d'autofreinage dont on se sert souvent dans la pratique.

Problème 35. Négligeant le poids de l'échelle AB (fig. 95), trouver pour quelles valeurs de l'angle α une personne peut monter sur cette échelle jusqu'à son extrémité B, si l'angle de frottement de l'échelle contre le plancher et contre le mur est égal à φ_0.

Solution. Examinons la position d'équilibre limite de l'échelle et utilisons le procédé géométrique de résolution. Dans sa position limite, l'échelle subit les réactions $\boldsymbol{R}_A$ et $\boldsymbol{R}_B$ du plancher et du mur écartées des normales à ces surfaces de l'angle de frottement φ_0. Les lignes d'action des réactions se coupent au point K. Par conséquent, à l'équilibre, la troisième force $\boldsymbol{P}$ (le poids de la personne) qui agit sur l'échelle doit également passer par le point K. C'est pourquoi, dans la position représentée sur la figure, on ne peut pas monter plus haut que le point D. Pour qu'on puisse monter jusqu'au point B, les lignes d'action des forces $\boldsymbol{R}_A$ et $\boldsymbol{R}_B$ doivent se couper quelque part sur la droite BO, ce qui n'est possible que si la force $\boldsymbol{R}_A$ est dirigée suivant AB, c'est-à-dire lorsque l'angle $\alpha \leqslant \varphi_0$.

Donc, une personne peut monter sur une échelle jusqu'à son extrémité lorsque l'échelle forme avec le mur un angle non supérieur à l'angle de frottement de l'échelle contre le plancher. Le frottement contre le mur ne joue dans ce cas aucun rôle, c'est-à-dire que le mur peut être lisse.

§ 39. Frottement d'un fil contre une surface cylindrique. Une force P est appliquée à un fil passé sur un arbre cylindrique (fig. 96). Trouvons quelle est la force minimum Q qu'il faut appliquer à l'autre extrémité du fil pour conserver l'équilibre.

Pour résoudre ce problème, examinons l'équilibre de l'élément de fil DE de longueur $dl = R\,d\theta$, où R est le rayon de l'arbre. La différence de tension du fil aux points D et E qui est égale à dT est équilibrée par la force de frottement $dF = f_0 dN$ (dN est la réaction normale), car, lorsque la force Q est minimum, l'équilibre est limite. Donc

$$dT = f_0\,dN.$$

Nous trouverons la grandeur dN à partir de l'équation d'équilibre posée à l'aide des projections sur l'axe Oy. Tenant compte du fait que le sinus d'un

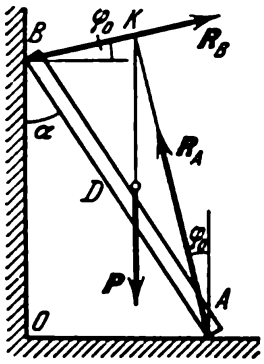


Fig. 95

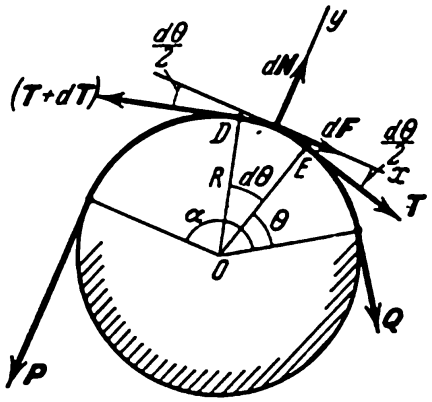


Fig. 96

petit angle est égal à cet angle et négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, nous aurons

$$dN = T\sin\frac{d\theta}{2} + (T + dT)\sin\frac{d\theta}{2} = 2T\,\frac{d\theta}{2} = T\,d\theta.$$

Portant cette valeur de dN dans l'égalité précédente, nous obtenons

$$dT = f_0 T\,d\theta.$$

Divisons les deux membres de l'égalité par T et intégrons, en prenant comme limites d'intégration, à droite de 0 à α, à gauche de Q à P (puisque la tension du fil au point $\theta = 0$ est égale à Q, et au point $\theta = \alpha$ est égale à P). Nous obtenons:

$$\int_Q^P \frac{dT}{T} = f_0 \int_0^\alpha d\theta \quad \text{ou bien} \quad \operatorname{Log}\frac{P}{Q} = f_0\alpha.$$

Il en résulte que $P/Q = e^{f_0\alpha}$ ou bien

$$Q = Pe^{-f_0\alpha}. \tag{46}$$

Comme nous le voyons, la force nécessaire Q ne dépend que du coefficient de frottement f_0 et de l'angle α; la grandeur Q ne dépend pas du rayon de l'arbre. En l'absence de frottement ($f_0 = 0$), nous obtenons, comme il fallait s'y attendre, $Q = P$. Dans la pratique il est très important de savoir que, augmentant l'angle α (par l'enroulement du fil), on peut considérablement diminuer la grandeur Q nécessaire à l'équilibrage de la force P, ce que montre le tableau 1.

Tableau 1

Valeurs de Q/P pour $f_0 = 0{,}5$
(câble de chanvre sur bois)

Nombre de tours	α	$Q/P = e^{-f_0\alpha}$
$\frac{1}{2}$ tour	π	0,208
1 tour	2π	0,043
$1\frac{1}{2}$ tour	3π	0,009
2 tours	4π	0,002

Par exemple, on peut équilibrer une tension d'une tonne rien qu'avec une force de 2 kgf en enroulant deux fois un câble de chanvre autour d'un poteau en bois.

La formule (46) définit également le rapport des tensions P et Q des parties menante et menée d'une courroie passée sur une poulie tournant d'un mouvement uniforme en l'absence de glissement de la courroie sur la poulie. Admettant, par exemple, que $\alpha = \pi$ et prenant pour une courroie en cuir et une poulie en fonte $f_0 = 0{,}3$, nous obtenons que le rapport des tensions $Q/P = e^{-0{,}3\pi} \approx 0{,}4$.

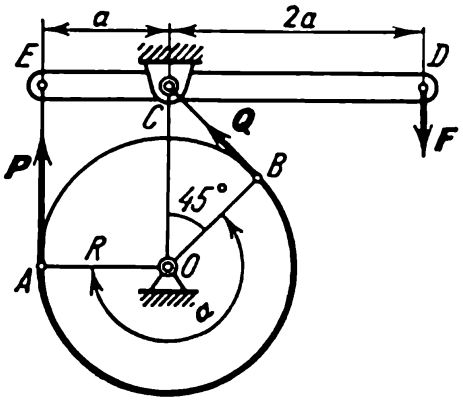


Fig. 97

Problème 36. Une force F est appliquée au levier DE d'un frein à bande (fig. 97). Déterminer le moment freinant M_f qui agit sur la poulie de rayon R si $CD = 2CE$ et si le coefficient de frottement de la bande contre la poulie $f_0 = 0{,}5$.

Solution. La poulie et la bande AB qui l'entoure sont soumises à la force P appliquée au point A (il est évident que $P = 2F$) et à la force Q appliquée au point B et définie par la formule (46). Dans notre cas $f_0 = 0{,}5$ et $\alpha = \frac{5}{4}\pi = 3{,}93$ radians. On a:

$$Q = 2Fe^{-\frac{5}{8}\pi} \approx 0{,}28F.$$

Le moment cherché

$$M_f = (P - Q)\,R = 1{,}72\ FR \text{ mkg}.$$

Le moment sera d'autant plus grand que Q sera plus petit, c'est-à-dire que le coefficient de frottement f_0 et l'angle α seront plus grands.

§ 40. Frottement de roulement et frottement de rotation. Le frottement de roulement se traduit par une résistance au roulement d'un corps sur la surface d'un autre.

Examinons un rouleau cylindrique de rayon R et de poids P reposant sur une surface rugueuse horizontale. Appliquons à l'axe du rouleau une force Q (fig. 98, *a*) inférieure à $F_{\lim}$. Alors apparaît au point A une force de frottement F numériquement égale à Q et qui s'opposera au glissement du cylindre sur la surface. Si l'on admet que la réaction normale N est également appliquée au point A, elle équilibrera la force P, et les forces Q et F formeront un couple provoquant le roulement du cylindre. Avec un tel schéma, le roulement devrait commencer sous l'action d'une force quelconque Q, quelque petite qu'elle soit.

L'expérience montre que tout se passe autrement. Cela s'explique par le fait qu'à la suite de la déformation des corps, leur contact

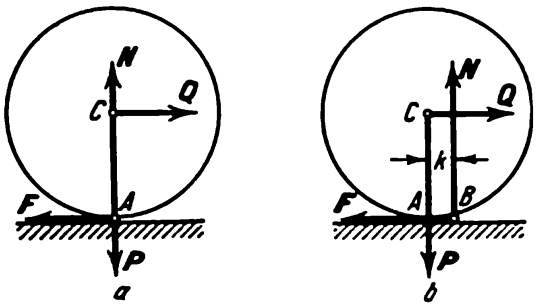


Fig. 98

se fait suivant une certaine surface AB (fig. 98, *b*). Sous l'effet de la force Q, l'intensité des pressions diminue sur le bord A et elle augmente sur le bord B. En définitive, la réaction N se trouve déplacée du côté où agit la force Q. Lorsque Q augmente, ce déplacement croît jusqu'à une grandeur limite k. Ainsi, dans la position limite le couple ($Q_{\lim}$, F) de moment $Q_{\lim}R$ et le couple d'équilibrage (N, P) de moment Nk agiront sur le rouleau. De l'égalité des moments nous tirons $Q_{\lim}R = Nk$ ou

$$Q_{\lim} = \frac{k}{R} N. \tag{47}$$

Tant que $Q < Q_{\lim}$, le rouleau se trouve au repos ; lorsque $Q > Q_{\lim}$, le roulement commence.

La grandeur k de la formule (47) qui a la dimension de la longueur est appelée *coefficient de frottement de roulement*. Habituellement on la mesure en centimètres. La valeur du coefficient k dépend de la matière du corps et se détermine expérimentalement. Citons certaines valeurs de ce coefficient :

Bois sur bois . . . . . 0,05 ÷ 0,08 cm,
Acier doux sur acier (roue sur rail). . . . . 0,005 cm,
Acier trempé sur acier (roulement à billes). . . . . 0,001 cm.

Le rapport k/R, pour la majorité des matériaux, est beaucoup plus petit que le coefficient de frottement statique f_0. Ainsi, en pratique on tend à remplacer le glissement par le roulement (roues, rouleaux, roulements à billes, etc.).

Problème 37. Déterminer pour quelles valeurs de l'angle α (fig. 99) le cylindre de rayon R reposant sur le plan incliné reste au repos, si le coefficient de frottement de roulement est égal à k.

Solution. Examinons la position d'équilibre limite, lorsque $\alpha = \alpha_1$. Décomposant la force P en les composantes P_1 et P_2 (voir fig. 99), nous trouvons que dans ce cas la force motrice $Q_{\lim} = P_1 = P \sin \alpha_1$ et la réaction normale $N = P_2 = P \cos \alpha_1$. Alors, d'après la formule (47)

$$P \sin \alpha_1 = \frac{k}{R} P \cos \alpha_1$$

ou bien

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{k}{R}.$$

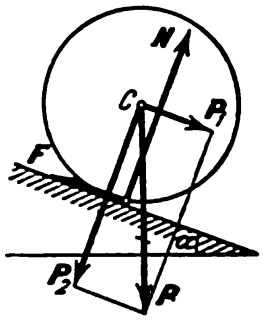


Fig. 99

Lorsque k diminue jusqu'à zéro, la grandeur α_1 diminue également jusqu'à zéro. Nous en concluons que l'équilibre se conserve quel que soit l'angle $\alpha < \alpha_1$. On peut utiliser le résultat obtenu pour déterminer expérimentalement le coefficient k : il suffit de trouver par expérience l'angle α_1.

Notion de frottement de rotation. Si l'on applique à une sphère posée sur un plan horizontal un couple de forces de moment M disposé également dans un plan horizontal, ce couple aura tendance à faire tourner la sphère autour d'un axe vertical. L'expérience montre que la sphère ne commencera à tourner que lorsque la valeur de M sera supérieure à une certaine valeur limite $M_{\lim}$ définie par l'égalité

$$M_{\lim} = \lambda N, \tag{48}$$

où N, force de la pression normale de la sphère sur le plan, est égale, dans ce cas, au poids de la sphère. Ce résultat s'explique par la présence du frottement dit de rotation, c'est-à-dire d'une résistance à la rotation due au frottement de la sphère contre le plan. Des résistances analogues apparaissent dans les paliers à support (crapaudines). Le coefficient λ qui entre dans l'égalité (48) est appelé *coefficient de frottement de rotation*. Sa dimension est celle de la longueur. La valeur de ce coefficient est très petite (5 à 10 fois moindre que celle du coefficient de frottement de roulement k).

Chapitre VII

SYSTÈMES DE COUPLES ET DE FORCES DISPOSÉS ARBITRAIREMENT DANS L'ESPACE[1]

§ 41. Représentation vectorielle du moment d'une force par rapport à un centre. Avant de passer à la résolution des problèmes de statique pour un système de forces arbitrairement disposées dans l'espace, il faut préciser et développer plusieurs notions introduites auparavant. Commençons par la notion de moment d'une force.

1. Représentation du moment par un vecteur. Le moment de la force F par rapport au centre O (fig. 100), caractérisant l'effet de rotation de la force, se définit par les trois éléments suivants : 1) le module du moment égal au produit du module de la force par son bras de levier, c'est-à-dire Fh; 2) le plan de rotation OAB qui passe par la ligne d'action de la force F et par le centre O; 3) le sens de rotation dans ce plan. Lorsque toutes les forces et le centre O sont disposés dans un même plan, il n'est pas nécessaire de se donner chaque fois le plan de rotation OAB, et le moment peut alors être défini comme une grandeur scalaire égale à $\pm Fh$, où le signe indique le sens de la rotation (voir § 14).

Mais dans le cas de forces arbitrairement disposées dans l'espace, les plans de rotation différeront selon les forces et devront être donnés chaque fois. La position d'un plan dans l'espace peut être fixée si l'on se donne un segment (vecteur) perpendiculaire à ce plan. Si, en même temps, on choisit le module de ce vecteur égal au module du moment de la force et si l'on convient de diriger ce vecteur de façon que son sens définisse le sens de rotation de la force, un tel vecteur définira entièrement les trois éléments qui caractérisent le moment de la force par rapport au centre O.

C'est pourquoi, dans le cas général, *le moment $m_O(F)$ de la force F par rapport au centre O* (fig. 100) *sera représenté par le vecteur M_O appliqué au centre O, égal en module (à l'échelle choisie) au produit du module de la force F par son bras de levier h et perpendiculaire au plan OAB passant par le centre O et la force F. Nous dirigerons le vecteur M_O du côté depuis lequel on voit la rotation de la force s'effectuer dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.* Ainsi, le vecteur M_O caractérisera simultanément le module du moment, le plan de rotation OAB différent pour les différentes forces, et le sens de rota-

---

[1] Le lecteur qui ne s'intéresse qu'aux procédés de résolution des problèmes sur l'équilibre des corps soumis à l'action d'un système de forces tridimensionnel peut sauter les paragraphes 44-47 consacrés à la réduction des couples et des forces.

tion dans ce plan. Le point d'application du vecteur M_O définit la position du centre du moment.

2. Expression du moment d'une force à l'aide du produit vectoriel. Considérons le produit vectoriel $\overline{OA} \times F$ des vecteurs $\overline{OA}$ et F (fig. 100). Par définition [1],

$$|\overline{OA} \times F| = 2 \text{ surf. } \triangle OAB = M_O,$$

puisque le module du vecteur M_O est aussi égal à 2 surf. $\triangle OAB$. Le vecteur $(\overline{OA} \times F)$ est dirigé perpendiculairement au plan OAB dans un sens tel que la plus petite rotation amenant $\overline{OA}$ en coïncidence avec F (si on les porte à partir d'un même point), vue depuis

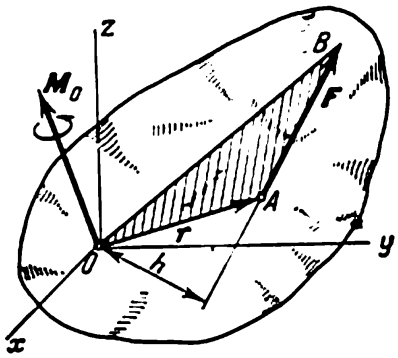


Fig. 100

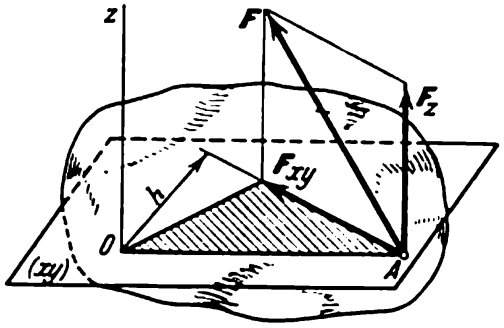


Fig. 101

l'extrémité du vecteur, s'effectue dans le sens contraire aux aiguil. les d'une montre, c'est-à-dire que $(\overline{OA} \times F)$ est dirigé comme le vecteur M_O. Par conséquent, les vecteurs $(\overline{OA} \times F)$ et M_O coïncident par leurs modules, directicns et sens et, comme il est facile de le vérifier, par leurs dimensions; ces deux vecteurs représentent donc une même grandeur. On a:

$$M_O = \overline{OA} \times F \quad \text{ou} \quad M_O = r \times F, \tag{49}$$

où le vecteur $r = \overline{OA}$ est le rayon vecteur du point A par rapport au centre O.

Ainsi, *le moment de la force F par rapport au centre O est égal au produit vectoriel du rayon vecteur $r = \overline{OA}$, joignant le centre O au point d'application de la force A, par la force elle-même.* Il est quelquefois commode de se servir de cette expression du moment d'une force au cours de la démonstration de certains théorèmes.

[1] Le produit vectoriel $a \times b$ des vecteurs a et b est le vecteur c égal en module à l'aire du parallélogramme, construit sur les vecteurs a et b, et dirigé perpendiculairement au plan de ces vecteurs dans le demi-espace depuis lequel on voit la rotation la plus courte amenant a en coïncidence avec b s'effectuer dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre.

§ 42. Moment d'une force par rapport à un axe. Pour passer à la résolution des problèmes de statique dans le cas d'un système arbitraire de forces disposées dans l'espace, il est nécessaire d'introduire encore la notion de moment d'une force par rapport à un axe.

Le moment d'une force par rapport à un axe caractérise l'effet rotatif produit par cette force tendant à faire tourner le corps autour de l'axe donné. Considérons un solide capable de tourner autour d'un certain axe z (fig. 101). Soit une force F agissant sur ce corps et appliquée au point A. Menons par le point A le plan xy perpendiculaire à l'axe z et décomposons la force F en les composantes F_z parallèle à l'axe z et F_{xy} disposée dans le plan xy (F_{xy} est en même temps la projection de la force F sur le plan xy). La force F_z, dirigée parallèlement à l'axe z, ne peut évidemment pas faire tourner le corps autour de cet axe (elle ne tend qu'à déplacer le corps le long de l'axe z). Par conséquent, tout l'effet rotatif produit par la force F sera celui de sa composante F_{xy}. D'où nous concluons que

$$m_z(F) = m_z(F_{xy}), \tag{50}$$

où $m_z(F)$ désigne le moment de la force F par rapport à l'axe z.

Mais l'effet rotatif de la force F_{xy}, disposée dans le plan perpendiculaire à l'axe z, sera le même par rapport à l'axe z ou par rapport au centre O où cet axe coupe le plan xy. Donc, $m_z(F_{xy}) = m_O(F_{xy})$ ou bien, selon l'égalité (50) [1],

$$m_z(F) = m_O(F_{xy}) = \pm F_{xy}h. \tag{51}$$

En définitive, on est amené à la définition suivante: *le moment d'une force par rapport à un axe est la grandeur algébrique égale au moment de la projection de la force sur le plan perpendiculaire à l'axe par rapport au point d'intersection de l'axe avec le plan.*

Nous admettrons que le moment est positif si, de l'extrémité positive de l'axe, la rotation effectuée par la force F_{xy} est vue comme s'effectuant dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre; si la rotation s'effectue comme celle des aiguilles d'une montre, le moment sera négatif.

D'après la figure 101, on voit que pour le calcul du moment à l'aide de la formule (51), on peut mener le plan xy par n'importe quel point de l'axe z. Ainsi, pour trouver le moment d'une force par rapport à l'axe z (fig. 102) il faut: 1) mener le plan xy perpendiculaire à l'axe z (en n'importe quel point); 2) projeter la force F sur ce plan et calculer la grandeur F_{xy}; 3) abaisser du point O d'intersection de l'axe avec le plan la perpendiculaire à F_{xy} et trouver sa longueur h; 4) calculer le produit $F_{xy}h$; 5) déterminer le signe du moment.

---

[1] Le symbole $m_O(F)$, utilisé pour les systèmes plans de forces, dont on se servira par la suite, désigne la grandeur numérique (algébrique) du moment.

Pour le calcul des moments il faut avoir en vue les cas particuliers suivants :

1) Si la force est parallèle à l'axe, son moment par rapport à cet axe est égal à zéro (puisque $F_{xy} = 0$).

2) Si la ligne d'action de la force coupe l'axe, son moment par rapport à cet axe est aussi égal à zéro (puisque $h = 0$).

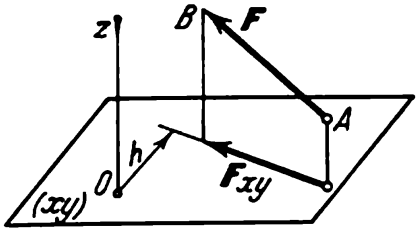


Fig. 102

Associant ces deux cas, nous concluons que *le moment d'une force par rapport à un axe est égal à zéro si la force et l'axe se trouvent dans un même plan.*

3) Si la force est perpendiculaire à l'axe, son moment par rapport à cet axe est égal au produit du module de la force par la distance entre la force et l'axe.

Problème 38. Trouver les moments par rapport aux axes de coordonnées des forces P et Q qui agissent sur la dalle horizontale représentée sur la fig. 103.

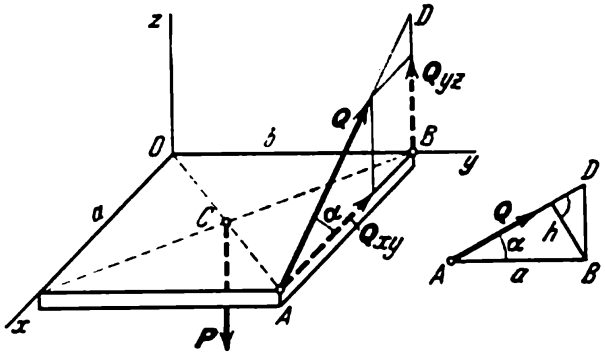


Fig. 103

Solution. 1) La force P est parallèle à l'axe z ; elle est perpendiculaire aux axes x et y et en est distante de $b/2$ et $a/2$. Donc, compte tenu des signes :

$$m_x(P) = -P\frac{b}{2}, \quad m_y(P) = P\frac{a}{2}, \quad m_z(P) = 0.$$

2) Pour calculer $m_x(Q)$ nous projetons la force Q sur le plan yz ; nous obtenons

$$Q_y = Q \sin \alpha$$

Le bras de levier de la force Q_{yz} par rapport au point O est égal à b et la rotation provoquée par Q_{yz} est positive; donc,

$$m_x(Q) = bQ \sin \alpha.$$

Calculons maintenant $m_y(Q)$. La force Q se trouve dans le plan ABD perpendiculaire à l'axe y et celui-ci perce le plan au point B. Donc, $Q_{xz} = Q$. Abaissant du point B la perpendiculaire sur la ligne d'action de la force Q (voir dessin à droite), nous trouvons que sa longueur est égale à $h = a \sin \alpha$. Finalement, tenant compte du sens de rotation, nous obtenons

$$m_y(Q) = -Qa \sin \alpha.$$

Enfin, pour calculer $m_z(Q)$, nous projetons la force Q sur le plan xy et trouvons que $Q_{xy} = Q \cos \alpha$ et le bras de cette projection par rapport au centre O est égal à b. C'est pourquoi, compte tenu du signe:

$$m_z(Q) = bQ \cos \alpha.$$

Expressions analytiques des moments d'une force par rapport aux axes de coordonnées. Menons par un point arbitraire O un système d'axes de coor-

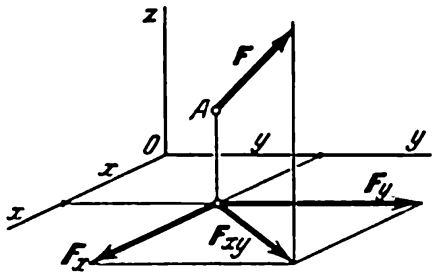


Fig. 104

données rectangulaires (fig. 104) et considérons la force F appliquée au point A, dont les coordonnées sont x, y, z. Calculons d'abord analytiquement le moment de la force F par rapport à l'axe z. Pour cela, projetons la force F sur le plan xy et décomposons la projection obtenue F_{xy} en les composantes F_x et F_y; numériquement ces composantes seront évidemment égales aux projections de la force F sur les axes x et y. Alors, par définition,

$$m_z(F) = m_O(F_{xy}) = m_O(F_x) + m_O(F_y).$$

La dernière égalité découle du théorème de Varignon. Mais, comme on le voit sur la figure, $m_O(F_x) = -yF_x$, $m_O(F_y) = xF_y$. On a donc:

$$m_z(F) = xF_y - yF_x.$$

On calcule de manière analogue les moments par rapport aux deux autres axes. En définitive, nous obtenons:

$$\left.\begin{aligned} m_x(F) &= yF_z - zF_y, \\ m_y(F) &= zF_x - xF_z, \\ m_z(F) &= xF_y - yF_x. \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

Les formules (52) donnent les *expressions analytiques* des moments d'une force par rapport aux axes de coordonnées. Grâce à elles, on peut calculer les moments si l'on connaît les projections de la force et les coordonnées de son point d'application.

Problème 39. Calculer analytiquement les moments de la force Q, représentée sur la fig. 103, par rapport aux axes de coordonnées.

Solution. La force Q est appliquée au point A de coordonnées $x = a$, $y = b$, $z = 0$. Ses projections sur les axes sont égales à:

$$Q_x = -Q \cos \alpha, \; Q_y = 0, \; Q_z = Q \sin \alpha.$$

Portant ces valeurs dans les formules (52), nous obtenons:

$$m_x(Q) = bQ \sin \alpha, \quad m_y(Q) = -aQ \sin \alpha, \quad m_z(Q) = bQ \cos \alpha.$$

§ 43. Relation entre les moments d'une force par rapport à un centre et par rapport à un axe. Soit une force F agissant sur un corps et appliquée au point A (fig. 105). Menons un axe z et prenons sur

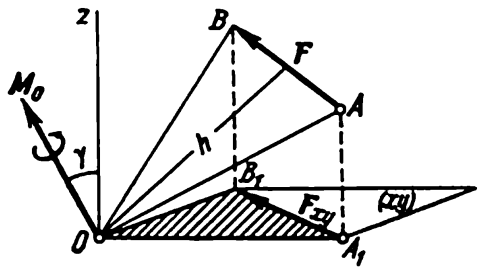


Fig. 105

lui un point arbitraire O. Le moment de la force F par rapport au centre O se représentera par le vecteur M_O perpendiculaire au plan OAB et de module

$$M_O = Fh = 2 \text{ surf.} \triangle OAB.$$

Menant maintenant par le point O le plan xy perpendiculaire à l'axe z et projetant sur lui la force F, nous trouvons d'après la formule (51) que

$$m_z(F) = m_O(F_{xy}) = 2 \text{ surf.} \triangle OA_1B_1.$$

Mais le triangle OA_1B_1 est la projection du triangle OAB sur le plan xy. L'angle entre les plans de ces triangles est égal à l'angle entre les perpendiculaires aux plans, c'est-à-dire est égal à γ. Alors, selon la formule géométrique connue, surf. $\triangle OA_1B_1 =$ $=$surf. $\triangle OAB \cos \gamma$.

Multipliant les deux membres de cette égalité par 2 et remarquant que les surfaces doubles des triangles OA_1B_1 et OAB sont respectivement égales à $m_z(F)$ et M_O, nous trouvons en définitive

$$m_z(F) = M_O \cos \gamma. \tag{53}$$

Puisque le produit $M_O \cos \gamma$ donne la projection du vecteur $\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$ sur l'axe z, l'égalité (53) peut encore être présentée sous la forme

$$m_z(\boldsymbol{F}) = M_z \text{ ou } m_z(\boldsymbol{F}) = [\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})]_z. \tag{54}$$

Ainsi, nous avons démontré qu'entre le moment de la force par rapport à un axe et son moment par rapport à un centre quelconque disposé sur cet axe existe la relation suivante: *le moment de la force* $\boldsymbol{F}$ *par rapport à un axe est égal à la projection sur cet axe du vecteur représentant le moment de la force par rapport à un centre quelconque choisi sur cet axe.*

§ 44. **Représentation vectorielle du moment d'un couple de forces.** L'action d'un couple de forces sur un corps se caractérise: 1) par la grandeur du module du moment du couple, 2) par le plan d'action,

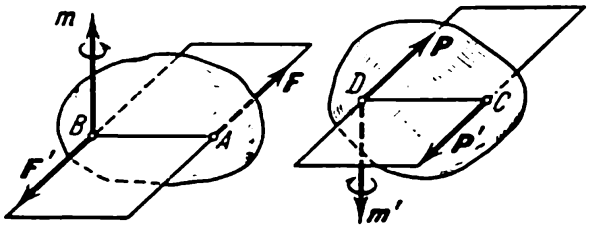


Fig. 106

3) par le sens de rotation dans ce plan. Lorsqu'on considère des couples non disposés dans un même plan, il est nécessaire pour caractériser chacun des couples de fixer les trois éléments cités ci-dessus. On peut le faire si l'on convient, par analogie avec le moment d'une force, de représenter le moment d'un couple par un vecteur construit d'une façon appropriée, à savoir: *on représentera le moment d'un couple par le vecteur* $\boldsymbol{m}$ *ou* $\boldsymbol{M}$ *dont le module sera égal (à l'échelle choisie) au module du moment du couple, c'est-à-dire au produit de l'une de ses forces par le bras de levier, et qui sera dirigé perpendiculairement au plan d'action du couple dans le sens tel que la rotation du couple, vue depuis l'extrémité du vecteur, s'effectue dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre* (fig. 106).

Puisqu'on peut disposer un couple n'importe où dans le plan de son action ou dans un plan parallèle à ce dernier (§ 19), on peut donc appliquer le vecteur $\boldsymbol{m}$ en un point quelconque du corps (un tel vecteur est dit *libre*).

On voit que le vecteur $\boldsymbol{m}$ définit effectivement le couple donné, puisque, connaissant $\boldsymbol{m}$ et menant un plan quelconque perpendiculaire à $\boldsymbol{m}$, nous trouverons le plan d'action du couple; mesurant la longueur de $\boldsymbol{m}$, nous déterminerons le module du moment du couple; le sens de $\boldsymbol{m}$ nous informera sur le sens de rotation du couple.

Comme nous le savons (§ 18), le module du moment d'un couple est égal au moment de l'une de ses forces par rapport au point auquel est appliquée l'autre force, c'est-à-dire $m = m_B(F)$; par leurs directions et sens les vecteurs de ces moments sont identiques (fig. 106 et 100). Par conséquent,

$$m = m_B(F) = m_A(F').$$

§ 45. Composition des couples dans l'espace. Conditions d'équilibre des couples. La règle de composition des couples non coplanaires est donnée par le théorème suivant: *un système quelconque*

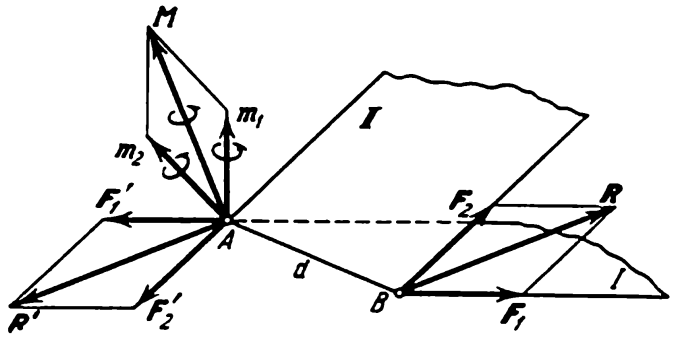


Fig. 107

de couples agissant sur un corps solide parfait est équivalent à un seul couple de moment égal à la somme géométrique des moments des couples composants.

Démontrons d'abord le théorème pour un système de deux couples de forces de moments m_1 et m_2 disposés dans les plans (I) et (II) (fig. 107). Prenons sur la ligne d'intersection de ces plans le segment $AB = d$. Utilisant les propriétés des couples démontrées au § 19, représentons le couple de moment m_1 par les forces F_1, F_1' et le couple de moment m_2 par les forces F_2, F_2' appliquées respectivement en A et B. On aura évidemment $F_1 d = m_1$, $F_2 d = m_2$.

Composant les forces appliquées aux points A et B, nous nous convainquons que les couples (F_1, F_1') et (F_2, F_2') sont remplacés effectivement par un seul couple (R, R'). Cherchons le moment M de ce couple. Puisque $R = F_1 + F_2$ et que le moment d'un couple est égal au moment de l'une de ses forces par rapport au point d'application de l'autre force, on aura, d'après la formule (49):

$$M = \overline{AB} \times R = \overline{AB} \times (F_1 + F_2) = (\overline{AB} \times F_1) + (\overline{AB} \times F_2).$$

Mais $\overline{AB} \times F_1 = m_1$ et $\overline{AB} \times F_2 = m_2$. Par conséquent,

$$M = m_1 + m_2, \tag{55}$$

c'est-à-dire que le vecteur $\boldsymbol{M}$ se représente par la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs $\boldsymbol{m}_1$ et $\boldsymbol{m}_2$. Le théorème est ainsi démontré pour deux couples.

Si nous considérons un système de n couples de moments $\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_2$, . . ., $\boldsymbol{m}_n$, nous obtiendrons en appliquant la formule (55) que le système de couples se remplace effectivement par un seul couple de moment

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2 + \ldots + \boldsymbol{m}_n = \Sigma \boldsymbol{M}_k \tag{56}$$

On peut trouver le vecteur $\boldsymbol{M}$ comme le côté qui ferme le polygone construit avec les vecteurs composants.

Si les vecteurs composants ne se trouvent pas dans un même plan, il est plus commode de faire les calculs analytiquement. Menant des axes de coordonnées et se basant sur le théorème des projections d'une somme de vecteurs sur un axe, nous tirerons de l'égalité (56) que

$$M_x = \sum m_{kx}, \quad M_y = \sum m_{ky}, \quad M_z = \sum m_{kz}. \tag{57}$$

Connaissant ces projections on peut construire le vecteur $\boldsymbol{M}$. Son module est calculé d'après la formule

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

Les résultats obtenus permettent de trouver facilement les conditions d'équilibre d'un système de couples agissant sur un solide. Puisque tout système de couples se remplace par un seul couple dont le moment est défini par l'égalité (56), on doit avoir à l'équilibre $\boldsymbol{M} = 0$ ou

$$\Sigma \boldsymbol{m}_k = 0,$$

c'est-à-dire que le polygone construit avec les vecteurs des moments des couples qui agissent sur le corps doit être fermé.

On trouvera les conditions d'équilibre analytiques si l'on tient compte que $M = 0$ seulement si $M_x = 0$, $M_y = 0$ et $M_z = 0$, c'est-à-dire, d'après les formules (57), si

$$\sum m_{kx} = 0, \quad \sum m_{ky} = 0, \quad \sum m_{kz} = 0. \tag{58}$$

En conclusion, remarquons que lorsque tous les couples se trouvent dans un même plan (ou dans des plans parallèles), les vecteurs des moments de ces couples sont dirigés suivant une même droite et leur composition se réduit à une opération algébrique. C'est précisément ce résultat qui a été obtenu au § 20.

Problème 40. Un solide est soumis à l'action de deux couples disposés dans des plans perpendiculaires l'un à l'autre (fig. 108). Les modules des moments de chacun des couples sont numériquement égaux à 3 mkg. Trouver le couple résultant.

S o l u t i o n. Représentons les moments des couples sous forme de vecteurs $\boldsymbol{m}_1$ et $\boldsymbol{m}_2$ appliqués à un certain point A ; le moment du couple résultant se

représentera par le vecteur $\boldsymbol{m}$. Le couple résultant sera donc disposé dans le plan $ABCD$ perpendiculaire à $\boldsymbol{m}$; le module du moment du couple résultant est numériquement égal à $3\sqrt{2}$ mkg.

Si l'on change le sens de rotation de l'un des couples donnés, le couple résultant sera alors disposé dans le plan perpendiculaire à $ABCD$.

Problème 41. Le cube représenté sur la fig. 109 est suspendu à deux tiges verticales AA_1 et BB_1 de telle manière que sa diagonale AB soit horizontale. Les couples de forces (P, P') et (Q, Q') sont appliqués au cube. Négligeant

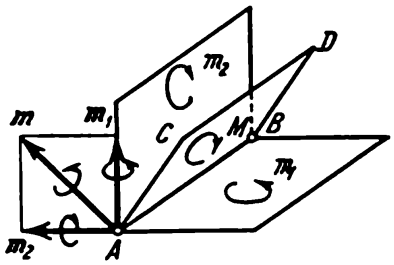


Fig. 108

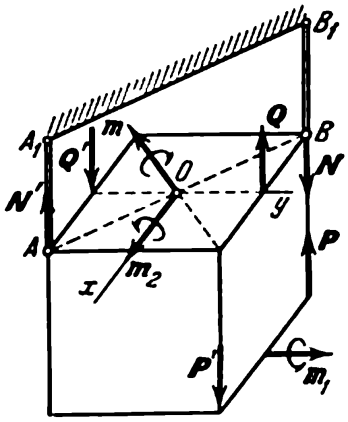


Fig. 109

le poids du cube, déterminer quel doit être le rapport entre P et Q pour que l'équilibre soit réalisé et quelles seront alors les réactions des tiges.

Solution. Le système de couples (P, P') et (Q, Q'), équivalent à un seul couple, ne peut être équilibré que par un couple de forces. Par conséquent, les réactions cherchées N et N' doivent former un couple. Son moment $\boldsymbol{m}$, dirigé perpendiculairement à la diagonale AB, est mené comme le montre la figure. Numériquement, $m = Na\sqrt{2}$, où a est la longueur du côté du cube. Désignons les moments des couples donnés par $\boldsymbol{m}_1$ et $\boldsymbol{m}_2$, avec $m_1 = Pa$, $m_2 = Qa$. Les sens des vecteurs $\boldsymbol{m}_1$ et $\boldsymbol{m}_2$ sont montrés sur la figure.

Menant les axes de coordonnées, nous écrivons les conditions d'équilibre (58):

$$\sum m_{kx} \equiv m_2 - m\cos 45^\circ = 0, \quad \sum m_{ky} \equiv m_1 - m\cos 45^\circ = 0.$$

La troisième condition est une identité.

Des équations trouvées il résulte qu'on doit avoir $m_1 = m_2$, c'est-à-dire $Q = P$. Ensuite, tenant compte que

$$m = \frac{m_1}{\cos 45^\circ} = m_1\sqrt{2} = Pa\sqrt{2}$$

et que $m = Na\sqrt{2}$, on trouve que $N = P$.

Ainsi, l'équilibre est possible lorsque $Q = P$. Les réactions des tiges sont alors aussi numériquement égales à P et sont dirigées comme le montre la figure.

§ 46. Réduction d'un système de forces dans l'espace à un centre donné. Les résultats obtenus ci-dessus permettent de résoudre le problème de la réduction d'un système de forces quelconque à un centre donné. Ce problème est analogue au problème considéré au § 22 et se résout à l'aide du théorème de la translation d'une force.

Pour effectuer une translation de la force F, agissant sur un corps solide, du point A (fig. 110, *a*) au point O, nous appliquons au point O les forces $F' = F$ et $F'' = -F$. La force $F' = F$ sera appliquée

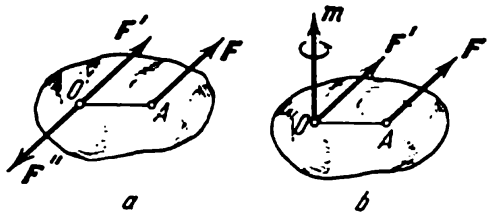


Fig. 110

au point O et il lui sera ajouté le couple (F, F'') de moment m, ce que l'on peut encore représenter comme le fait la figure 110, *b*. Alors

$$m = m_O(F). \tag{59}$$

Considérons maintenant un solide sur lequel agit un système de forces arbitraire $F_1, F_2, \ldots, F_n$ (fig. 111, *a*). Choisissons un

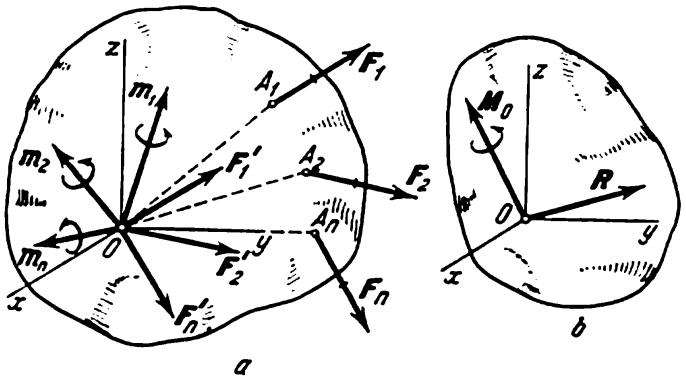


Fig. 111

point arbitraire O comme centre de réduction et transférons toutes les forces du système en ce centre, en ajoutant les couples correspondants. Alors, le corps subira l'action du système de forces

$$F'_1 = F_1, \quad F'_2 = F_2, \ldots, F'_n = F_n, \tag{60}$$

appliquées au centre O, et du système de couples dont les moments, d'après la formule (59), seront

$$m_1 = m_O(F_1), \quad m_2 = m_O(F_2), \ldots, m_n = m_O(F_n). \tag{61}$$

Les forces appliquées au point O se remplacent par une seule force R appliquée au même point : $R = \Sigma F'_k$ ou, selon les égalités (60),

$$R = \Sigma F_k. \tag{62}$$

Pour composer tous les couples obtenus, il faut trouver la somme géométrique des vecteurs de leurs moments. En définitive, le

système de couples se remplacera par un seul couple de moment $\boldsymbol{M}_O = \Sigma \boldsymbol{m}_k$ ou, selon les égalités (61),

$$\boldsymbol{M}_O = \Sigma \boldsymbol{m}_O (\boldsymbol{F}_k). \tag{63}$$

Comme dans le cas d'un système plan, la grandeur $\boldsymbol{R}$, égale à la somme géométrique de toutes les forces, est appelée *vecteur principal du système* et la grandeur $\boldsymbol{M}_O$, égale à la somme géométrique des moments de toutes les forces par rapport au centre O, *moment principal du système* par rapport à ce centre.

Ainsi, nous avons démontré le théorème suivant: *lorsqu'on réduit un système quelconque de forces agissant sur un corps solide à un centre arbitraire O, ce système se remplace par une seule force $\boldsymbol{R}$, égale au vecteur principal du système et appliquée au centre de réduction O, et par un couple de moment $\boldsymbol{M}_O$ égal au moment principal du système par rapport au centre O* (fig. 111, *b*).

Les vecteurs $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{M}_O$ se déterminent d'habitude analytiquement, c'est-à-dire à l'aide de leurs projections sur les axes de coordonnées.

Les expressions pour R_x, R_y, R_z sont connues (§ 10). Nous désignerons les projections du vecteur $\boldsymbol{M}_O$ sur les axes de coordonnées par M_x, M_y, M_z. D'après le théorème des projections d'une somme de vecteurs sur un axe, on a $M_x = \Sigma\, [\boldsymbol{m}_O (\boldsymbol{F}_k)]_x$ ou, selon l'égalité (54), $M_x = \Sigma m_x (\boldsymbol{F}_k)$. D'une manière analogue, on trouvera les grandeurs M_y et M_z.

En définitive, pour déterminer les projections du vecteur principal $\boldsymbol{R}$ et du moment principal $\boldsymbol{M}_O$, nous obtenons les formules:

$$R_x = \Sigma F_{kx}, \qquad R_y = \Sigma F_{ky}, \qquad R_z = \Sigma F_{kz}; \tag{64}$$

$$M_x = \Sigma m_x (\boldsymbol{F}_k), \quad M_y = \Sigma m_y (\boldsymbol{F}_k), \quad M_z = \Sigma m_z (\boldsymbol{F}_k). \tag{65}$$

Il résulte du théorème démontré ci-dessus que deux systèmes de forces pour lesquels les grandeurs $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{M}_O$ coïncident sont statiquement équivalents. Par conséquent, pour donner un système de forces quelconque agissant sur un solide, il suffit de se donner son vecteur principal et son moment principal par rapport à un centre, c'est-à-dire qu'il suffit de se donner les six grandeurs définies par les égalités (64) et (65).

Problème 42. Trouver les efforts dans la section AA_1 de la barre chargée de la manière complexe représentée sur la figure 112, *a*. La force $\boldsymbol{Q}$ passe par le centre de la partie droite de la barre; la force $\boldsymbol{F}$ se trouve dans le plan Oxz; la force $\boldsymbol{P}$ est parallèle à l'axe Oy.

S o l u t i o n. Nous déterminons les efforts cherchés comme au problème 18 (§ 22). Pour cela nous réduisons toutes les forces au centre O de la section. Menant les axes de coordonnées x, y, z par le point O et déterminant le vecteur principal et le moment principal du système de forces d'après les formules (64) et (65), nous trouvons:

$$R_x = F \sin\alpha - Q, \qquad R_y = -P, \qquad R_z = F \cos\alpha;$$

$$M_x = bP, \qquad M_y = bF \sin\alpha - \frac{b}{2} Q, \qquad M_z = \frac{h}{2} P.$$

Par conséquent, dans la section AA_1 agiront (fig. 112, *b*) : deux forces transversales égales à R_x et R_y, une force de traction longitudinale égale à R_z et

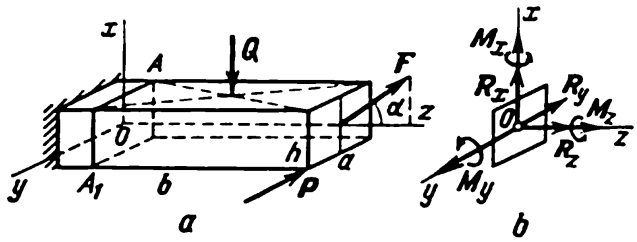


Fig. 112

trois couples de moments M_x, M_y et M_z ; les deux premiers couples tendent à fléchir la barre autour des axes Ox et Oy et le troisième engendre une torsion autour de l'axe Oz.

§ 47. Réduction d'un système de forces dans l'espace. Le théorème démontré au § 46 permet de déterminer quelle est la plus simple expression à laquelle peut être réduit un système de forces dans l'espace. Pour cela il faut déterminer le vecteur principal du système et son moment principal par rapport à un centre arbitraire O et analyser les résultats obtenus.

Les cas suivants sont possibles :

1) $\boldsymbol{R} = 0$ et $\boldsymbol{M}_O = 0$: le système se trouve en équilibre. Ce cas sera étudié au § 48.

2) $\boldsymbol{R} = 0$ et $\boldsymbol{M}_O \neq 0$: le système se réduit à un couple de forces dont le moment se calcule par les formules (65). Un corps libre soumis à l'action d'un tel système de forces peut (mais pas toujours) effectuer un mouvement purement rotatif.

3) $\boldsymbol{R} \neq 0$ et $\boldsymbol{M}_O = 0$: le système se réduit à la résultante $\boldsymbol{R}$ passant par le centre O. Le module de la résultante se calcule par les formules (64).

Un corps libre soumis à l'action d'un tel système de forces peut effectuer un mouvement purement translatif (si la résultante $\boldsymbol{R}$ passe par le centre de gravité du corps).

4) $\boldsymbol{R} \neq 0$, $\boldsymbol{M}_O \neq 0$, mais $\boldsymbol{M}_O \perp \boldsymbol{R}$: le système se réduit également à une seule résultante égale à $\boldsymbol{R}$ mais ne passant pas par le centre O.

En effet, lorsque $\boldsymbol{M}_O \perp \boldsymbol{R}$, le couple, représenté par le vecteur $\boldsymbol{M}_O$, et la force $\boldsymbol{R}$ se trouvent dans un même plan (fig. 113). Alors, choisissant les forces du couple $\boldsymbol{R}'$ et $\boldsymbol{R}''$ égales en module à R et les disposant comme le montre la fig. 113, nous obtenons que les forces $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{R}''$ s'équilibrent mutuellement et que le système se remplace par une seule résultante $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R}$ passant par le point O' (voir § 23, 3, *b*). La distance OO' ($\overline{OO'} \perp \boldsymbol{R}$) se détermine dans ce cas par la formule (31), où $d = OO'$.

Il est facile de voir que le cas examiné se présentera toujours pour un système quelconque de forces parallèles ou de forces disposées dans un même plan si le vecteur principal de ce système $R \neq 0$.

5) $R \neq 0$, $M_O \neq 0$ et M_O parallèle à R (fig. 114, *a*) : le système se réduit à l'ensemble de la force R et du couple (P, P') disposé

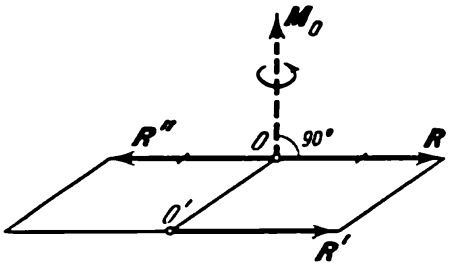


Fig. 113

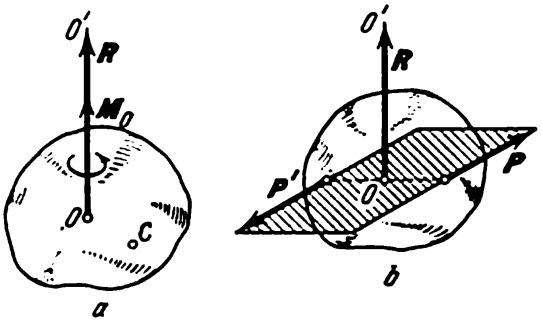


Fig. 114

dans le plan perpendiculaire à la force (fig. 114, *b*). Un tel ensemble d'une force et d'un couple est appelé *vis dynamique* ou *dyname*, et la droite suivant laquelle est dirigé le vecteur R, *axe du dyname*. Il est impossible de simplifier davantage ce système car, lorsqu'on déplace le couple, le système ne change pas et, lorsqu'on

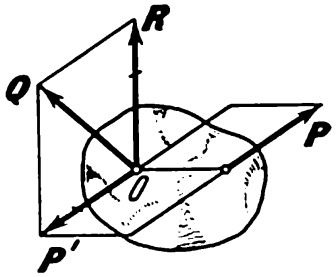


Fig. 115

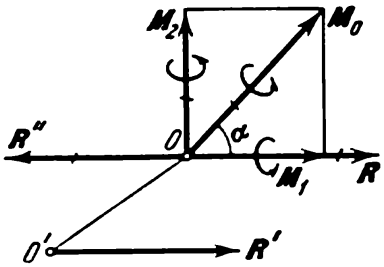


Fig. 116

transfère la force R du point O en un autre point quelconque C, au moment M_O s'ajoutera un moment *perpendiculaire* à lui $M'_C = m_C(R)$ et, en définitive, le moment $M_C = M_O + M'_C$ du couple résultant augmentera. Donc il est impossible de réduire le système de forces examiné à une seule résultante ou à un seul couple. Un solide libre soumis à l'action d'un tel système de forces ne peut effectuer qu'un mouvement composé (hélicoïdal).

Si l'on compose l'une des forces du couple, par exemple P', avec la force R, le système de forces examiné peut alors être remplacé par deux forces entrecroisées Q et P, c'est-à-dire par deux forces non disposées dans un même plan (fig. 115). Le système de forces obtenu étant équivalent à un dyname, il n'a pas de résultante non plus.

6) $\boldsymbol{R} \neq 0$, $\boldsymbol{M}_O \neq 0$, et $\boldsymbol{M}_O$ et $\boldsymbol{R}$ ni perpendiculaires ni parallèles ; un tel système de forces se réduit également à un dyname, mais l'axe de ce dyname ne passera pas par le centre O.

Pour le démontrer, décomposons le vecteur $\boldsymbol{M}_O$ en les composantes : $\boldsymbol{M}_1$, dirigée suivant $\boldsymbol{R}$, et $\boldsymbol{M}_2$, perpendiculaire à $\boldsymbol{R}$ (fig. 116). Alors $M_1 = M_O \cos \alpha$, $M_2 = M_O \sin \alpha$, où α est l'angle formé par les vecteurs $\boldsymbol{M}_O$ et $\boldsymbol{R}$. Comme le montre la figure 113, le couple représenté par le vecteur $\boldsymbol{M}_2$ ($\boldsymbol{M}_2 \perp \boldsymbol{R}$), et la force $\boldsymbol{R}$ peuvent être remplacés par une seule force $\boldsymbol{R}'$ appliquée au point O'. En définitive, le système de forces sera effectivement remplacé par la force $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R}$ et par le couple de moment $\boldsymbol{M}_1$ parallèle à $\boldsymbol{R}'$, c'est-à-dire par un dyname dont l'axe passe par le centre O'.

§ 48. Conditions d'équilibre d'un système arbitraire de forces dans l'espace. Cas de forces parallèles. Un système arbitraire de forces dans l'espace, tout comme un système plan, peut être réduit à un centre quelconque O et être remplacé par une force résultante $\boldsymbol{R}$ et par un couple de moment $\boldsymbol{M}_O$ [les valeurs de $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{M}_O$ se déterminent par les égalités (62) et (63)]. Raisonnant comme on l'a fait au début du § 24, nous en venons à la conclusion que, pour que ce système de forces soit en équilibre, il faut et il suffit que l'on ait simultanément $\boldsymbol{R} = 0$ et $\boldsymbol{M}_O = 0$. Mais les vecteurs $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{M}_O$ ne peuvent s'annuler que si toutes leurs projections sur les axes de coordonnées sont égales à zéro, c'est-à-dire si $R_x = R_y = R_z = 0$ et $M_x = M_y = M_z = 0$ ou bien, selon les formules (64) et (65), si les forces qui agissent sur le corps considéré satisfont aux conditions

$$\left.\begin{array}{lll} \sum F_{kx} = 0, & \sum F_{ky} = 0, & \sum F_{kz} = 0\,; \\ \sum m_x(\boldsymbol{F}_k) = 0, & \sum m_y(\boldsymbol{F}_k) = 0, & \sum m_z(\boldsymbol{F}_k) = 0. \end{array}\right\} \qquad (66)$$

Ainsi, *pour qu'un système arbitraire de forces dans l'espace soit en équilibre, il faut et il suffit que les sommes des projections de toutes les forces sur chacun des trois axes de coordonnées et les sommes de leurs moments par rapport à ces axes soient égales à zéro* [1].

Les équations (66) expriment en même temps les conditions d'équilibre nécessaires pour un solide libre soumis à l'action d'un système quelconque de forces dans l'espace. Les trois premières égalités expriment les conditions nécessaires pour que le corps n'effectue pas de déplacements le long des axes de coordonnées, et les trois dernières sont les conditions de l'absence de rotation autour de ces axes.

Si le corps subit, outre les forces, l'action d'un couple donné par son moment $\boldsymbol{M}$, les trois premières conditions (66) auront les mêmes expressions (la somme des projections des forces d'un couple sur un axe quelconque est égale à zéro), quant aux trois dernières conditions elles prendront la forme suivante :

$$\sum m_x(\boldsymbol{F}_k) + M_x = 0, \quad \sum m_y(\boldsymbol{F}_k) + M_y = 0, \quad \sum m_z(\boldsymbol{F}_k) + M_z = 0. \qquad (67)$$

[1] Lorsqu'on établit les conditions (66), on peut, si cela est rationnel, prendre différents systèmes d'axes de coordonnées selon qu'il s'agit du calcul des projections ou de celui des moments.

Cas de forces parallèles. Dans le cas où toutes les forces agissant sur un corps sont parallèles, on peut choisir les axes de coordonnées de telle manière que l'axe z soit parallèle aux forces (fig. 117). Alors les projections de chacune des forces sur les axes x et y et leurs moments par rapport à l'axe z seront égaux

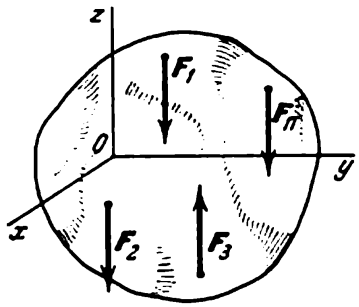


Fig. 117

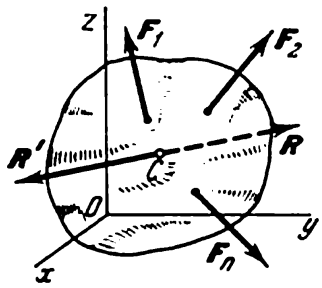


Fig. 118

à zéro et le système (66) fournira trois conditions d'équilibre:

$$\sum F_{kz}=0, \quad \sum m_x(F_k)=0, \quad \sum m_y(F_k)=0. \tag{68}$$

Les autres égalités deviendront dans ce cas des identités du type $0 = 0$.

Par conséquent, *pour qu'un système de forces parallèles dans l'espace soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des projections de toutes les forces sur l'axe parallèle à ces forces et les sommes de leurs moments par rapport aux deux autres axes de coordonnées soient égales à zéro.*

49. Théorème de Varignon. Admettons que sur un solide agisse un système de forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ qui se réduit à la résultante R dont la ligne d'action passe par un certain point C (fig. 118). Appliquons à ce point la force $R' = -R$. Alors le système de forces $F_1, F_2, \ldots, F_n, R'$ se trouvera en équilibre et, pour lui, toutes les conditions (66) seront remplies. En particulier, pour n'importe quel axe de coordonnées Ox, on aura:

$$\sum m_x(F_k)+m_x(R')=0.$$

Mais puisque la force $R' = -R$ et elles sont toutes les deux dirigées suivant une même droite, $m_x(R') = -m_x(R)$. Portant cette valeur de $m_x(R')$ dans l'égalité précédente, nous obtenons:

$$m_x(R) = \Sigma m_x(F_k). \tag{69}$$

Par conséquent, *si un système de forces donné possède une résultante, le moment de cette résultante par rapport à un axe quelconque est égal à la somme algébrique des moments des forces composantes par rapport à ce même axe* (théorème de Varignon).

§ 50. Problèmes sur l'équilibre des corps soumis à l'action d'un système de forces dans l'espace. Le principe de résolution de ces problèmes reste le même que pour un système plan de forces. Ayant déterminé quel est le corps dont on examinera l'équilibre, on remplace les liaisons auxquelles ce corps est soumis par les forces de réaction et on établit les conditions d'équilibre de ce corps en le considérant comme libre. Des équations obtenues on détermine les grandeurs cherchées.

Pour obtenir des systèmes d'équations plus simples il est recommandé de mener les axes de telle manière qu'ils coupent le plus grand nombre possible de forces inconnues ou bien qu'ils leur soient perpendiculaires (si cela ne complique pas outre mesure le calcul des projections et des moments des autres forces).

Ce qu'il y a de nouveau dans la formation des équations, c'est le calcul des moments des forces par rapport aux axes de coordonnées.

Dans les cas où le dessin général ne permet pas de voir à quoi est égal le moment de la force donnée par rapport à l'un des axes, il est recommandé de représenter sur un dessin auxiliaire la projection du corps considéré (avec la force) sur le plan perpendiculaire à l'axe.

Lors du calcul du moment, il peut apparaître des difficultés à propos de la détermination de la projection de la force sur un certain plan ou à propos de la détermination du bras de levier de cette projection. Il est alors recommandé de décomposer la force en deux composantes perpendiculaires (dont l'une sera parallèle à l'un des axes de coordonnées), et ensuite d'appliquer le théorème de Varignon. De plus on peut calculer les moments analytiquement par les formules (52).

Problème 43. Lors du levage d'une dalle homogène rectangulaire de dimensions a et b (fig. 119), l'un des ouvriers la maintient par le coin A. En quels

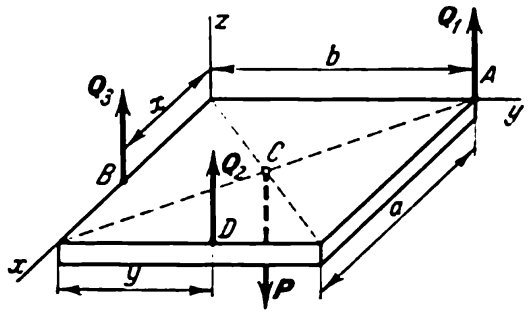


Fig. 119

points B et D deux autres ouvriers doivent-ils maintenir la dalle pour que les forces appliquées par chacun des trois hommes soient égales?

Solution. Examinons l'équilibre de la dalle qui est un corps libre se trouvant en équilibre sous l'action de quatre forces parallèles Q_1, Q_2, Q_3, P, où P est le poids de la dalle. Etablissons pour ces forces les conditions d'équilibre

(68), en admettant que la dalle est horizontale et en menant les axes comme le montre la fig. 119. Nous obtenons:

$$Q_1 b + Q_2 y - P\frac{b}{2} = 0,$$

$$-Q_2 a - Q_3 x + P\frac{a}{2} = 0,$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = P.$$

D'après les conditions du problème, on doit avoir $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$. Alors, de la dernière équation on tire: $P = 3Q$. Portant cette valeur dans les deux premières égalités, nous obtenons après avoir divisé par Q

$$b + y = \frac{3}{2}b, \qquad a + x = \frac{3}{2}a.$$

D'où

$$x = \frac{a}{2}, \qquad y = \frac{b}{2}.$$

Problème 44. Un arbre horizontal passant par les paliers A et B (fig. 120) porte une poulie de rayon $r_1 = 20$ cm et un cylindre de rayon $r_2 = 15$ cm qui sont emmanchés perpendiculairement à l'axe de l'arbre. L'arbre est mû par

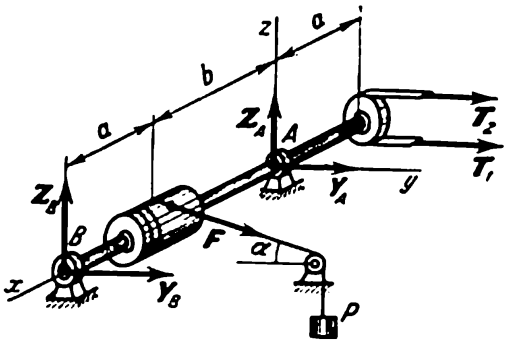


Fig. 120

une courroie passée sur la poulie; on soulève ainsi d'un mouvement uniforme une charge de poids $P = 180$ kgf attachée à une corde qui s'enroule autour du cylindre. Négligeant le poids de l'installation, déterminer les réactions des paliers A et B et la tension T_1 de la partie motrice de la courroie si l'on sait qu'elle est le double de la tension T_2 de la partie entraînée. On pose: $a = 40$ cm, $b = 60$ cm, $\alpha = 30°$.

Solution. Lorsque l'arbre effectue un mouvement de rotation uniforme, les forces qui agissent sur lui se trouvent en équilibre. Etablissons les conditions d'équilibre de ces forces. Menons les axes de coordonnées (voir figure) et, considérant l'arbre comme libre, représentons les forces qui agissent sur lui: la tension de la corde F égale, en module, à P, les tensions de la courroie T_1, T_2 et les réactions des paliers Y_A, Z_A, Y_B, Z_B (chacune des réactions R_A et R_B pouvant avoir n'importe quelle direction dans le plan perpendiculaire à l'axe x, elle se représente par deux composantes).

Pour établir les conditions d'équilibre (66), nous calculons les projections de toutes les forces sur les axes de coordonnées et leurs moments par rapport à ces axes (voir tableau); puisque les projections de toutes les forces sur l'axe sont égales à zéro, la ligne correspondante ne figure pas dans le tableau[1].

F_k	F	T_1	T_2	R_A	R_B
F_{ky}	$F\cos\alpha$	T_1	T_2	Y_A	Y_B
F_{kz}	$-F\sin\alpha$	0	0	Z_A	Z_B
$m_x(F_k)$	$-Fr_2$	T_1r_1	$-T_2r_1$	0	0
$m_y(F_k)$	$F\sin\alpha\cdot b$	0	0	0	$-Z_B(a+b)$
$m_z(F_k)$	$F\cos\alpha\cdot b$	$-T_1a$	$-T_2a$	0	$Y_B(a+b)$

Posons les conditions d'équilibre; nous obtenons (avec $F = P$):

$$P\cos\alpha + T_1 + T_2 + Y_A + Y_B = 0, \qquad \text{(I)}$$
$$-P\sin\alpha + Z_A + Z_B = 0, \qquad \text{(II)}$$
$$-r_2P + r_1T_1 - r_1T_2 = 0, \qquad \text{(III)}$$
$$bP\sin\alpha - (a+b)Z_B = 0, \qquad \text{(IV)}$$
$$bP\cos\alpha - aT_1 - aT_2 + (a+b)Y_B = 0. \qquad \text{(V)}$$

Des équations (III) et (IV) nous tirons immédiatement, remarquant que $T_1 = 2T_2$:

$$T_2 = \frac{r_2P}{r_1} = 135 \text{ kgf},$$

$$Z_B = \frac{bP}{a+b}\sin\alpha = 54 \text{ kgf}.$$

Ensuite, de l'équation (V) nous tirons:

$$Y_B = \frac{3aT_2 - bP\cos\alpha}{a+b} \approx 69 \text{ kgf}.$$

[1] L'établissement préalable des tableaux en vue de la résolution des problèmes de ce paragraphe est particulièrement utile. On remplit le tableau suivant les colonnes, c'est-à-dire qu'on calcule d'abord toutes les projections et tous les moments de la force F, ensuite ceux de la force T_1, etc. Ainsi toute l'attention est d'abord concentrée sur la première force, ensuite sur la deuxième, etc. Si, au contraire, on pose tout de suite les conditions d'équilibre (66), il faudra revenir six fois à l'examen de chaque force: dans ce cas on risque de commettre des fautes et en particulier d'omettre certaines forces dans telle ou telle équation.

Portant les valeurs trouvées ci-dessus dans les autres équations, nous trouvons:

$$Y_A = -P\cos\alpha - 3T_2 - Y_B \approx -630 \text{ kgf},$$
$$Z_A = P\sin\alpha - Z_B = 36 \text{ kgf}.$$

Finalement:

$T_1 = 270$ kgf, $Y_A \approx -630$ kgf, $Z_A = 36$ kgf, $Y_B \approx 69$ kgf, $Z_B = 54$ kgf.

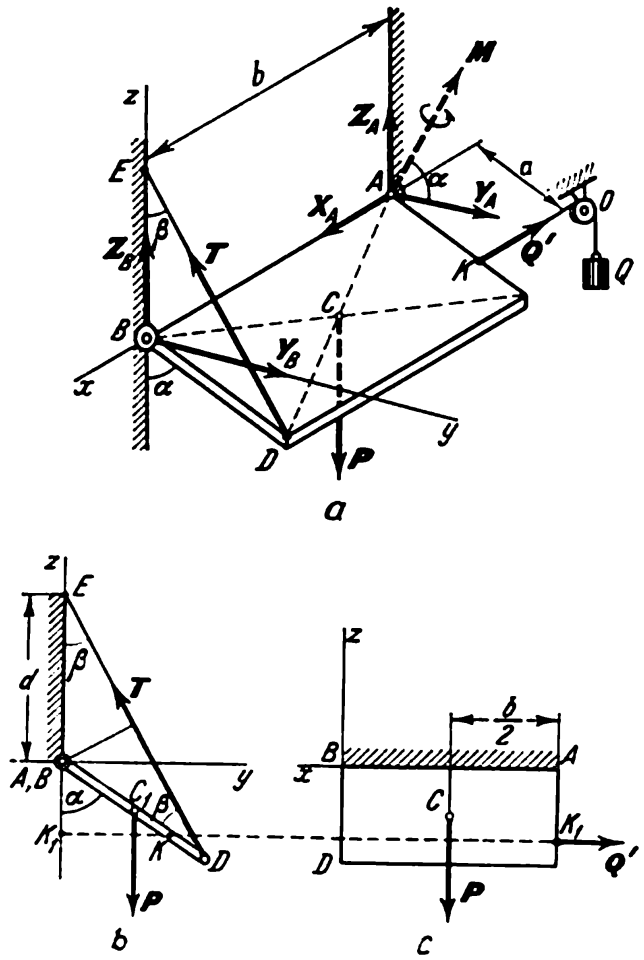


Fig. 121

Problème 45. Un couvercle rectangulaire de poids $P = 12$ kgf et formant avec la verticale un angle $\alpha = 60°$ est fixé sur l'axe AB au point B par un palier cylindrique, et au point A par un palier de butée (fig. 121, *a*). Le couvercle est maintenu en équilibre par la corde DE et est tiré par un fil passé sur la poulie O et portant une charge de poids $Q = 20$ kgf (la ligne KO est parallèle à AB). On donne: $BD = BE$, $AK = a = 0{,}4$ m, $AB = b = 1$ m. Déterminer la tension de la corde DE et les réactions des paliers A et B.

Solution. Examinons l'équilibre du couvercle considéré comme libre. Menons les axes de coordonnées en prenant l'origine au point B (la force T coupera alors les axes y et z, ce qui simplifiera les équations des moments) et représentons les forces actives et les réactions des liaisons (voir figure; le vecteur en pointillé M ne se rapporte pas à ce problème). Pour poser les conditions d'équi-

libre, nous calculons les grandeurs des projections et des moments de toutes les forces ; aux fins du calcul nous introduisons l'angle β et nous désignons $BD = BE = d$ (voir tableau). Le calcul des moments de certaines forces est expliqué par les dessins auxiliaires (fig. 121, *b* et *c*).

F_k	P	Q'	T	R_A	R_B
F_{kx}	0	$-Q'$	0	X_A	0
F_{ky}	0	0	$-T\sin\beta$	Y_A	Y_B
F_{kz}	$-P$	0	$T\cos\beta$	Z_A	Z_B
$m_x(F_k)$	$-P\frac{d}{2}\sin\alpha$	0	$Td\sin\beta$	0	0
$m_y(F_k)$	$-P\frac{b}{2}$	$Q'a\cos\alpha$	0	Z_Ab	0
$m_z(F_k)$	0	$Q'a\sin\alpha$	0	$-Y_Ab$	0

La figure 121, *b* représente la projection sur le plan Byz vue depuis l'extrémité positive de l'axe x. Elle aide à calculer les moments des forces P et T par rapport à l'axe x. On y voit que les projections de ces forces sur le plan yz sont égales aux forces elles-mêmes, et que le bras de levier de la force P par rapport au point B est égal à $BC_1 \sin\alpha = \frac{d}{2}\sin\alpha$; quant au bras de levier de la force T par rapport à ce point, il est égal à $BE\sin\beta = d\sin\beta$.

La figure 121, *c* montre la projection sur le plan Bxz vue depuis l'extrémité positive de l'axe y. Elle (ainsi que la figure 121, *b*) aide à calculer les moments des forces P et Q' par rapport à l'axe y. On y voit que les projections de ces forces sur le plan xz sont égales aux forces elles-mêmes et que le bras de levier de la force P par rapport au point B est égal à $\frac{1}{2}AB = \frac{b}{2}$, quant au bras de levier de la force Q' par rapport à ce point, il est égal à AK_1, c'est-à-dire à $AK\cos\alpha$ ou $a\cos\alpha$ (ce que l'on voit sur la figure 121, *b*).

Nous écrivons maintenant les conditions d'équilibre, en admettant que $Q' = Q$:

$$-Q + X_A = 0, \tag{I}$$

$$-T\sin\beta + Y_A + Y_B = 0, \tag{II}$$

$$-P + T\cos\beta + Z_A + Z_B = 0, \tag{III}$$

$$-P\frac{d}{2}\sin\alpha + Td\sin\beta = 0, \tag{IV}$$

$$-P\frac{b}{2} + Qa\cos\alpha + Z_Ab = 0, \tag{V}$$

$$Qa\sin\alpha - Y_Ab = 0. \tag{VI}$$

Tenant compte de ce que $\beta = \frac{\alpha}{2} = 30°$, nous tirons des équations (I), (IV), (V) et (VI):

$$X_A = Q = 20 \text{ kgf}; \quad T = P\frac{\sin\alpha}{2\sin\beta} \approx 10{,}4 \text{ kgf};$$

$$Z_A = \frac{P}{2} - \frac{Qa}{b}\cos\alpha = 2 \text{ kgf}; \qquad Y_A = \frac{Qa}{b}\sin\alpha \approx 6{,}9 \text{ kgf}.$$

Portant ces valeurs dans les équations II et III, nous obtenons:

$$Y_B = T\sin\beta - Y_A = -1{,}7 \text{ kgf}; \quad Z_B = P - T\cos\beta - Z_A = 1 \text{ kgf}.$$

En définitive,

$$T \approx 10{,}4 \text{ kgf}, \quad X_A = 20 \text{ kgf}, \quad Y_A \approx 6{,}9 \text{ kgf}, \quad Z_A = 2 \text{ kgf},$$
$$Y_B = -1{,}7 \text{ kgf}, \quad Z_B = 1 \text{ kgf}.$$

Problème 46. Résoudre le problème 45 si le couvercle est soumis de plus à un couple disposé dans son plan et de moment $M = 12$ mkg; le sens de rotation du couple (si l'on regarde le couvercle d'en haut) est contraire à celui des aiguilles d'une montre.

Solution. Représentons le moment M du couple sous forme d'un vecteur perpendiculaire au couvercle et appliqué en un point quelconque, par exemple au point A (fig. 121, *a*). Ses projections sur les axes de coordonnées seront: $M_x = 0$, $M_y = M\cos\alpha$, $M_z = M\sin\alpha$. Alors, posant les conditions d'équilibre (67), nous trouvons que les équations (I) à (IV) restent les mêmes que dans le problème précédent, et qu les deux dernières équations se transforment en:

$$-P\frac{b}{2} + Z_A b + Qa\cos\alpha + M\cos\alpha = 0, \qquad \text{(V')}$$

$$-Y_A b + Qa\sin\alpha + M\sin\alpha = 0. \qquad \text{(VI')}$$

Remarquons qu'on peut obtenir ce même résultat sans poser les équations sous la forme (67), mais en représentant le couple par deux forces dirigées, par exemple, suivant les lignes AB et KO (il est évident que les modules des forces seront alors égaux à M/a) et en utilisant ensuite les conditions d'équilibre habituelles.

Résolvant les équations (I) à (IV), (V'), (VI'), nous trouvons des résultats analogues à ceux qui ont été obtenus dans le problème 45 avec la seule différence que dans toutes les formules, la grandeur Qa sera remplacée par $Qa + M$.

En définitive, nous obtiendrons:

$$T \approx 10{,}4 \text{ kgf}, \quad X_A = 20 \text{ kgf}, \quad Y_A \approx 17{,}3 \text{ kgf}, \quad Z_A = -4 \text{ kgf},$$
$$Y_B = -12{,}1 \text{ kgf}, \quad Z_B = 7 \text{ kgf}.$$

Problème 47. Une tige horizontale AB est fixée au mur par une rotule sphérique A et est maintenue dans la position perpendiculaire au mur par les tendeurs KE et CD montrés sur la figure 122, *a*. A l'extrémité B de la tige est suspendue une charge de poids $P = 36$ kgf. Déterminer la réaction de la rotule A et les tensions des tendeurs si $AB = a = 0{,}8$ m; $AC = AD_1 = b = 0{,}6$ m; $AK = \frac{a}{2}$, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$. On négligera le poids de la tige.

Solution. Examinons l'équilibre de la tige considérée comme libre. La tige subit la force P et les réactions T_K, T_C, X_A, Y_A, Z_A. Menons les axes

de coordonnées et calculons les projections et les moments de toutes les forces. Puisque toutes les forces coupent l'axe y, leurs moments par rapport à cet axe sont égaux à zéro. Pour calculer les moments de la force T_C par rapport aux axes de coordonnées, nous la décomposons en T_1 et T_2 ($T_1 = T_C \cos\alpha$, $T_2 = T_C \sin\alpha$) et appliquons ensuite le théorème de Varignon[1]. Alors $m_x(T_C) = m_x(T_1)$, car $m_x(T_2)=0$; $m_z(T_C)=m_z(T_2)$, car $m_z(T_1)=0$. Le calcul des

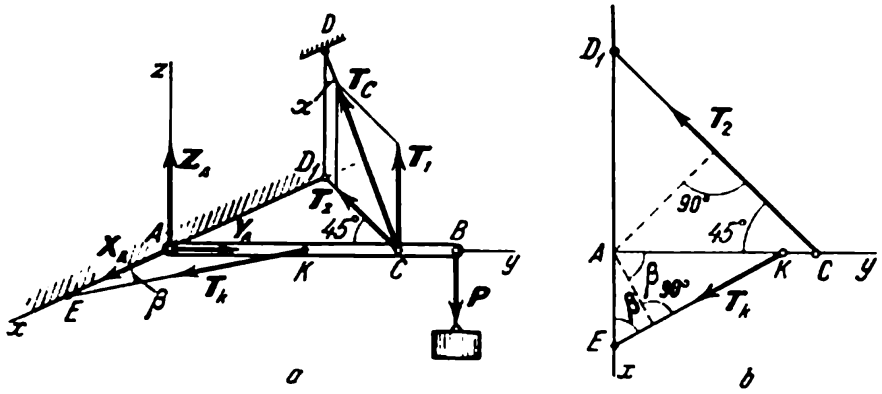


Fig. 122

moments des forces par rapport à l'axe z est expliqué par le dessin auxiliaire (fig. 122, *b*) qui représente une vue de la projection sur le plan Axy. Les résultats de tous les calculs sont portés dans le tableau.

F_k	P	T_K	T_C	R_A
F_{kx}	0	$T_K \cos\beta$	$-T_2 \sin 45°$	X_A
F_{ky}	0	$-T_K \sin\beta$	$-T_2 \cos 45°$	Y_A
F_{kz}	$-P$	0	T_1	Z_A
$m_x(F_k)$	$-Pa$	0	$T_1 b$	0
$m_z(F_k)$	0	$-T_K \frac{a}{2} \cos\beta$	$T_2 b \sin 45°$	0

[1] Nous attirons l'attention sur le fait que l'angle formé par la force T_C et le plan Ayz n'est pas égal à 45° comme on le pose quelquefois dans des cas semblables. C'est pourquoi, pour calculer, par exemple, $m_x(T_C)$ comme on le fait d'habitude, il faut d'abord déterminer cet angle, ce qui complique le calcul. Au contraire, à l'aide du théorème de Varignon, nous trouvons immédiatement que $m_x(T_C) = m_x(T_1) = T_1 \cdot AC$.

Remplaçant maintenant T_1 et T_2 par leurs valeurs, nous obtenons les équations suivantes:

$$T_K \cos\beta - T_C \sin\alpha \sin 45° + X_A = 0, \quad \text{(I)}$$

$$-T_K \sin\beta - T_C \sin\alpha \cos 45° + Y_A = 0, \quad \text{(II)}$$

$$-P + T_C \cos\alpha + Z_A = 0, \quad \text{(III)}$$

$$-Pa + T_C b \cos\alpha = 0, \quad \text{(IV)}$$

$$-T_K \frac{a}{2} \cos\beta + T_C b \sin\alpha \sin 45° = 0. \quad \text{(V)}$$

Résolvant ce système d'équations, nous trouvons finalement $T_C \approx 55{,}4$ kgf; $T_K \approx 58{,}8$ kgf; $X_A \approx -9{,}8$ kgf; $Y_A \approx 70{,}5$ kgf; $Z_A = -12$ kgf. Ainsi, les composantes X_A et Z_A ont les sens contraires à ceux qui sont montrés sur la figure.

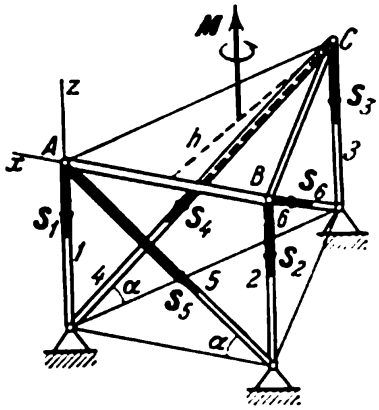


Fig. 123

Problème 48. Une dalle horizontale ABC ayant la forme d'un triangle équilatéral de côté a est fixée à l'aide de six tiges comme le montre la fig. 123; chacune des tiges inclinées forme avec le plan horizontal un angle $\alpha = 30°$. Dans le plan de la dalle agit un couple de moment M. Négligeant le poids de la dalle, déterminer les efforts dans les tiges.

Solution. Considérant la dalle comme libre, nous représentons le vecteur du moment M du couple agissant sur elle et les réactions $S_1, S_2, \ldots\ldots, S_6$ des tiges; nous dirigeons les réactions comme si toutes les tiges étaient étirées (nous admettons que la dalle tend à être arrachée des tiges). A l'équilibre, la somme des moments de toutes les forces et de tous les couples agissant sur le corps [voir égalités (67)] par rapport à n'importe quel axe doit être égale à zéro.

Dirigeant l'axe z le long de la tige *1* et posant l'équation des moments par rapport à cet axe, nous obtenons, puisque $M_z = M$:

$$(S_6 \cos\alpha)\, h + M = 0,$$

où $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ est la hauteur du triangle. D'où nous tirons:

$$S_6 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{M}{a\cos\alpha}.$$

Posant maintenant les équations des moments par rapport aux axes que nous dirigeons le long des tiges *2* et *3*, nous obtenons les mêmes résultats pour les forces S_4 et S_5.

Maintenant posons l'équation des moments par rapport à l'axe x dirigé le long du côté BA du triangle. Nous obtenons, avec $M_x = 0$:

$$S_3 h + (S_4 \sin\alpha)\, h = 0.$$

D'où, puisque $S_4 = S_6$, nous trouvons:

$$S_3 = -S_4 \sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{M}{a} \operatorname{tg}\alpha.$$

Nous obtenons les mêmes valeurs pour les grandeurs S_1 et S_2 en posant les équations des moments par rapport aux axes AC et CB.

En définitive, si $\alpha = 30°$, nous aurons:

$$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{2}{3}\frac{M}{a}; \qquad S_4 = S_5 = S_6 = -\frac{4}{3}\frac{M}{a}.$$

Les résultats obtenus montrent que, sous l'action du couple donné, les tiges verticales s'étirent, les tiges inclinées se compriment.

Cet exemple montre que pour résoudre les problèmes il n'est pas obligatoire d'utiliser les conditions d'équilibre (66). Pour les systèmes de forces dans l'espace tout comme pour les systèmes plans, il existe plusieurs formes des conditions d'équilibre parmi lesquelles la forme (66) est la principale.

En particulier, on peut démontrer que, pour qu'un système de forces dans l'espace soit en équilibre, il faut et il suffit que soient égales à zéro les sommes des moments de toutes les forces par rapport à six axes dirigés soit suivant les arêtes d'un tétraèdre quelconque, soit suivant les arêtes latérales et les arêtes d'une des bases d'un prisme triangulaire.

Ce sont justement ces dernières conditions que nous avons utilisées pour résoudre le problème ci-dessus.

§ 51. Conditions d'équilibre d'un solide gêné. Stabilité de l'équilibre. Dans les §§ 11, 24, 48 et autres, nous avons obtenu des équations qui expriment les conditions d'équilibre nécessaires pour

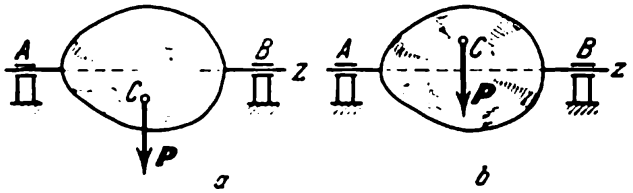


Fig. 124

un *solide libre*. On applique ces conditions à des corps gênés en se servant de l'axiome des liaisons. On obtient alors des équations qui servent à déterminer les réactions des liaisons.

La question des conditions d'équilibre d'un solide gêné se pose lorsque les liaisons appliquées au corps fixent ce dernier d'une manière non rigide (voir problèmes 6, 7 au § 13 et autres). Dans ce cas, ce n'est qu'une partie des équations obtenues à l'aide de l'axiome des liaisons qui contient les réactions de liaisons et qui permet de les déterminer. Les autres équations montrent quelles doivent être les relations entre les forces données (problème 6) ou quelle doit être la position du corps (problème 7) pour que soit possible l'équilibre du corps, c'est-à-dire qu'elles donnent les conditions de son équilibre. Ainsi, *les conditions d'équilibre d'un solide gêné se déterminent par celles des équations, formées à l'aide de l'axiome des liaisons, qui ne contiennent pas les réactions des liaisons.*

Par exemple, pour un corps ayant un axe de rotation fixe (voir fig. 124), nous trouvons, en utilisant l'axiome des liaisons et en posant les équations (66), que les réactions des paliers A et B entrent

dans toutes les équations sauf la dernière (voir problème 44). Les réactions n'entrent pas dans l'équation $\Sigma m_z (F_k) = 0$ car elles coupent l'axe z.

Par conséquent, *pour qu'un corps ayant un axe de rotation fixe soit en équilibre il faut que la somme des moments de toutes les forces actives par rapport à cet axe soit égale à zéro*:

$$\Sigma m_z (F_k) = 0. \tag{70}$$

Lorsqu'on a un corps fixé d'une manière non rigide, il importe de parler de la *stabilité de l'équilibre*. Si les forces actives tendent à ramener le corps dans la position d'équilibre, on dit que cette position d'équilibre est *stable*; dans le cas contraire l'équilibre sera *instable*. Pratiquement, un corps ne peut se trouver en équilibre que lorsque la position d'équilibre est stable.

Considérons, par exemple, un corps fixé à un axe horizontal. Ce corps se trouvera en équilibre sous l'action de la force de pesanteur P lorsque, selon l'équation (70), $m_z (P) = 0$, c'est-à-dire lorsque le centre de gravité C du corps occupe la position la plus basse (fig. 124, *a*) ou la plus haute (fig. 124, *b*). Dans le premier cas, si l'on fait un petit écart, le moment de la force P tend à ramener le corps dans la position d'équilibre. Dans le deuxième cas, quelque petit que soit l'écart, le moment de la force P augmentera cet écart. Donc, *l'équilibre du corps est stable lorsque son centre de gravité occupe la position la plus basse, et il est instable lorsque son centre de gravité occupe la position la plus haute*. Ce résultat est vrai dans tous les cas d'équilibre des corps soumis à l'action de la force de pesanteur. Si le centre de gravité du corps se trouve sur l'axe de rotation, l'équilibre de ce corps est dit *indifférent* ou *astatique*.

Analysons encore le caractère de l'équilibre de la tige du problème 7 (ou 12). La condition d'équilibre de la tige est $\Sigma m_A (F_k) = 0$. Et on a (voir fig. 38):

$$m_A(T) = Qa \cos \frac{\alpha}{2}; \quad |m_A(P)| = Pa \sin \alpha.$$

Si l'on augmente l'angle α, $|m_A (P)|$ augmentera et $m_A (T)$ diminuera et, sous l'action de la force P, l'angle α continuera à augmenter. Si l'on diminue l'angle α, $m_A (T)$ augmentera et $m_A (P)$ diminuera et sous l'action de la force $T = Q$ l'angle α continuera à diminuer. Donc, la position d'équilibre de la tige définie par l'égalité $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{Q}{2P}$ est *instable*. Lorsque $\alpha = 180°$ l'équilibre sera stable si $Q < 2P$, et instable si $Q > 2P$; on peut s'en convaincre si l'on introduit $\beta = 180° - \alpha$.

Ce procédé d'analyse n'est applicable que dans des cas très simples. Dans des cas plus compliqués on recourt aux méthodes de la dynamique.

Chapitre VIII

CENTRE DE GRAVITÉ

§ 52. **Centre des forces parallèles.** La notion de centre des forces parallèles agissant sur un solide apparaît lors de la composition des forces, dont les directions par rapport au corps peuvent changer. On rencontre cette notion au cours de la résolution de certains problèmes de mécanique et, en particulier, lorsqu'on détermine les centres de gravité des corps.

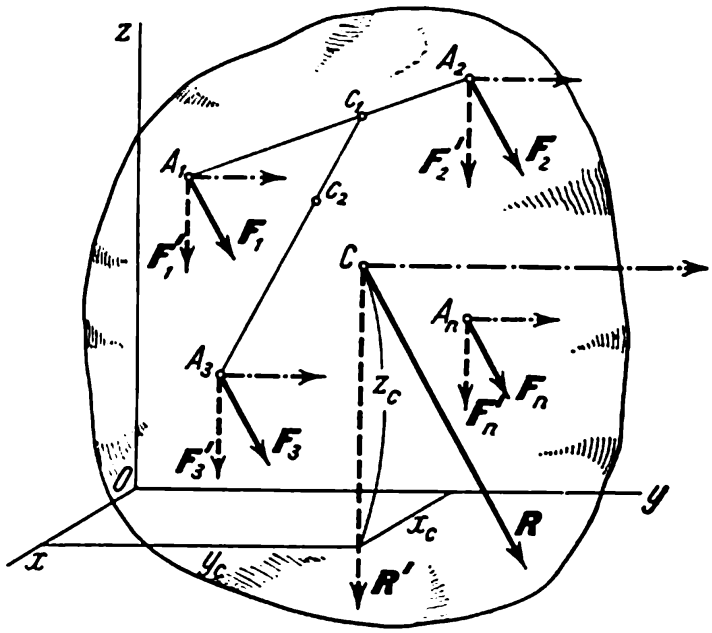


Fig. 125

Soit un système de forces parallèles et dirigées dans un même sens F_1, F_2, . . ., F_n, appliquées à un solide aux points A_1, A_2, ..., A_n (fig. 125). Il est évident que ce système a une résultante R dirigée comme le sont les forces composantes et de module

$$R = \Sigma F_k. \tag{71}$$

Si on fait tourner d'un même angle et dans un même sens chaque force autour de son point d'application on obtiendra un nouveau système de forces parallèles et de même sens, les modules et les points d'application n'ayant pas changé, mais la direction générale s'étant

modifiée (voir, par exemple, les lignes en pointillé de la fig. 125). La résultante de ce système aura évidemment le même module R mais sa ligne d'action changera chaque fois. Pour trouver celle-ci, il faut chaque fois trouver un point quelconque par lequel elle passe. Montrons qu'au cours de toutes ces rotations la *ligne d'action de la résultante passe toujours par un même point C*. En effet, composant d'abord les forces F_1 et F_2, nous trouvons (voir § 17) que quelles que soient leurs rotations leur résultante R_1 (non représentée sur la figure) passera par le point c_1 de la droite A_1A_2 tel que $F_1 \cdot A_1c_1 = F_2 \cdot A_2c_1$ puisque les rotations des forces ne changent ni la position de la droite A_1A_2, ni l'égalité ci-dessus. Composant maintenant la force R_1 et la force F_3, nous obtenons que leur résultante, qui est en même temps celle des forces F_1, F_2, F_3, passera toujours par le point c_2 (qui se définit de manière analogue) de la droite c_1A_3, etc. Terminant cette opération de compositions successives, nous nous convainquons que la résultante R de toutes les forces passe effectivement toujours par le même point C dont la position par rapport aux points A_1, A_2, ..., A_n, c'est-à-dire par rapport au corps, est invariable.

Le point C, par lequel passe la ligne d'action de la résultante d'un système de forces parallèles lorsque celles-ci tournent dans un même sens et d'un même angle autour de leurs points d'application, est appelé centre des forces parallèles ou barycentre.

Trouvons les *coordonnées du centre de forces parallèles*. La position du point C par rapport au corps étant invariable et ne dépendant pas du choix du système de coordonnées, nous prenons des axes de coordonnées arbitraires $Oxyz$ et exprimons en ces coordonnées la position des points d'application des forces et celle du point C: $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, . . ., $C(x_C, y_C, z_C)$. Puisque la position du point C ne dépend pas de la direction des forces, faisons d'abord tourner les forces autour de leurs points d'application de telle manière qu'elles deviennent parallèles à l'axe Oz; puis appliquons aux forces F'_1, F'_2, . . ., F'_n le théorème de Varignon (§ 49). Puisque R' est la résultante de ces forces, la formule (69), appliquée pour l' axe Oy, nous donne

$$m_y(R') = \sum m_y(F'_k).$$

Mais on voit sur la figure [ou par l'égalité (52)] que $m_y(R') = Rx_C$, car $R' = R$, et que $m_y(F'_1) = F_1x_1$, car $F'_1 = F_1$, etc. Donc $Rx_C = F_1x_1 + F_2x_2 + \ldots + F_nx_n$. D'où nous trouvons:

$$x_C = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + \ldots + F_nx_n}{R} = \frac{\sum F_kx_k}{R}.$$

Nous obtiendrons une formule identique pour la coordonnée y_C en prenant les moments par rapport à l'axe Ox. Pour déterminer z_C, faisons tourner de nouveau toutes les forces de manière qu'elles

deviennent parallèles à l'axe Oy et appliquons à ces forces (représentées en traits-points) le théorème de Varignon, en prenant les moments par rapport à l'axe Ox. Cela donne :

$$-Rz_C = -F_1z_1 + (-F_2z_2) + \ldots + (-F_nz_n),$$

d'où nous trouvons z_C.

En définitive, nous obtenons les formules suivantes pour les coordonnées du centre des forces parallèles

$$x_C = \frac{\sum F_k x_k}{R}, \qquad y_C = \frac{\sum F_k y_k}{R}, \qquad z_C = \frac{\sum F_k z_k}{R}, \tag{72}$$

où R se détermine par l'égalité (71).

Remarquons que les formules (71) et (72) seront également vraies pour des forces parallèles dirigées dans des sens différents si l'on considère les F_k comme des grandeurs algébriques, à condition que $R \neq 0$.

§ 53. **Centre de gravité d'un solide.** Toute particule d'un corps se trouvant près de la surface de la terre est soumise à l'action d'une force dirigée verticalement vers le bas et appelée force de pesanteur. Cette force est la résultante de la force d'attraction terrestre et de la force centrifuge due à la rotation du corps avec la terre (cette question sera étudiée plus en détail au § 121).

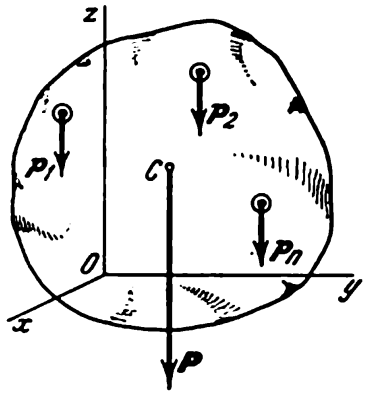


Fig. 126

Pour les corps dont les dimensions sont très petites par rapport au rayon de la terre, on peut admettre que les forces de pesanteur des particules sont parallèles et conservent une grandeur constante quelles que soient les rotations effectuées par le corps. Le champ de pesanteur dans lequel ces deux conditions sont remplies est dit *champ de pesanteur uniforme*.

Désignons par P (fig. 126) la résultante des forces de pesanteur $p_1, p_2, \ldots, p_n$, qui agissent sur les particules d'un corps donné. Le module de cette force est égal au poids du corps et se détermine par l'égalité [1]

$$P = \Sigma p_k. \tag{73}$$

[1] On appelle poids d'un corps la grandeur numérique de la force avec laquelle le corps au repos, qui se trouve dans le champ de pesanteur, appuie sur le support qui l'empêche de tomber verticalement vers le bas (par exemple, sur le plateau d'une balance). Remarquons que la sensation de « pondérabilité » ressentie par l'homme (ou par un animal) sur la terre est le résultat des pressions mutuelles des parties du corps, pressions dues à l'action simultanée des forces

Quelle que soit la rotation effectuée par le corps, les forces p_k restent parallèles et appliquées aux mêmes points du corps, seule leur direction par rapport au corps change. Donc, d'après ce qui a été démontré au § 52, la résultante P des forces p_k passera, quelle que soit la position du corps, par un même point C invariablement lié au corps et qui est le centre de gravité des forces de pesanteur p_k. Ce point est le *centre de gravité du corps*. Ainsi le *centre de gravité d'un solide est le point, invariablement lié à ce corps, par lequel passe la ligne d'action de la résultante des forces de pesanteur des particules du corps, quelle que soit la position de ce dernier dans l'espace*. Il résulte de ce qui a été démontré au § 52 qu'un tel point existe toujours.

Les coordonnées du centre de gravité, puisque c'est le centre des forces parallèles, se déterminent par les formules (72) et seront:

$$x_C = \frac{\sum p_k x_k}{P}, \qquad y_C = \frac{\sum p_k y_k}{P}, \qquad z_C = \frac{\sum p_k z_k}{P}, \tag{74}$$

où x_k, y_k, z_k sont les coordonnées des points d'application des forces de pesanteur p_k des particules du corps.

Remarquons en conclusion que, par définition, le centre de gravité est un point géométrique; il peut se trouver en dehors du corps (par exemple, dans le cas d'un anneau).

§ 54. Coordonnées des centres de gravité des corps homogènes. Pour un corps homogène, le poids p_k d'une quelconque de ses parties est proportionnel au volume v_k de cette partie: $p_k = \gamma v_k$; et le poids P de tout le corps est proportionnel au volume V de ce corps: $P = \gamma V$, où γ est le poids de l'unité de volume.

Portant ces valeurs de P et p_k dans les formules (74), nous remarquons que γ se met en évidence au numérateur et se simplifie avec le γ du dénominateur. Nous avons donc:

$$x_C = \frac{\sum v_k x_k}{V}, \qquad y_C = \frac{\sum v_k y_k}{V}, \qquad z_C = \frac{\sum v_k z_k}{V}. \tag{75}$$

On voit que la position du centre de gravité d'un corps homogène ne dépend que de sa forme géométrique et ne dépend pas de la grandeur γ. C'est pour cette raison que le point C, dont les coordonnées se définissent par les formules (75), est dit centre de *gravité du volume V*.

---

de pesanteur et des réactions des supports qui empêchent l'homme de tomber suivant la verticale. En cas d'une chute verticale libre (par exemple, dans un ascenseur si le câble se rompt) ces pressions mutuelles n'existent pas et l'homme a la sensation d'« impondérabilité » bien qu'il soit soumis en l'occurrence à la force de pesanteur. L'homme a une sensation identique sur un satellite artificiel de la terre.

Raisonnant d'une manière analogue, il est facile de trouver qu'on a pour un disque plan homogène et mince :

$$x_C = \frac{\sum s_k x_k}{S}, \qquad y_C = \frac{\sum s_k y_k}{S}, \tag{76}$$

où S est l'aire de tout le disque, et les s_k les aires de ses parties.

Le point dont les coordonnées se définissent par les formules (76) est appelé *centre de gravité de la surface S*.

On obtient de la même manière les formules pour les coordonnées du *centre de gravité d'une ligne* :

$$x_C = \frac{\sum l_k x_k}{L}, \qquad y_C = \frac{\sum l_k y_k}{L}, \qquad z_C = \frac{\sum l_k z_k}{L}. \tag{77}$$

où L est la longueur de toute la ligne et les l_k les longueurs de ses parties. Les formules (77) permettent de trouver les centres de gravité des articles en fil métallique fin de section constante.

Ainsi, le centre de gravité d'un corps homogène se définit comme le centre de gravité du volume, de la surface ou de la ligne correspondants.

§ 55. **Procédés de détermination des coordonnées des centres de gravité des corps.** Se basant sur les formules générales obtenues ci-dessus, on peut indiquer les procédés concrets de détermination des coordonnées des centres de gravité des corps :

1) Symétrie. Démontrons que si un corps a un plan, un axe ou un centre de symétrie, son centre de gravité se trouve respectivement dans le plan de symétrie, ou sur l'axe de symétrie, ou au centre de symétrie.

Admettons, par exemple, qu'un corps homogène ait un plan de symétrie. Alors, ce plan divise le corps en deux parties dont les poids p_1 et p_2 sont égaux et les centres de gravité se trouvent à des distances égales du plan de symétrie. Donc, le centre de gravité du corps, point par lequel passe la résultante de deux forces égales et parallèles $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$, se trouvera effectivement dans le plan de symétrie. On peut appliquer une démonstration identique dans les cas où le corps a un axe ou un centre de symétrie.

Il résulte des propriétés de la symétrie que le centre de gravité d'un anneau circulaire homogène, d'une plaque ronde ou rectangulaire, d'un parallélépipède rectangle, d'une sphère et d'autres corps homogènes ayant un centre de symétrie, se trouve au centre géométrique (au centre de symétrie) de ces corps.

2) Décomposition. Si l'on peut décomposer le corps en un nombre fini de parties, telles que pour chacune d'elles la position du centre de gravité soit connue, on peut alors calculer directe-

ment les coordonnées du centre de gravité de tout le corps par les formules (74) à (77). Le nombre des termes dans chacun des numérateurs sera alors égal au nombre des parties en question.

Problème 49. Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la plaque homogène représentée sur la figure 127. Toutes les dimensions sont données en centimètres.

Solution. Menons les axes de coordonnées et décomposons la plaque en trois rectangles (les lignes de découpage sont montrées en pointillé). Calculons les coordonnées des centres de gravité de chacun des rectangles ainsi que leurs surfaces (voir tableau).

nos	1	2	3
x_k	—1	1	5
y_k	1	5	9
s_k	4	20	12

La surface de toute la plaque

$$S = s_1 + s_2 + s_3 = 36 \text{ cm}^2.$$

Portant les grandeurs calculées dans les formules (76), nous obtenons:

$$x_C = \frac{x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3}{S} = \frac{-4+20+60}{36} = 2\frac{1}{9} \text{ cm};$$

$$y_C = \frac{y_1 s_1 + y_2 s_2 + y_3 s_3}{S} = \frac{4+100+108}{36} = 5\frac{8}{9} \text{ cm}.$$

La position trouvée du centre de gravité C est montrée sur la figure; le point C se situe en dehors de la plaque. Nous nous convainquons une fois de plus que le centre de gravité d'un corps est un point géométrique qui peut se trouver en dehors du corps donné.

3) Complètement. C'est un cas particulier du procédé de décomposition. On l'applique à des corps ayant des cavités, si les centres de gravité du corps sans cavité et de la cavité sont connus.

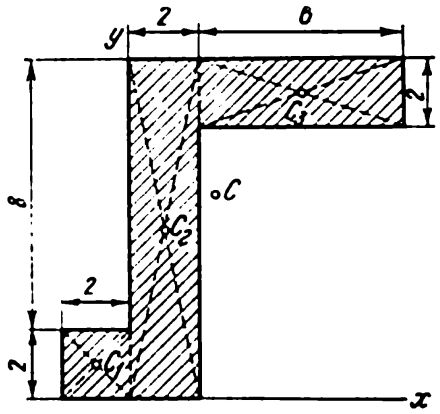


Fig. 127

Problème 50. Déterminer la position du centre de gravité d'un disque rond de rayon R ayant une cavité de rayon r (fig. 128). La distance $C_1C_2 = a$.

Solution. Le centre de gravité du disque se trouve sur la ligne C_1C_2 car cette ligne est un axe de symétrie. Menons les axes de coordonnées. Pour trouver la coordonnée x_C, nous complétons la surface du disque en remplaçant le trou par de la matière (partie I) et nous soustrayons ensuite de l'aire obtenue

l'aire du cercle découpé (partie II), qui doit se prendre avec le signe moins. Alors $s_1 = \pi R^2$, $x_1 = 0$; $s_2 = -\pi r^2$, $x_2 = a$; $S = s_1 + s_2 = \pi (R^2 - r^2)$. Portant les valeurs trouvées dans la formule (76), nous obtenons:

$$x_C = \frac{x_1 s_1 + x_2 s_2}{S} = -\frac{ar^2}{R^2 - r^2}; \qquad y_C = 0.$$

Comme on le voit, le centre de gravité se trouve à gauche du point C_1.

4) Intégration. S'il est impossible de décomposer le corps en un certain nombre fini de parties dont les positions des centres de gravité soient connues, on décompose d'abord le corps en de petits volumes Δv_k arbitraires pour lesquels les formules (75) deviennent

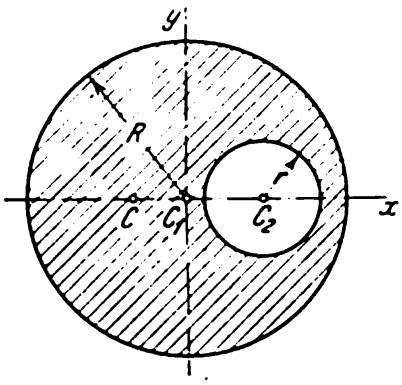


Fig. 128

$$x_C = \frac{\sum x_k \Delta v_k}{V}, \quad \text{etc.}, \tag{78}$$

où x_k, y_k, z_k sont les coordonnées d'un certain point intérieur au volume Δv_k. Ensuite, dans les égalités (78), on passe à la limite en faisant tendre tous les Δv_k vers zéro. Alors, les sommes qui se trouvent aux numérateurs deviennent des intégrales dont le champ d'intégration est tout le volume du corps, et les formules (78) deviennent à la limite:

$$x_C = \frac{1}{V} \int\limits_{(V)} x\, dv, \qquad y_C = \frac{1}{V} \int\limits_{(V)} y\, dv, \qquad z_C = \frac{1}{V} \int\limits_{(V)} z\, dv. \tag{79}$$

Nous obtenons des formules analogues pour les coordonnées des centres de gravité des surfaces et des lignes:

$$x_C = \frac{1}{S} \int\limits_{(S)} x\, ds, \qquad y_C = \frac{1}{S} \int\limits_{(S)} y\, ds \tag{80}$$

et

$$x_C = \frac{1}{L} \int\limits_{(L)} x\, dl, \qquad y_C = \frac{1}{L} \int\limits_{(L)} y\, dl, \qquad z_C = \frac{1}{L} \int\limits_{(L)} z\, dl. \tag{81}$$

On verra dans le paragraphe suivant comment on applique le procédé d'intégration pour déterminer les coordonnées du centre de gravité.

5) Procédé expérimental. On peut déterminer expérimentalement les centres de gravité des corps non homogènes de forme compliquée (avion, locomotive, etc.). L'un des procédés expérimentaux possibles (procédé de suspension) consiste à suspendre le corps à des fils ou à des câbles en différents points de ce corps. La direction du fil auquel est suspendu le corps donnera chaque fois

la direction de la force de la pesanteur. Le point d'intersection de ces directions définit le centre de gravité du corps.

Un autre procédé est la pesée. L'exemple ci-dessous en donne une idée claire.

Exemple. Montrons comment on peut déterminer expérimentalement la position du centre de gravité d'un avion (distance a) si la distance $AB = l$ (fig. 129) est connue. Posant la roue B sur le plateau d'une bascule, nous trouvons

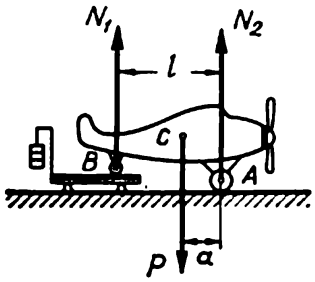


Fig. 129

par pesée la force de pression de la roue sur le plateau; cela fait, nous aurons trouvé la réaction N_1 qui est numériquement égale à cette force. Exactement de la même manière nous trouvons la réaction N_2. Egalant à zéro la somme des moments de toutes les forces par rapport au centre de gravité C de l'avion, nous obtenons $N_2 a - N_1 (l - a) = 0$, d'où nous tirons

$$a = \frac{N_1 l}{N_1 + N_2}.$$

Il est évident que $N_1 + N_2 = P$, où P est le poids de l'avion. Si la grandeur P est a priori connue on peut se contenter d'une seule pesée pour déterminer a.

§ 56. Centres de gravité de certains corps homogènes.

1) Centre de gravité d'un arc de circonférence. Soit un arc AB de rayon R et d'angle central $AOB = 2\alpha$. Par raison de symétrie le centre de gravité de cet arc se trouve sur l'axe Ox (fig. 130). Trouvons la coordonnée x_C par le procédé d'intégration. Pour cela, choisissons sur l'arc AB l'élément MM' de longueur $dl = R\,d\varphi$ dont la position se définit par l'angle φ. La coordonnée x de l'élément MM' sera $x = R\cos\varphi$. Portant ces valeurs de x et dl dans la première des formules (81) et prenant en considération le fait que le domaine d'intégration doit être toute la longueur de l'arc, nous obtenons:

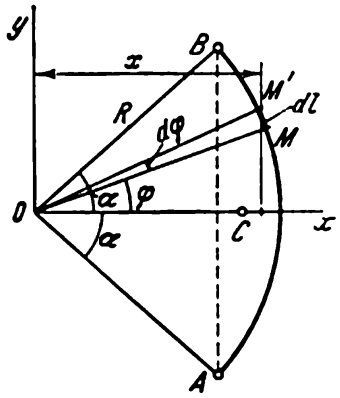


Fig. 130

$$x_C = \frac{1}{L}\int_A^B x\,dl = \frac{R^2}{L}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi\,d\varphi = 2\frac{R^2}{L}\sin\alpha,$$

où L est la longueur de l'arc AB égale à $R \cdot 2\alpha$. Nous obtiendrons en définitive que le *centre de gravité d'un arc de circonférence se trouve sur son axe de symétrie à une distance du centre égale à*

$$x_C = R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}, \tag{82}$$

où l'angle α se mesure en radians.

On peut obtenir le même résultat sans utiliser explicitement la notion d'intégrale. D'après la formule (77), si l'on désigne la longueur de l'élément d'arc par Δl_k, on aura

$$x_C = \frac{1}{L}\sum x_k \Delta l_k,$$

où x_k est la coordonnée de l'élément Δl_k. Aux infiniment petits d'ordre supérieur près, on aura $x_k = R\cos\varphi_k$ (à la place de φ nous

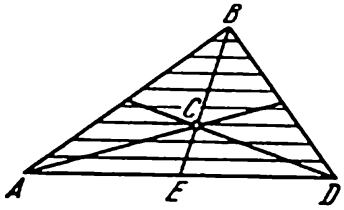


Fig. 131

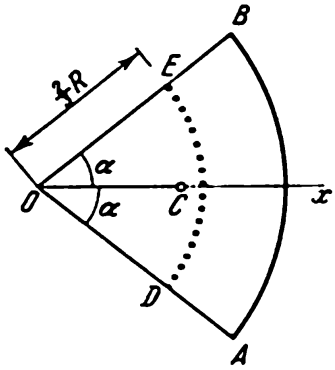


Fig. 132

écrivons φ_k). Alors (voir § 28, fig. 75) $x_k\Delta l_k = R\Delta l_k \cos\varphi_k = R\Delta y_k$, d'où $\Sigma x_k \Delta l_k = R\Sigma\,\Delta y_k = R \cdot AB$. En définitive, remarquant que $AB = 2R\sin\alpha$ et $L = R \cdot 2\alpha$, nous obtiendrons la formule (82).

2) Centre de gravité de la surface d'un triangle. Décomposons la surface du triangle ABD (fig. 131) par des droites parallèles au côté AD en n bandes étroites ; les centres de gravité de ces bandes se trouveront évidemment sur la médiane BE du triangle. Donc le centre de gravité de tout le triangle se trouve sur cette médiane. On obtient un résultat analogue pour les deux autres médianes. Nous en concluons que le *centre de gravité de la surface d'un triangle se trouve au point d'intersection de ses médianes.* Alors, comme on le sait,

$$CE = \frac{1}{3}BE.$$

3) Centre de gravité de la surface d'un secteur circulaire. Soit un secteur circulaire OAB de

rayon R et d'angle central 2α (fig. 132). Décomposons, en pensée, la surface du secteur OAB par des rayons menés du centre O en n secteurs. A la limite, lorsque le nombre n croît indéfiniment, on peut considérer ces secteurs comme des triangles plans dont les centres de gravité se trouvent sur l'arc DE de rayon $\frac{2}{3}R$. Donc, le centre de gravité du secteur OAB coïncidera avec le centre de gravité de l'arc DE dont la position est donnée par la formule (82). En définitive, nous obtenons que le *centre de gravité de la surface d'un secteur circulaire se trouve sur son axe de symétrie à une distance du centre égale à*

$$x_C = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \qquad (83)$$

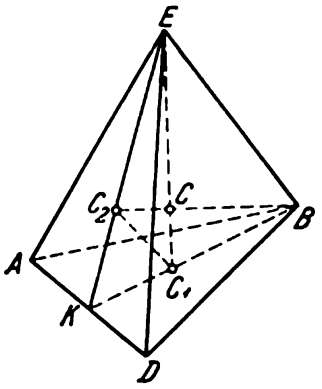


Fig. 133

4) Centre de gravité du volume d'une pyramide. Soit une pyramide triangulaire (un tétraèdre) $ABDE$ (fig. 133). Pour trouver le centre de gravité de la pyramide, décomposons son volume par des plans parallèles à la base ABD en n troncs de pyramides élémentaires qui, à la limite, lorsque le nombre n croît indéfiniment, peuvent être assimilés à des triangles plans. Les centres de gravité de ces triangles se trouvent sur la droite EC_1 qui joint le sommet E de la pyramide et le centre de gravité C_1 de sa base. Le centre de gravité de toute la pyramide se trouvera donc sur la droite EC_1.

Par les mêmes raisonnements nous trouvons que le centre de gravité de la pyramide donnée doit se trouver sur la droite BC_2 qui joint le sommet B et le centre de gravité de la face ADE. Donc le centre de gravité cherché se trouve au point C où se coupent les droites EC_1 et BC_2.

Trouvons la position du point C. Puisque les droites C_1C_2 et BE divisent les côtés de l'angle BKE en des parties proportionnelles, elles sont parallèles, et $\Delta C_1CC_2 \backsim \Delta ECB$; de plus, $C_1C_2 = \frac{1}{3}BE$ car $KC_1 = \frac{1}{3}KB$. D'où nous trouvons:

$$\frac{CC_1}{CE} = \frac{C_1C_2}{BE} = \frac{1}{3}.$$

Par conséquent,

$$CC_1 = \frac{1}{3}CE = \frac{1}{4}C_1E. \qquad (84)$$

Ce résultat sera également vrai pour une pyramide polygonale quelconque et, à la limite, pour un cône.

Ainsi, le centre de gravité du volume d'une pyramide (ou d'un cône) se trouve sur le segment de droite qui joint le sommet de la pyramide (du cône) et le centre de gravité de la base, à une distance, comptée à partir de la base, égale à un quart de la longueur de ce segment.

On peut trouver les formules donnant les coordonnées des centres de gravité de plusieurs autres corps homogènes dans différents aide-mémoire techniques ou mathématiques.

Deuxième partie

Cinématique du point et du corps solide

Chapitre IX

MOUVEMENT RECTILIGNE DU POINT

§ 57. **Introduction.** On appelle *cinématique* la partie de la mécanique qui étudie les propriétés géométriques du mouvement des corps sans tenir compte de leur inertie (masse) et des forces agissant sur eux.

D'une part, la cinématique sert d'introduction à la dynamique, car l'établissement de notions et relations essentielles de la cinématique est nécessaire à l'étude du mouvement des corps soumis à l'action des forces. D'autre part, les méthodes cinématiques possèdent une valeur pratique propre, par exemple, dans le cas de l'étude des transmissions du mouvement dans les mécanismes. C'est pourquoi sous la poussée des exigences de l'industrie mécanique en développement la cinématique est devenue une branche indépendante de la mécanique (dans la première moitié du XIXe siècle).

On entend en mécanique par mouvement le changement dans le temps de la position d'un corps donné dans l'espace par rapport aux autres corps.

Pour définir la position d'un corps ou d'un point en mouvement relativement à un autre corps par rapport auquel on étudie le mouvement, on lie ce dernier d'une façon rigide à un système d'axes de coordonnées nommé *système de référence*. Si les coordonnées de tous les points du corps dans le système de référence choisi restent constantes, on dit que le corps est au repos par rapport à ce système de référence. Si les coordonnées de points quelconques du corps se modifient dans le temps, le corps est en mouvement par rapport au système de référence (ainsi que par rapport au corps auquel ce système est relié). On envisagera dans la suite le mouvement du corps par rapport à un système de référence en sous-entendant le mouvement par rapport à un autre corps lié à ce système de référence.

Le mouvement du corps s'effectue dans l'espace, dans le temps. En mécanique, on suppose que l'espace est euclidien tridimensionnel. Toutes les mesures sont effectuées sur la base de la géométrie

d'Euclide. L'unité de longueur servant à mesurer les distances est le mètre. Le temps est considéré comme universel, c'est-à-dire qu'il s'écoule de la même façon dans tous les systèmes de référence envisagés. L'unité de temps est la seconde, égale à la fraction $\frac{1}{24 \cdot 3600} = \frac{1}{86\,400}$ de la journée moyenne solaire.

L'espace euclidien et le temps universel adopté ne reflètent les propriétés réelles de l'espace et du temps que d'une façon approximative. Cependant, comme l'a montré l'expérience, pour les mouvements étudiés par la mécanique (mouvement dont la vitesse est très petite par rapport à celle de la lumière), cette approximation permet d'atteindre une précision suffisante pour la pratique.

Le temps est une grandeur scalaire qui varie continuellement. En cinématique le temps est pris comme grandeur variable indépendante. Toutes les autres variables sont considérées comme des grandeurs se modifiant dans le temps, c'est-à-dire comme des fonctions du temps t. Le temps est compté à partir d'un certain *moment initial* ($t = 0$) dont le choix est chaque fois précisé. Tout *instant* t donné est déterminé par le nombre de secondes écoulées depuis le moment initial jusqu'à l'instant considéré ; la différence entre deux instants successifs quelconques est appelée *intervalle de temps*.

Les axiomes de la géométrie forment les bases tirées de l'expérience et confirmées par la pratique, sur lesquelles s'appuie la cinématique. On n'a besoin d'aucunes autres lois et axiomes supplémentaires pour procéder à l'étude cinématique du mouvement.

Pour résoudre les problèmes de cinématique il faut que le mouvement étudié soit défini (décrit) d'une manière ou d'une autre.

Définir cinématiquement un mouvement ou formuler la loi du mouvement d'un corps (d'un point) c'est définir à tout instant la position de ce corps (point) par rapport au système de référence choisi. La recherche des formes mathématiques d'expression du mouvement des points ou des corps est une des tâches essentielles de la cinématique.

La *tâche principale de la cinématique* consiste à déterminer, connaissant la loi du mouvement du corps (ou du point) donné, toutes les grandeurs cinématiques caractérisant le mouvement du corps pris dans son ensemble, ainsi que celui de chacun de ses points séparément (trajectoire, vitesse, accélération, etc.).

Pour résoudre ce problème, il faut qu'on définisse directement soit la loi du mouvement du corps donné, soit celle d'un autre corps lié cinématiquement au premier.

Nous commencerons l'étude de la cinématique par l'étude du mouvement de l'objet le plus simple, le point matériel (cinématique du point), pour passer ensuite à l'étude de la cinématique du corps solide.

La ligne ininterrompue décrite par un point en mouvement par rapport à un système de référence est appelée *trajectoire* de ce point. On dit que le mouvement du point est *rectiligne* si la trajectoire est une droite, et *curviligne* quand c'est une courbe. Dans ce chapitre on étudiera le cas du mouvement rectiligne du point.

§ 58. **Loi du mouvement rectiligne.** Choisissons sur la droite le long de laquelle se meut le point M une origine des coordonnées O (point de repère) et faisons porter par cette droite l'axe Ox (fig. 134). Alors la position du point sur l'axe sera déterminée par sa

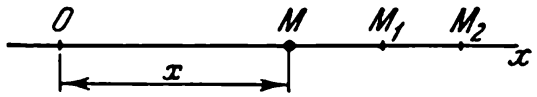


Fig. 134

coordonnée x, égale à la distance OM, prise avec un signe convenable. Au cours du mouvement le point M occupera les positions M_1, M_2 et ainsi de suite ; par conséquent, la grandeur x se modifiera constamment. Pour déterminer la position du point sur la trajectoire à tout instant, il faut connaître la relation :

$$x = f(t). \tag{1}$$

L'équation (1) exprime la *loi du mouvement rectiligne du point.*

Par exemple, quand le point se meut à partir de l'origine O de façon que sa distance à ce repère croît proportionnellement au carré du temps, la loi du mouvement du point sera :

$$x = at^2,$$

où a est un coefficient, numériquement égal à la distance parcourue par le point pendant la première seconde. A l'instant $t_2 = 2$s, la distance à l'origine est égale à $4a$, etc. Nous pouvons donc, connaissant l'équation (1), déterminer la position du point à tout instant.

Notons que dans l'équation (1) la grandeur x détermine la *position* du point en mouvement et non pas la *distance qu'il a parcourue.* Par exemple, si le point, partant de l'origine O, arrive en M_1 (voir fig. 134), et ensuite, en se déplaçant dans le sens inverse, atteint la position M, il aura pour coordonnée à cet instant $x = OM$, or la distance parcourue sera $OM_1 + M_1M$, qui n'est pas égale à x.

§ 59. **Vitesse et accélération du point en mouvement rectiligne.** La vitesse est une des caractéristiques essentielles du mouvement d'un point. Introduisons tout d'abord la notion de vitesse moyenne.

Si à l'instant t le point se trouve en M et à l'instant t_1 en M_1 et si dans l'intervalle de temps $\Delta t = t_1 - t$ il a subi un déplacement

$\Delta x = x_1 - x$ (fig. 135), on appelle vitesse moyenne du point durant cet intervalle de temps la grandeur vectorielle, dont la valeur numérique est égale à[1]:

$$v_{\text{moy}} = \frac{x_1 - x}{t_1 - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{2}$$

Le vecteur représentant la vitesse moyenne v_{moy} est dirigé dans le sens du mouvement du point, c'est-à-dire de M vers M_1.

Plus l'intervalle de temps $\Delta t = t_1 - t$ pour lequel on a calculé la vitesse moyenne est petit, avec plus de précision la valeur v_{moy}

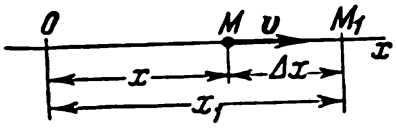


Fig. 135

caractérise le mouvement du point. Pour obtenir une caractéristique du mouvement, indépendante de l'intervalle de temps Δt, on a introduit la notion de *vitesse instantanée du point.*

Par vitesse instantanée du point on entend la grandeur v vers laquelle tend la vitesse moyenne quand l'intervalle de temps Δt tend vers zéro ; en valeur numérique

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{ou} \quad v = \frac{dx}{dt}. \tag{3}$$

Il en résulte que *dans un mouvement rectiligne la valeur numérique de la vitesse instantanée du point est égale à la dérivée première de sa coordonnée x par rapport au temps.*

La grandeur v peut être affectée du signe plus ou du signe moins. D'après l'équation (3) on voit que le signe de v est le même que celui de Δx ; par suite, si $v > 0$, le point se meut dans le sens des x croissants (vecteur v dirigé dans le sens positif de l'axe Ox) ; si $v < 0$, le mouvement s'effectue dans le sens des x décroissants (vecteur v dirigé dans le sens négatif de l'axe Ox). La dimension de la vitesse est longueur/temps (m/s, par exemple).

Durant le mouvement, la vitesse du point peut varier. La grandeur caractérisant la variation de la vitesse du point avec le temps est appelée *accélération du point.*

Introduisons d'abord la notion d'accélération moyenne. Si à l'instant t la vitesse du point est égale à v et à l'instant t_1 devient

[1] La valeur numérique (ou algébrique) de tout vecteur u ne se distingue de son module que par le signe. C'est pourquoi on désignera la valeur numérique et le module par la même notation u car en pratique ça revient au même. Dans les cas où il est nécessaire de souligner qu'il s'agit du module du vecteur u, on employera pour le module la notation $|u|$.

égale à v_1 en subissant un accroissement $\Delta v = v_1 - v$, on appelle accélération moyenne du point pendant l'intervalle de temps $\Delta t = t_1 - t$ la grandeur vectorielle $\boldsymbol{w}_{\text{moy}}$ dont la valeur numérique est donnée par l'équation

$$w_{\text{moy}} = \frac{v_1 - v}{t_1 - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{4}$$

Le vecteur $\boldsymbol{w}_{\text{moy}}$ est dirigé dans le sens positif de l'axe quand $w_{\text{moy}} > 0$ et dans le sens négatif quand $w_{\text{moy}} < 0$.

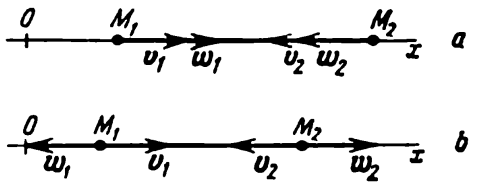


Fig. 136

On trouve l'accélération instantanée du point en déterminant la limite vers laquelle tend l'accélération moyenne $\boldsymbol{w}_{\text{moy}}$ quand l'intervalle de temps Δt tend vers zéro ; sa valeur numérique est :

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

ou, en tenant compte de l'équation (3),

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{5}$$

Ainsi, *dans le mouvement rectiligne, la valeur numérique de l'accélération instantanée du point est égale à la dérivée première de la vitesse ou à la dérivée seconde de la coordonnée x du point par rapport au temps.*

Le vecteur accélération $\boldsymbol{w}$ est dirigé dans le sens positif de l'axe Ox quand $w > 0$ et dans le sens négatif quand $w < 0$. La dimension de l'accélération est longueur/temps ^{2} (en m/s^2 notamment).

Si pendant le mouvement du point le module de sa vitesse augmente, le mouvement est dit *accéléré* ; le mouvement est dit *retardé* quand le module de la vitesse décroît. Il est évident que le mouvement rectiligne du point sera accéléré quand les vecteurs vitesse et accélération seront orientés dans le même sens, c'est-à-dire quand v et w auront les mêmes signes (fig. 136, *a*) ; le mouvement sera retardé quand les vecteurs vitesse et accélération seront orientés dans des sens opposés, c'est-à-dire quand v et w auront des signes contraires (fig. 136, *b*).

Les formules obtenues montrent qu'en connaissant la loi du mouvement d'un point, exprimée par l'équation (1), il est possible de

déterminer à chaque instant non seulement la position de ce point mais encore les caractéristiques essentielles de son mouvement: vitesse et accélération.

§ 60. Quelques exemples du mouvement rectiligne du point. Le point peut se déplacer le long de la trajectoire donnée, une ligne droite par exemple, selon des lois différentes. Examinons certaines d'entre elles.

1) Mouvement uniforme. *Par mouvement rectiligne uniforme* on entend un mouvement rectiligne à vitesse constante (v = const.). La loi de ce mouvement a l'aspect suivant [1]:

$$x = x_0 + vt, \tag{6}$$

où x_0 est la coordonnée du point à l'instant $t = 0$.

Il est facile de remarquer que l'espace s, parcouru par le point pendant le temps t, est égal à $x - x_0$. Il s'ensuit que, pour le mouvement uniforme, l'espace parcouru par le point s'accroît proportionnellement au temps et que la vitesse du mouvement est égale au rapport de l'espace au temps

$$s = vt; \qquad v = \frac{s}{t}. \tag{7}$$

Comme la vitesse v est constante, l'accélération de ce mouvement est égale à zéro ($w = 0$).

2) Mouvement uniformément varié. *Par mouvement uniformément varié* du point on entend un mouvement rectiligne à accélération constante (w = const.). La loi de ce mouvement a l'aspect suivant:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} wt^2, \tag{8}$$

où v_0 est la vitesse initiale du point (vitesse à l'instant $t = 0$).

En différentiant l'équation (8) par rapport au temps, on trouve que la vitesse du mouvement uniformément varié est à chaque instant égale à

$$v = v_0 + wt. \tag{9}$$

Il s'ensuit que la vitesse de ce mouvement s'accroît proportionnellement au temps (c'est-à-dire uniformément) et que l'espace parcouru (quand $v_0 = 0$) s'accroît proportionnellement au carré du temps.

Si pendant le mouvement les grandeurs v et w sont du même signe le mouvement est dit *uniformément accéléré*, quand ces grandeurs sont de signes différents le mouvement est dit *uniformément retardé*.

[1] Les équations (6) et (8) peuvent être obtenues comme cela est fait pour le cas du mouvement curviligne au § 70.

Un exemple du mouvement rectiligne uniformément varié est donné par le mouvement d'un poids lancé verticalement vers le haut ou vers le bas, la résistance de l'air étant négligée.

3) Oscillations harmoniques. Examinons le mouvement rectiligne du point quand sa distance x à l'origine des coordonnées O varie avec le temps en conformité avec la loi

$$x = a \cos kt, \tag{10}$$

où a et k sont deux constantes.

Le point M (fig. 137), dans ce mouvement, oscille entre les positions M_0 $(+a)$ et M_1 $(-a)$. Les oscillations du type décrit par la loi (10) jouent un grand rôle en technique. Elles sont appelées

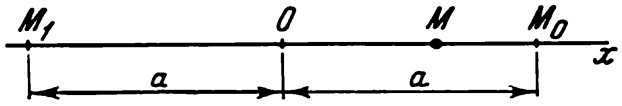


Fig. 137

oscillations harmoniques simples. La grandeur a, égale au plus grand éloignement du point du centre d'oscillations O, est appelée *amplitude d'oscillations.*

Il est facile de voir qu'en commençant le mouvement à l'instant $t = 0$ à partir du point M_0, le point reviendra de nouveau à cette position à l'instant t_1 pour lequel $\cos kt_1 = 1$, c'est-à-dire $kt_1 = 2\pi$.

L'intervalle de temps $T = t_1 = \frac{2\pi}{k}$, durant lequel le point effectue une oscillation complète, est appelé *période* d'oscillations.

Prenant les dérivées de x par rapport à t, on détermine les valeurs numériques de la vitesse et de l'accélération du point

$$v = -ak \sin kt, \qquad w = -ak^2 \cos kt.$$

Dans ce mouvement, la vitesse et l'accélération varient donc en fonction du temps suivant la loi du mouvement oscillatoire. Quand le point se trouve au centre d'oscillations ($x = 0$ et $\cos kt = 0$), son accélération devient $w = 0$ et le module de sa vitesse atteint la plus grande valeur $v_{max} = ak$ (pour $\cos kt = 0$ on a $\sin kt = \pm 1$); aux positions extrêmes M_0 et M_1, où $x = \pm a$ et $\cos kt = \pm 1$, la vitesse du point est égale à zéro et le module de l'accélération a la plus grande valeur $w_{max} = ak^2$.

Les signes de v et de w permettent de vérifier que le mouvement du point est accéléré quand il se dirige vers le centre d'oscillations et retardé quand il s'écarte du centre d'oscillations.

Le point effectue des oscillations analogues si la loi du mouvement est donnée par l'expression $x = a \sin kt$, cependant dans ce cas le mouvement débute du centre O.

§ 61. Abaques du mouvement, de la vitesse et de l'accélération du point. Si on porte à des échelles appropriées le temps t sur l'axe des abscisses et le chemin x sur l'axe des ordonnées, la courbe $x = f(t)$ construite à l'aide de ces axes sera l'*abaque des espaces* ou le *graphique du mouvement* du point. Sur ce graphique on voit très bien les changements de la position du point (de sa coordonnée x) en fonction du temps.

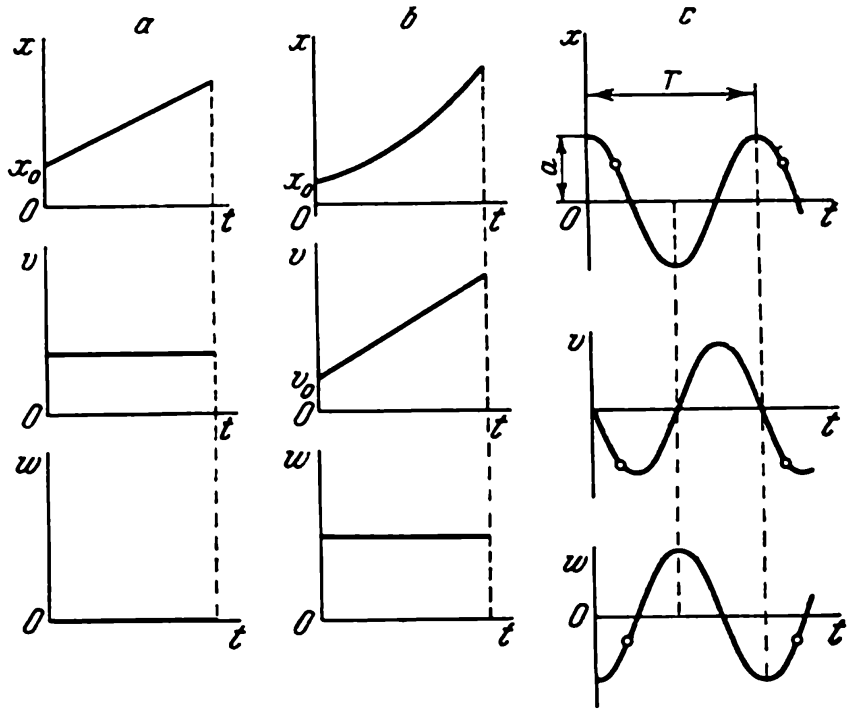


Fig. 138

De manière analogue, on peut construire les courbes représentant les fonctions $v(t)$ (*abaque de la vitesse*) et $w(t)$ (*abaque de l'accélération*).

Sur les figures 138, *a*, *b*, *c*, en haut, sont donnés les abaques des mouvements définis par les équations (6), (8) et (10). Au-dessous, sont figurés les abaques des vitesses et des accélérations de ces mouvements.

Le graphique du mouvement uniforme est représenté, comme on le voit, par une ligne droite faisant un certain angle avec l'axe des abscisses; l'abaque de la vitesse de ce mouvement est une droite parallèle à l'axe des abscisses (v = const.) et l'abaque de l'accélération, une droite coïncidant avec l'axe des abscisses ($w = 0$). Pour le mouvement uniformément varié (accéléré dans le cas de la fig. 138, *b*), le graphique du mouvement est représenté par une branche de parabole, le graphique de la vitesse, par une droite dirigée sous un certain angle par rapport à l'axe des abscisses et le graphique

de l'accélération, par une droite parallèle à l'axe des abscisses (w = const.). Enfin, pour les oscillations harmoniques (fig. 138, *c*), les diagrammes correspondants sont des cosinusoïdes ou des sinusoïdes.

Il ne faut pas confondre le graphique du mouvement avec sa trajectoire qui, dans tous les cas envisagés, est une ligne droite.

§ 62. **Résolution des problèmes.** Les problèmes que les méthodes appropriées de la cinématique du point permettent de résoudre consistent à déterminer la vitesse ou l'accélération du mouvement (en mouvement curviligne, la trajectoire du point également) ou bien à trouver le temps nécessaire pour parcourir telle ou telle distance, ou l'espace parcouru durant un intervalle de temps déterminé, et ainsi de suite.

Avant de résoudre un problème de ce genre, il faut *déterminer la loi régissant le mouvement du point.* Un des deux cas suivants peut se présenter :

1) La loi du mouvement du point est donnée directement soit par les équations du mouvement, soit par une expression descriptive (« le point est animé d'un mouvement uniforme», « le point est animé d'un mouvement uniformément retardé », etc.). Dans ce cas la résolution du problème consiste à utiliser les formules adéquates.

2) La loi du mouvement du point n'est pas donnée, mais celui-ci dépend d'une façon déterminée du mouvement connu d'un autre point (ou d'un autre corps). Dans ce cas, *il faut commencer par rechercher les équations déterminant la loi du mouvement du point étudié.*

Problème 51. Un train, se déplaçant à la vitesse $v_0 = 54$ km/h, commence à freiner et s'arrête au bout de $t_1 = 2$ mn.

En supposant que pendant le freinage le train était en mouvement uniformément retardé, trouver la longueur du chemin parcouru au cours du freinage.

Solution. Par hypothèse, le mouvement du train est uniformément retardé. La loi du mouvement sera donc déterminée par l'équation (8)

$$x = v_0 t + w\frac{t^2}{2}, \tag{a}$$

où x est compté en partant de l'endroit où commence le freinage (c'est pourquoi $x_0 = 0$) ; la vitesse est égale à

$$v = v_0 + wt. \tag{b}$$

Puisqu'au temps $t = t_1$ le train s'arrête, $v_1 = 0$. En portant ces valeurs dans l'équation (b), on obtient $0 = v_0 + wt_1$, d'où on déduit l'accélération du mouvement :

$$w = -\frac{v_0}{t_1}.$$

En portant la valeur trouvée de w dans l'équation (a) et en y faisant $t = t_1$, on détermine le chemin parcouru

$$x_1 = \frac{v_0 t_1}{2} = 900 \text{ m}.$$

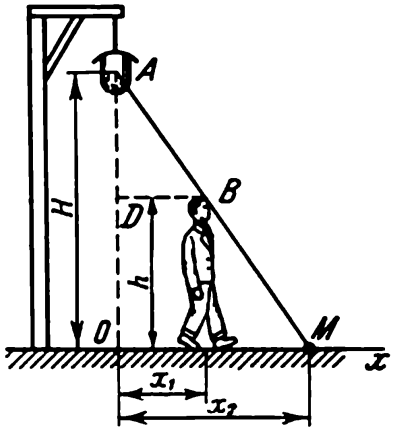
Remarquons que lors des calculs numériques toutes les grandeurs doivent s'exprimer obligatoirement dans les mêmes unités de mesure (on exprime habituellement le temps en secondes et les longueurs en mètres).

Dans notre cas

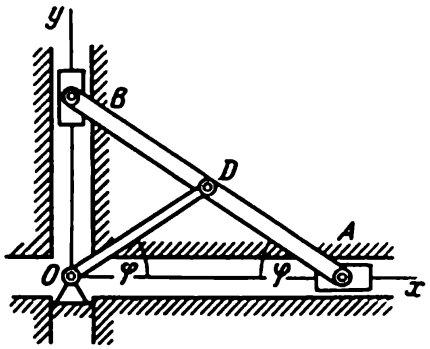
$$v_0 = \frac{54 \cdot 1000}{3600} = \frac{54}{3{,}6} = 15 \text{ m/s}; \qquad t_1 = 120 \text{ s}.$$

Problème 52. Un homme de taille h s'écarte à la vitesse u d'une lanterne suspendue à la hauteur H. Quelle est la vitesse de déplacement de l'extrémité de l'ombre?

S o l u t i o n. Pour résoudre le problème, trouvons d'abord la loi du déplacement de l'extrémité de l'ombre. Prenons comme origine le point O sur la verticale de la lanterne et dirigeons l'axe Ox à droite (fig. 139). Supposons que l'hom-



F i g. 139



F i g. 140

me se trouve à une distance quelconque x_1 du point O. Dans ce cas l'extrémité de son ombre se trouve à une distance x_2 de l'origine O. La similitude des triangles OAM et DAB nous permet d'écrire:

$$x_2 = \frac{H}{H-h} x_1.$$

Cette équation exprime la loi du mouvement de l'extrémité de l'ombre M si la loi du déplacement de l'homme, c'est-à-dire $x_1 = f(t)$, est connue.

Prenant la dérivée des deux membres de l'égalité ci-dessus par rapport au temps et notant $\frac{dx_1}{dt} = u$ et $\frac{dx_2}{dt} = v$, où v est la vitesse cherchée, on obtient:

$$v = \frac{H}{H-h} u.$$

Quand l'homme se déplace à une vitesse constante (u = const.), la vitesse de l'extrémité de son ombre sera aussi constante, mais multipliée par $\frac{H}{H-h}$.

Remarquons que lors de l'*établissement des équations du mouvement, il faut représenter le corps ou le mécanisme en mouvement* (voir problème 53) *dans une position quelconque*. C'est seulement alors qu'on obtient les équations pour la position du point (ou du corps) à tout instant.

Problème 53. Dans le mécanisme représenté fig. 140, les coulisseaux A et B, reliés par la tige AB d'une longueur $l = 30$ cm, se déplacent, sous l'effet de la rotation de la manivelle OD, sur des glissières mutuellement perpendiculaires. La manivelle OD de longueur $\frac{l}{2}$ est articulée au milieu de la tige AB. Déterminer la loi du mouvement des coulisseaux A et B, si la manivelle tourne de façon que l'angle φ s'accroisse proportionnellement au temps (on appelle cette rotation, rotation uniforme) tout en faisant deux tours par minute. Quelles sont les vitesses et les accélérations des coulisseaux au moment où l'angle $\varphi = 30°$?

Solution. Connaissant le mouvement de la manivelle OD, on peut déterminer les lois du mouvement des points A et B. Selon les données du problème, $\varphi = kt$, où k est un coefficient constant. On sait que quand $t = 60$ s, l'angle $\varphi = 4\pi$ (deux tours), d'où $4\pi = 60k$, $k = \pi/15$.

Maintenant, traçons les axes de coordonnées Ox et Oy et trouvons les lois du mouvement des coulisseaux. Comme $OD = AD$, $\angle OAB = \varphi$. Alors, $x_A = l \cos \varphi$, $y_B = l \sin \varphi$, ou

$$x_A = l \cos kt; \quad y_B = l \sin kt. \tag{a}$$

Ce sont les équations qui déterminent la loi du mouvement de chaque coulisseau. Comme on le voit, les coulisseaux effectuent des oscillations harmoniques. Prenant les dérivées de x_A et y_B par rapport au temps, on trouve les vitesses et les accélérations des coulisseaux:

$$v_A = -kl \sin kt, \quad w_A = -k^2 l \cos kt;$$
$$v_B = kl \cos kt, \quad w_B = -k^2 l \sin kt.$$

Quand l'angle $\varphi = 30°$, $kt = \frac{\pi}{6}$. A ce moment

$$v_A = -\frac{kl}{2} = -3{,}14 \text{ cm/s}, \quad w_A = -\frac{k^2 l \sqrt{3}}{2} = -1{,}14 \text{ cm/s}^2;$$

$$v_B = \frac{kl\sqrt{3}}{2} = 5{,}44 \text{ cm/s}; \quad w_B = -\frac{k^2 l}{2} = 0{,}66 \text{ cm/s}^2.$$

Les signes indiquent les sens des vecteurs vitesse et accélération. De la position examinée, le coulisseau A se déplace d'un mouvement accéléré et le coulisseau B d'un mouvement retardé.

Chapitre X

MOUVEMENT CURVILIGNE DU POINT

§ 63. Définition du mouvement du point par le procédé vectoriel. Pour définir le mouvement du point il faut pouvoir fixer à tout instant sa position par rapport au système de référence choisi. On peut donner le mouvement curviligne du point par un des trois modes suivants: 1) par un vecteur, 2) à l'aide des coordonnées, 3) par l'équation du mouvement sur la trajectoire (c'est-à-dire d'une façon naturelle).

Commençons par le *mode vectoriel*. Soit un point M se déplaçant par rapport à un système de référence $Oxyz$. On peut fixer la position

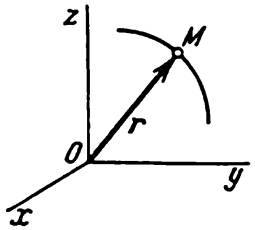


Fig. 141

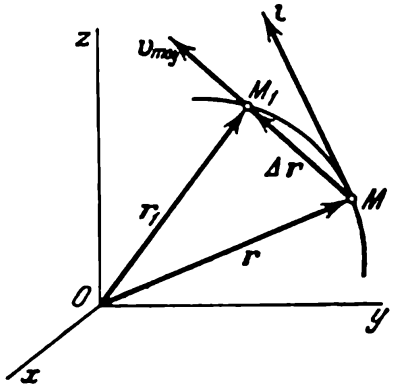


Fig. 142

de ce point à tout instant par un vecteur $\boldsymbol{r}$, mené de l'origine des coordonnées O au point M (fig. 141). Le vecteur $\boldsymbol{r}$ est appelé *rayon vecteur* du point M.

Pendant le mouvement du point M, le vecteur $\boldsymbol{r}$ changera d'intensité et de direction. Il s'ensuit que $\boldsymbol{r}$ est un vecteur fonction du temps t:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t). \tag{11}$$

L'expression (11) donne la loi du mouvement curviligne du point sous une forme vectorielle, car elle permet à tout instant t de tracer le vecteur $\boldsymbol{r}$ correspondant et de trouver la position du point en mouvement [1].

Le lieu géométrique des extrémités du vecteur $\boldsymbol{r}$ détermine la trajectoire du point en mouvement.

---

[1] Le vecteur $\boldsymbol{r}$ peut être donné par son module et par les angles qu'il forme avec les axes de coordonnées ou par ses projections sur ces axes. Ainsi, l'égalité (11) remplace d'une façon symbolique le système d'équations donnant r, α, β et γ ou r_x, r_y, r_z en fonction de t.

§ 64. **Vecteur vitesse du point.** Soit un point en mouvement qui à l'instant t se trouve dans la position M déterminée par le rayon vecteur $\boldsymbol{r}$, et à l'instant t_1, dans la position M_1 déterminée par le vecteur $\boldsymbol{r}_1$ (fig. 142). Dans ce cas le déplacement du point au cours de l'intervalle de temps $\Delta t = t_1 - t$ est déterminé par le vecteur $\overline{MM_1}$, qu'on appellera *vecteur déplacement du point.*

Le triangle OMM_1 permet d'écrire $\boldsymbol{r} + \overline{MM_1} = \boldsymbol{r}_1$; donc,

$$\overline{MM_1} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r} = \Delta \boldsymbol{r}.$$

Le rapport du vecteur déplacement du point à l'intervalle de temps correspondant détermine le vecteur vitesse moyenne (en module et en direction) du point durant cet intervalle de temps

$$\boldsymbol{v}_{\text{moy}} = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}. \tag{12}$$

Le module de la vitesse moyenne, donnée par la formule (12), est égal à

$$v_{\text{moy}} = \frac{MM_1}{\Delta t}. \tag{12'}$$

Le vecteur $\boldsymbol{v}_{\text{moy}}$ a le même support que le vecteur $\overline{MM_1}$, qui est la corde MM_1, et son sens est celui du mouvement du point.

Par vitesse instantanée du point on entend la grandeur vectorielle $\boldsymbol{v}$ vers laquelle tend la vitesse moyenne $\boldsymbol{v}_{\text{moy}}$ quand l'intervalle de temps Δt tend vers zéro

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (\boldsymbol{v}_{\text{moy}}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}.$$

La limite du rapport $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ pour $\Delta t \to 0$ représente la dérivée première du vecteur $\boldsymbol{r}$ par rapport au temps et est désignée, aussi bien que la dérivée de la fonction scalaire, par la notation $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$[1]. En définitive, on a:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}. \tag{13}$$

Ainsi, *le vecteur vitesse instantanée du point est égal à la dérivée première du rayon vecteur du point par rapport au temps.*

Comme à la limite la sécante MM_1 se confond avec la tangente en M, le vecteur vitesse instantanée du point est porté par la tangente à la trajectoire du point et est dirigé dans le sens du mouvement.

---

[1] En général, pour chaque vecteur variable $\boldsymbol{u}$ dépendant du temps

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{u}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}.$$

La formule (13) montre aussi que le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ est égal au rapport du déplacement élémentaire du point $d\boldsymbol{r}$, porté par la tangente à la trajectoire, à l'intervalle de temps correspondant dt.

§ 65. Vecteur accélération du point. Dans le mouvement curviligne, l'accélération caractérise les variations du module et de la direction de la vitesse du point avec le temps. Soit un point mobile qui à l'instant t est en M et a une vitesse $\boldsymbol{v}$ et arrive en M_1 à l'instant t_1 avec une vitesse $\boldsymbol{v}_1$ (fig. 143). Dans ce cas, durant l'intervalle de

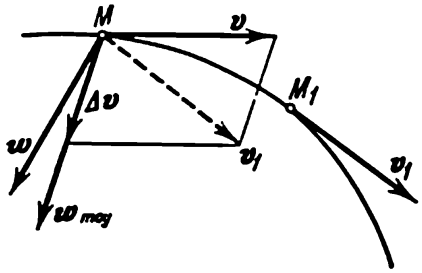


Fig. 143

temps $\Delta t = t_1 - t$, la vitesse du point s'accroît de $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}$. Pour tracer le vecteur $\Delta \boldsymbol{v}$, portons le vecteur $\boldsymbol{v}_1$ à partir de M et construisons le parallélogramme dans lequel $\boldsymbol{v}_1$ sera la diagonale et $\boldsymbol{v}$, un des côtés. Il est évident que dans ce cas le deuxième côté représentera le vecteur $\Delta \boldsymbol{v}$. Il faut noter que le vecteur $\Delta \boldsymbol{v}$ est toujours dirigé vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire.

Le rapport de l'accroissement du vecteur vitesse $\Delta \boldsymbol{v}$ à l'intervalle de temps correspondant Δt détermine *le vecteur accélération moyenne du point* pendant cet intervalle de temps:

$$\boldsymbol{w}_{\text{moy}} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}.$$

Le vecteur accélération moyenne a évidemment la même direction que le vecteur $\Delta \boldsymbol{v}$, c'est-à-dire qu'il est dirigé vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire.

On entend par accélération du point à l'instant donné t la grandeur vectorielle $\boldsymbol{w}$ vers laquelle tend l'accélération moyenne quand l'intervalle de temps Δt tend vers zéro:

$$\boldsymbol{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$$

ou, compte tenu de l'égalité (13),

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}. \tag{14}$$

Par conséquent, *le vecteur accélération instantanée du point est égal à la dérivée première du vecteur vitesse ou à la dérivée seconde du rayon vecteur du point par rapport au temps.*

Il découle aussi de la formule (14) que le vecteur accélération du point $\boldsymbol{w}$ est égal au rapport de l'accroissement élémentaire du vecteur vitesse $d\boldsymbol{v}$ à l'intervalle de temps correspondant dt.

Examinons la position du vecteur $\boldsymbol{w}$ par rapport à la trajectoire du point. Si la trajectoire du point est une courbe plane, le vecteur accélération $\boldsymbol{w}$, de même que le vecteur $\boldsymbol{w}_{\text{moy}}$, se trouve dans le plan de la courbe et est dirigé vers l'intérieur de la concavité.

Si la trajectoire n'est pas une courbe plane, le vecteur $\boldsymbol{w}_{\text{moy}}$ sera dirigé vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire et se trouvera dans le plan passant par la tangente à la trajectoire au point M et la parallèle à la tangente au point voisin M_1 (voir fig. 143). A la limite, quand le point M_1 tend vers M, ce plan occupe la position du *plan osculateur* [1]. Par conséquent, dans le cas général, le *vecteur accélération $\boldsymbol{w}$ se trouve dans le plan osculateur et il est dirigé vers l'intérieur de la concavité de la courbe.*

Les formules (13) et (14) obtenues aux paragraphes 64, 65 sont les expressions vectorielles générales des principales caractéristiques cinématiques du mouvement. Elles permettent de déduire toutes les autres formules et relations qui jouent dans la cinématique du point.

§ 66. Théorème sur la projection de la dérivée d'un vecteur. Dans les égalités vectorielles contenant des dérivées, le passage des relations entre les vecteurs aux relations entre leurs projections est réalisé à l'aide du théorème suivant: *la projection de la dérivée d'un vecteur sur un axe immobile est égale à la dérivée de la projection du vecteur sur le même axe.*

Soit un vecteur variable $\boldsymbol{p}$ dépendant de l'argument t. La dérivée de $\boldsymbol{p}$ par rapport à t donne un autre vecteur $\boldsymbol{q}$. On a:

$$\boldsymbol{q} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}}{\Delta t},$$

où $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{p}_1$ sont les valeurs du vecteur aux instants t et t_1. En utilisant le théorème sur la projection d'une somme (ou d'une différence)

---

[1] Le plan osculateur au point M de la courbe peut être encore défini comme la position limite du plan passant par les points M, M_1 et M_2 de la courbe, quand les points M_1 et M_2 tendent vers M. Parmi tous les plans passant par le point M, le plan osculateur a le plus grand ordre d'osculation avec la courbe (adhère à la courbe plus étroitement que les autres plans). Une courbe dans l'espace (une hélice, par exemple) aura en chaque point son plan osculateur. Pour une courbe plane, le plan osculateur coïncide avec le plan de cette courbe et est commun à tous ses points.

de vecteurs sur un axe, on obtient :

$$q_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{1x} - p_x}{\Delta t},$$

où p_x et q_x sont les projections des vecteurs $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ sur l'axe Ox. Mais $p_{1x} - p_x = \Delta p_x$. Il en découle que

$$q_x = \lim \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{dp_x}{dt}.$$

Ainsi on a démontré le théorème, puisqu'on a montré que si

$$\boldsymbol{q} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}, \quad \text{alors} \quad q_x = \frac{dp_x}{dt}. \tag{15}$$

Les relations du genre (15) ne sont en général pas valables pour les modules de vecteurs, car si $\boldsymbol{q} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$, on aura dans le cas général $|\boldsymbol{q}| \neq \frac{d|\boldsymbol{p}|}{dt}$.

En particulier, on a démontré que $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ et $\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$; mais, dans le cas général, $|\boldsymbol{v}| \neq \frac{d|\boldsymbol{r}|}{dt}$ et $|\boldsymbol{w}| \neq \frac{d|\boldsymbol{v}|}{dt}$.

En effet, si, par exemple, le point se déplace sur une circonférence dont le centre est situé à l'origine des coordonnées, sa vitesse sera $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ ($\boldsymbol{r}$ changeant de direction avec le temps), mais le module $|\boldsymbol{r}| = \text{const}$, et, par conséquent, $\frac{d|\boldsymbol{r}|}{dt} = 0$; il est donc clair que $|\boldsymbol{v}| \neq \frac{d|\boldsymbol{r}|}{dt}$. On montrera de même que $|\boldsymbol{w}| \neq \frac{d|\boldsymbol{v}|}{dt}$ au § 69.

On examinera ci-dessus la question de détermination des modules de la vitesse et de l'accélération du point.

§ 67. Donnée du mouvement du point par ses coordonnées. Détermination de la trajectoire, de la vitesse et de l'accélération du point. On peut déterminer la position du point par rapport au

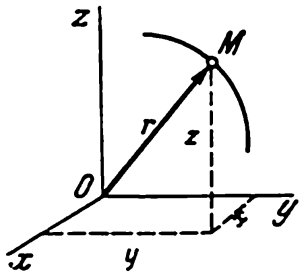


Fig. 144

système de référence donné $Oxyz$ par ses coordonnées cartésiennes x, y, z (fig. 144). Pendant le mouvement ces trois coordonnées se modifieront dans le temps. Pour définir la loi du mouvement curviligne du point, c'est-à-dire sa position spatiale à tout instant, il faut

savoir les valeurs de ses coordonnées à chaque instant, c'est-à-dire connaître les fonctions

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \tag{16}$$

Les expressions (16) sont les *équations du mouvement du point dans les coordonnées cartésiennes* [1].

Si le mouvement du point est plan, après avoir identifié le plan du mouvement avec celui de Oxy, on n'obtient que deux équations du mouvement :

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t). \tag{17}$$

Montrons comment on détermine les caractéristiques cinématiques du mouvement d'un point connaissant ses coordonnées.

1) Détermination de la trajectoire du point. Si dans les équations (16) et (17) le temps est considéré comme paramètre, les équations citées seront également des équations paramétriques de la trajectoire du point. Pour trouver l'équation de la trajectoire sous sa forme habituelle, c'est-à-dire en fonction des seules coordonnées du point M, il faut éliminer le temps t des équations du mouvement.

2) Détermination de la vitesse du point. Le vecteur vitesse du point est $v = \frac{dr}{dt}$. Des relations (15) on tire :

$$v_x = \frac{dr_x}{dt}, \quad v_y = \frac{dr_y}{dt}, \quad v_z = \frac{dr_z}{dt}.$$

Mais sur le dessin (voir fig. 144) on voit que les projections du rayon vecteur r du point sur les axes de coordonnées sont égales aux coordonnées de ce point, c'est-à-dire $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$.

C'est pourquoi finalement

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \tag{18}$$

c'est-à-dire que les *projections de la vitesse du point sur les axes de coordonnées sont égales aux dérivées premières par rapport au temps des coordonnées respectives du point.*

Les projections de la vitesse étant connues, son module et sa direction (c'est-à-dire les angles α, β, γ que le vecteur v forme avec les axes de coordonnées) sont donnés par les formules :

$$\left.\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}; \\ \cos\alpha = \frac{v_x}{v}, \quad \cos\beta &= \frac{v_y}{v}, \quad \cos\gamma = \frac{v_z}{v}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

[1] On peut aussi définir le mouvement du point en utilisant d'autres systèmes de coordonnées, par exemple des coordonnées polaires, sphériques, etc. Dans ce cas les formules donnant v et w se distingueront des formules (18)-(21) qui seront obtenues plus bas (voir § 71, par exemple).

3) Détermination de l'accélération du point. Le vecteur accélération du point est $\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$. Du théorème sur la projection de la dérivée et des formules (18) on obtient :

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad w_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad w_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}, \tag{20}$$

c'est-à-dire que les *projections de l'accélération du point sur les axes de coordonnées sont égales aux dérivées premières des projections des vitesses ou aux dérivées secondes des coordonnées du point par rapport au temps.* Le module et la direction de l'accélération seront donnés par les formules :

$$\left.\begin{aligned} w &= \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}\,; \\ \cos\alpha_1 = \frac{w_x}{w}, \quad \cos\beta_1 &= \frac{w_y}{w}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{w_z}{w}, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

où α_1, β_1, γ_1 sont les angles formés par le vecteur accélération avec les axes de coordonnées.

Ainsi, quand le mouvement du point est donné dans les coordonnées rectangulaires par les équations (16) ou (17), la vitesse du point est déterminée par les formules (18) et (19) et l'accélération, par les formules (20) et (21). Pour le cas du mouvement plan la projection sur l'axe z disparaîtra de toutes les formules.

Résolutions de problèmes. Comme dans le cas du mouvement rectiligne, il faut connaître les équations du mouvement du point pour déterminer ses caractéristiques cinématiques. Si les équations du mouvement ne sont pas directement données, il faut commencer à résoudre le problème par la recherche de ces équations.

Problème 54. Le mouvement d'un point est donné par les équations :

$$x = 8t - 4t^2, \quad y = 6t - 3t^2$$

(x, y en mètres, t en secondes).

Il faut déterminer la trajectoire, la vitesse et l'accélération du point.

Solution. Pour déterminer la trajectoire on élimine le temps t des équations. En multipliant les deux membres de la première équation par 3 et ceux de la deuxième par 4, et en soustrayant membre à membre la deuxième équation de la première, on obtient : $3x - 4y = 0$, ou

$$y = \frac{3}{4}x.$$

Il s'ensuit que la trajectoire est une ligne droite, inclinée sur l'axe Ox d'un angle α donné par $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ (fig. 145).

Déterminons la vitesse du point. D'après les formules (18) et (19) on obtient

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 8(1-t), \quad v_y = \frac{dy}{dt} = 6(1-t)\,;$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 10(1-t).$$

Déterminons maintenant l'accélération du point. Les formules (20) et (21) donnent :

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -8 \text{ m/s}^2, \quad w_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -6 \text{ m/s}^2, \quad w = 10 \text{ m/s}^2.$$

Il est évident que les vecteurs v et w sont dirigés suivant la trajectoire, c'est-à-dire suivant la droite AB. Comme w = const., le mouvement est uniformément varié. Les projections de l'accélération sur les axes de coordonnées étant toujours négatives, elle est donc constamment dirigée de B vers A. Pour $0 < t < 1$ les projections de la vitesse sont positives, il en résulte que durant cet intervalle de temps la vitesse du point est dirigée de O vers B ; à l'instant $t = 0$

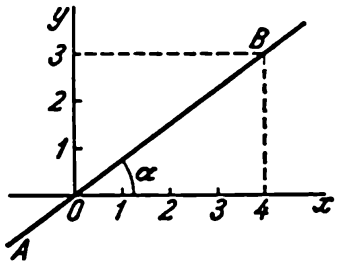


Fig. 145

on a $v = 10$ m/s, à l'instant $t = 1$ s, $v = 0$. Aux instants suivants ($t > 1$ s) les deux projections de la vitesse sont négatives et, par suite, la vitesse est dirigée de B vers A, c'est-à-dire de la même façon que l'accélération.

Notons, enfin, que si $t = 0$, $x = 0$ et $y = 0$; si $t = 1$ s, $x = 4$, $y = 3$ (point B) ; si $t = 2$ s, $x = 0$, $y = 0$; si $t > 2$ s, les valeurs de x et de y s'accroissent en module tout en restant négatives.

Ainsi, les équations du mouvement, données dans le problème, nous retracent toutes les caractéristiques du mouvement du point. Le mouvement débute du point O avec la vitesse initiale $v_0 = 10$ m/s et s'effectue le long de la droite AB, inclinée sur l'axe Ox sous un angle α pour lequel $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$. Sur le segment OB le point est en mouvement uniformément retardé et après une seconde arrive au point B (4, 3), où sa vitesse devient nulle. De là il commence un mouvement uniformément accéléré en sens inverse. A l'instant $t = 2$ s, le point se retrouve à l'origine des coordonnées et continue ensuite son mouvement le long de OA. L'accélération du mouvement est toujours égale à 10 m/s².

Problème 55. Le mouvement du point est donné par les équations :

$$x = a \sin \omega t, \quad y = a \cos \omega t, \quad z = ut,$$

où a, ω et u sont des grandeurs constantes. Déterminer la trajectoire, la vitesse et l'accélération du point.

Solution. En élevant les deux premières équations au carré et en les additionnant, on obtient (puisque $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$) :

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Par conséquent, la trajectoire du point se trouve sur un cylindre circulaire de rayon de base a, dont l'axe est dirigé suivant l'axe Oz (fig. 146). Tirons t de la dernière équation et substituons sa valeur dans la première ; on trouve que :

$$x = a \sin \left(\frac{\omega}{u} z \right).$$

La trajectoire du point sera donc représentée par la ligne d'intersection de la surface sinusoïdale, dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oy (gaufre sinusoïdal), avec la surface cylindrique de rayon a. Cette courbe est appelée *hélice*. Les équations du mouvement montrent que le point parcourt une spire en un temps t_1, déterminé par l'égalité $\omega t_1 = 2\pi$. En même temps, le point se déplace le long de l'axe z d'une distance $h = ut_1 = \frac{2\pi u}{\omega}$, appelée *pas* de l'hélice.

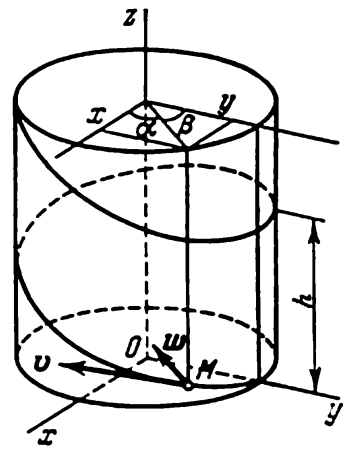


Fig. 146

Déterminons la vitesse et l'accélération du point. En dérivant les équations du mouvement par rapport au temps, on obtient

$$v_x = a\omega \cos \omega t, \quad v_y = -a\omega \sin \omega t, \quad v_z = u,$$

d'où

$$v = \sqrt{a^2\omega^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) + u^2} = \sqrt{a^2\omega^2 + u^2}.$$

Les grandeurs qui se trouvent sous le signe du radical sont constantes. Par conséquent, le mobile a une vitesse à module constant et dirigée suivant la tangente à la trajectoire. Maintenant, d'après les formules (20), on calcule les projections de l'accélération:

$$w_x = -a\omega^2 \sin \omega t, \quad w_y = -a\omega^2 \cos \omega t, \quad w_z = 0,$$

d'où

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = a\omega^2.$$

Ainsi, le mouvement s'effectue avec une accélération dont le module est constant. Pour déterminer le sens et le support de l'accélération on a les formules:

$$\cos \alpha_1 = \frac{w_x}{w} = -\sin \omega t = -\frac{x}{a},$$

$$\cos \beta_1 = \frac{w_y}{w} = -\cos \omega t = -\frac{y}{a}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{w_z}{w} = 0.$$

Mais il est évident que

$$\frac{x}{a} = \cos \alpha, \quad \frac{y}{a} = \cos \beta,$$

où α et β sont les angles formés par les axes Ox et Oy avec le rayon a, mené de l'axe du cylindre au point en mouvement. Puisque les cosinus des angles α_1 et β_1 ne se distinguent des cosinus des angles α et β que par le signe, on en conclut que l'accélération du point est constamment portée par le rayon du cylindre et dirigée vers son axe.

Remarquons toutefois que bien que la vitesse du mobile ait un module constant, son accélération n'est pas nulle car sa direction change.

Problème 56. Etant donné un ensemble bielle-manivelle (fig. 147), déterminer la trajectoire, la vitesse et l'accélération du milieu M de la bielle, si $OA = AB = 2a$ et si l'angle φ s'accroît proportionnellement au temps ($\varphi = \omega t$) pendant la rotation de la manivelle.

Solution. Déterminons d'abord les équations du mouvement du point M. En menant les axes et en désignant les coordonnées du point M par x et y on a:

$$x = 2a \cos \varphi + a \cos \varphi, \qquad y = a \sin \varphi.$$

En remplaçant φ par sa valeur, on obtient les équations du mouvement du point M:

$$x = 3a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t.$$

Pour déterminer la trajectoire du point M, mettons les équations du mouvement sous la forme

$$\frac{x}{3a}=\cos\omega t, \quad \frac{y}{a}=\sin\omega t.$$

En élevant ces équations au carré et en les additionnant, on a:

$$\frac{x^2}{9a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

La trajectoire du point M est une ellipse de demi-axes $3a$ et a.

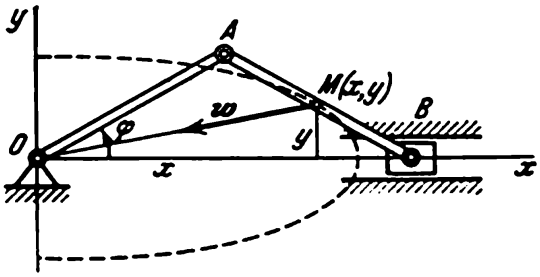


Fig. 147

Appliquant maintenant les formules (18) et (19) on trouve la vitesse du point M:

$$v_x = -3a\omega \sin \omega t, \qquad v_y = a\omega \cos \omega t;$$

$$v = a\omega \sqrt{9 \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t}.$$

La vitesse varie donc avec le temps dans les limites de $v_{\min} = a\omega$ à $v_{\max} = 3a\omega$.

Ensuite, on détermine à l'aide des formules (20) les projections de l'accélération du point B:

$$w_x = -3a\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x; \quad w_y = -a\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 y,$$

d'où on déduit

$$w = \sqrt{\omega^4 (x^2+y^2)} = \omega^2 r,$$

où r est la longueur du rayon vecteur, joignant le centre O au point M. Par conséquent, la grandeur de l'accélération du point varie proportionnellement à sa distance au centre de l'ellipse.

Pour déterminer la direction de w, on se sert des formules (21):

$$\cos\alpha_1 = \frac{w_x}{w} = -\frac{x}{r}, \quad \cos\beta_1 = \frac{w_y}{w} = -\frac{y}{r}.$$

D'où, de même que dans le problème 55, on trouve que l'accélération du point M est toujours portée par MO et dirigée vers le centre de l'ellipse.

§ 68. Mode naturel de description du mouvement. Détermination de la vitesse du point. Ce mode de définition du mouvement est commode dans les cas où la trajectoire du point mobile est connue d'avance. Soit un point M en mouvement par rapport au système de référence $O_1x_1y_1z_1$ le long d'une trajectoire AB (fig. 148). Choisissons sur cette trajectoire un point fixe O, pris comme origine; puis, en prenant cette trajectoire comme axe de coordon-

nées curvilignes, on choisit sur elle les sens positif et négatif, comme on le ferait sur un axe de coordonnées habituel. Dans ce cas la position du point M sur la trajectoire sera déterminée d'une façon univoque par la coordonnée curviligne s, égale à la distance du point O au point M, mesurée le long de l'arc de trajectoire et prise avec le signe correspondant. Durant le mouvement du point M, la distance s changera par rapport au temps.

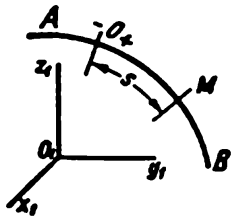


Fig. 148

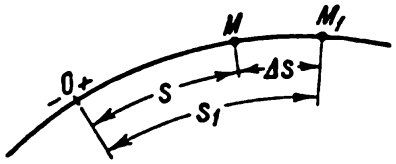


Fig. 149

Pour connaître la position du point M sur la trajectoire à tout instant, il faut connaître la relation :

$$s = f(t). \tag{22}$$

L'équation (22) exprime la *loi du mouvement du point M* sur la trajectoire.

Ainsi, pour définir le mouvement du point par son équation sur la trajectoire on doit donner : 1) la *trajectoire du point*; 2) l'*origine sur la trajectoire* avec indication des *sens positif* et *négatif*; 3) la *loi du mouvement du point* sur la trajectoire sous la forme $s = f(t)$, où la distance $s = OM$ est la coordonnée curviligne du point.

Pour plus de clarté la fonction $s(t)$ peut être représentée par un diagramme comme dans le cas du mouvement rectiligne (§ 61). Ce faisant, au lieu de x on portera en ordonnées la distance s.

Examinons comment on peut déterminer la vitesse dans ce mode de description du mouvement. Si pendant l'intervalle de temps $\Delta t = t_1 - t$ le point passe de M en M_1, en parcourant le chemin $\Delta s = s_1 - s$ (fig. 149), le long de l'arc de la trajectoire, la valeur numérique de sa vitesse moyenne sera égale à [1]

$$v_{\text{moy}} = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{23}$$

[1] Comme on le voit, les valeurs de v_{moy} découlant des formules (23) et (12') ne sont pas les mêmes (la première formule détermine v_{moy} pour le cas du mobile se déplaçant sur l'arc, tandis que la deuxième prend pour trajectoire la plus courte distance de M à M_1). Cependant, à la limite (quand $\Delta t \to 0$) les deux formules donnent la même valeur pour v car le quotient de l'arc Δs par la corde MM_1 est égal à la limite à l'unité. Pour la notion de « valeur numérique » de la vitesse voir la note en bas de la page 149.

A la limite on trouve la valeur numérique de la vitesse instantanée du point :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{ou} \quad v = \frac{ds}{dt}. \tag{24}$$

Ainsi, la *valeur numérique de la vitesse instantanée du point est égale à la dérivée première de la coordonnée curviligne s du point par rapport au temps.*

Le vecteur vitesse est dirigé suivant la tangente à la trajectoire, celle-ci étant connue d'avance. Dans ce cas, comme pour le mouvement rectiligne, si $v > 0$, le vecteur vitesse $\boldsymbol{v}$ est dirigé dans le sens positif défini sur la courbe et si $v < 0$, dans le sens négatif. Par conséquent, la valeur algébrique de la vitesse détermine en même temps le module du vecteur et son sens. L'égalité (24) montre aussi qu'on peut trouver la valeur de v comme le rapport du déplacement élémentaire ds du point le long de l'arc de la trajectoire à l'intervalle de temps dt correspondant.

§ 69. Accélérations tangentielle et normale du point. Déterminons maintenant l'accélération du point. Comme le vecteur accélération $\boldsymbol{w}$ du point se trouve toujours dans le plan osculateur (voir

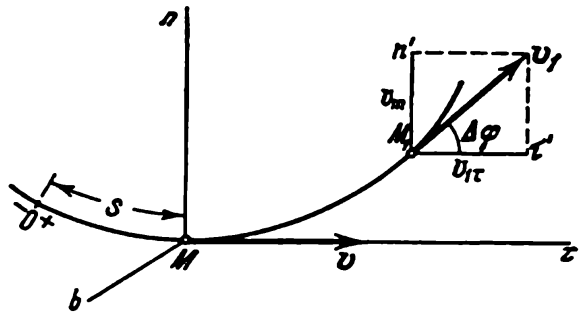


Fig. 150

§ 65), on le définira en cherchant ses projections sur deux axes quelconques se trouvant dans ce plan. Dirigeons un des axes suivant la tangente $M\tau$ à la trajectoire, dans le sens positif de l'axe des s (fig. 150), et l'autre, suivant la normale Mn, vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire. La normale Mn qui repose dans le plan osculateur (dans le plan de la courbe même si cette courbe est plane) est appelée *normale principale.*

Les axes tracés (la tangente et la normale principale) ont leur origine au point mobile M et se déplacent avec lui dans l'espace.

Supposons qu'à l'instant t le point soit en M et ait une vitesse $\boldsymbol{v}$, à l'instant $t_1 = t + \Delta t$ il arrive en M_1 avec une vitesse $\boldsymbol{v}_1$.

Dans ce cas

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r_1 - r}{\Delta t}.$$

Passons, dans cette égalité, des vecteurs à leurs projections sur les axes $M\tau$ et Mn (voir fig. 150). Alors, en s'aidant du théorème sur la projection de la somme (ou de la différence) de vecteurs sur un axe, on obtient :

$$w_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_{1\tau} - v_\tau}{\Delta t}, \quad w_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_{1n} - v_n}{\Delta t}.$$

Menons par le point M_1 la droite ab parallèle à $M\tau$ et désignons l'angle entre la direction du vecteur v_1 et la tangente $M\tau$ en M par $\Delta\varphi$. Cet angle entre les tangentes à la courbe aux points M et M_1 est appelé *angle de contingence*.

Il faut rappeler que la limite du rapport de l'angle de contingence $\Delta\varphi$ à l'arc $\widehat{MM_1} = \Delta s$ détermine la courbure k de la courbe au point M. Quant à la courbure, elle est égale à l'inverse du rayon de courbure ρ au point M. Ainsi,

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = k = \frac{1}{\rho}.$$

Sur le dessin (fig. 150) on voit que les projections des vecteurs v et v_1 sur les axes $M\tau$ et Mn sont égales à :

$$v_\tau = v, \quad v_n = 0;$$

$$v_{1\tau} = v_1 \cos\Delta\varphi, \quad v_{1n} = v_1 \sin\Delta\varphi,$$

où v et v_1 sont les valeurs numériques de la vitesse du point aux instants t et t_1. Par conséquent :

$$w_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 \cos\Delta\varphi - v}{\Delta t}, \quad w_n = \lim_{\Delta t \to 0} \left(v_1 \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta t}\right).$$

Notons que pour $\Delta t \to 0$ le point M_1 tend vers M et en même temps $\Delta\varphi \to 0$, $\Delta s \to 0$, $v_1 \to v$.

Alors, tenant compte de ce que $\lim\limits_{\Delta\varphi \to 0} (\cos\Delta\varphi) = 1$, on obtient pour w_τ l'expression

$$w_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1 - v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Ensuite, en multipliant par $\Delta\varphi\,\Delta s$ le numérateur et le dénominateur de la fraction de l'expression donnant w_n, on trouve que :

$$w_n = \lim_{\Delta t \to 0} \left(v_1 \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t}\right) = \frac{v^2}{\rho},$$

car les limites, pour $\Delta t \to 0$, des facteurs entre parenthèses sont égales à :

$$\lim v_1 = v, \ \lim \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 1, \ \lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}, \ \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v.$$

On obtient finalement :

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}; \ w_n = \frac{v^2}{\rho}. \tag{25}$$

Ainsi, on a démontré que la *projection de l'accélération du point sur la tangente est égale à la dérivée première de la valeur numérique de la vitesse ou à la dérivée seconde de la coordonnée curviligne s par*

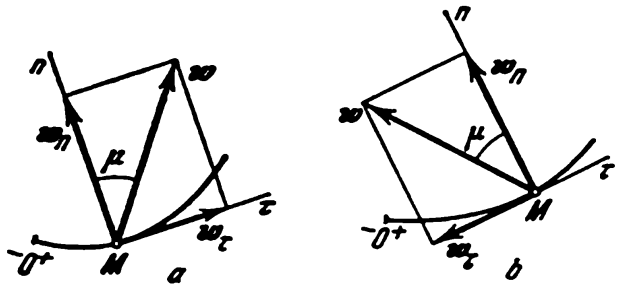


Fig. 151

rapport au temps, tandis que la projection de l accélération sur la normale principale est égale au carré de la vitesse, divisé par le rayon de courbure de la trajectoire au point donné de la courbe. Ce résultat est l'expression d'un des théorèmes très importants de la cinématique du point.

Portons les vecteurs $\boldsymbol{w}_\tau$ et $\boldsymbol{w}_n$, égaux numériquement à w_τ et à w_n, suivant la tangente $M\tau$ et la normale principale Mn (fig. 151). Ces vecteurs représentent les composantes tangentielle et normale de l'accélération du point. A remarquer que la composante $\boldsymbol{w}_n$ est toujours dirigée du côté de la concavité de la courbe (valeur w_n est toujours positive) et la composante $\boldsymbol{w}_\tau$ peut être dirigée dans le sens positif comme dans le sens négatif de l'axe $M\tau$, suivant le signe de la projection de w_τ (voir fig. 151, *a* et *b*).

Le vecteur accélération $\boldsymbol{w}$ du point est représenté par la diagonale du parallélogramme construit sur les composantes $\boldsymbol{w}_\tau$ et $\boldsymbol{w}_n$.

Comme ces composantes sont rectangulaires on a en module :

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \tag{26}$$ [1]

[1] La formule (26) montre que dans le cas général $w \neq \frac{dv}{dt}$, ce qui a été indiqué à la fin du § 66.

L'angle μ entre le vecteur $\boldsymbol{w}$ et la normale Mn est donné par la formule

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{|w_\tau|}{w_n}. \tag{27}$$

On voit donc que, quand le mouvement du point est défini par l'équation sur sa trajectoire, on peut, en connaissant la trajectoire (et donc son rayon de courbure ρ en tout point) et la loi de mouvement (22), déterminer le module et la direction des vecteurs vitesse et accélération du point à tout instant à partir des formules (24) et (25)—(27).

§ 70. Cas particuliers du mouvement du point. En utilisant les résultats obtenus, examinons quelques cas particuliers du mouvement du point.

1) Mouvement rectiligne. Si la trajectoire du point est une droite, $\rho = \infty$. Alors, $w_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ et l'accélération du point n'est autre chose que l'accélération tangentielle |

$$w = w_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Comme dans ce cas la vitesse change seulement de grandeur, il en résulte que l'*accélération tangentielle caractérise la variation de la vitesse en valeur numérique.*

2) Mouvement curviligne uniforme. Un mouvement curviligne est uniforme si la valeur numérique de la vitesse reste toujours constante: $v = \text{const}$. Alors, $w_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$ et l'accélération du point devient égale à la seule accélération normale:

$$w = w_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Dans ces conditions, le vecteur accélération $\boldsymbol{w}$ est constamment dirigé suivant la normale à la trajectoire du point.

Comme dans ce cas l'accélération provient seulement de la variation de la direction de la vitesse, il s'ensuit que l'*accélération normale caractérise la variation de la vitesse en direction.*

Trouvons la loi du mouvement curviligne uniforme. Il résulte de la formule (24) que $\frac{ds}{dt} = v$ ou $ds = v\,dt$.

Admettons qu'à l'instant initial ($t = 0$) le point soit à la distance s_0 de l'origine. Dans ce cas, prenant les intégrales définies des deux membres de l'égalité dans les limites adéquates, on obtient:

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t v\,dt \quad \text{ou} \quad s - s_0 = vt,$$

car v = const. En définitive, la loi du mouvement uniforme curviligne du point se met sous la forme :

$$s = s_0 + vt. \tag{28}$$

3) Mouvement rectiligne uniforme. Dans ce cas $w_n = w_\tau = 0$ et par suite, $w = 0$. Il faut remarquer que le *seul mouvement où l'accélération du point est constamment nulle est le mouvement rectiligne uniforme.*

4) Mouvement curviligne uniformément varié. Par mouvement uniformément varié on entend un mouvement curviligne où l'*accélération tangentielle* a une valeur constante : w_τ = const. Cherchons la loi de ce mouvement, posant qu'à $t = 0$ on a $s = s_0$ et $v = v_0$, où v_0 est la vitesse initiale du point. Selon la formule (25) $\frac{dv}{dt} = w_\tau$ ou $dv = w_\tau\, dt$.

On prend les intégrales définies des deux membres de la dernière égalité dans les limites adéquates et, tenant compte de w_τ = const., on obtient :

$$v = v_0 + w_\tau t. \tag{29}$$

Ecrivons la formule (29) sous la forme :

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + w_\tau t \quad \text{ou} \quad ds = v_0\, dt + w_\tau t\, dt.$$

En intégrant une deuxième fois, on trouve la loi du mouvement curviligne uniformément varié du point sous la forme

$$s = s_0 + v_0 t + w_\tau \frac{t^2}{2}. \tag{30}$$

La vitesse de ce mouvement est déterminée par la formule (29).

Les formules (29) et (30) se distinguent des formules correspondantes (9) et (8) pour le mouvement rectiligne par le fait que l'accélération w est remplacée par l'accélération tangentielle w_τ et la coordonnée curviligne s y figure à la place de la coordonnée rectiligne x.

Si lors du mouvement curviligne du point le module de la vitesse s'accroît, ce mouvement est appelé *accéléré* et si le module décroît, il est *retardé*.

Comme le changement du module de la vitesse est caractérisé par l'accélération tangentielle, le mouvement est accéléré quand les grandeurs v et w_τ possèdent le même signe (l'angle entre les vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ est aigu, fig. 152, *a*), et il est retardé quand les signes sont différents (l'angle entre $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ est obtus, fig. 152, *b*).

Résolution des problèmes. Comme on l'a déjà dit, pour résoudre les problèmes de cinématique, il faut connaître la loi du mouvement du point. Si le mouvement est défini par l'équation sur la trajectoire (on donne la trajectoire et la loi du mouve-

ment sur cette trajectoire), toutes les caractéristiques du mouvement seront déterminées par les formules des §§ 68-70. Dans le cas où le mouvement d'un point est donné par ses coordonnées, toutes les caractéristiques du mouvement (y compris les accélérations tangen-

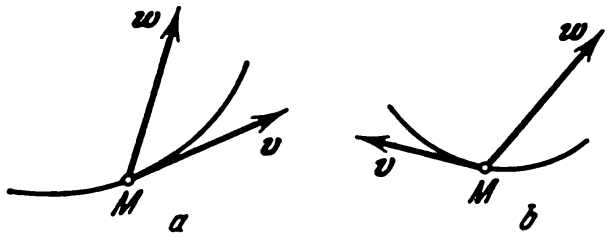


Fig. 152

tielle et normale ainsi que le rayon de courbure de la trajectoire) peuvent être déterminées de la façon indiquée au problème 59.

Problème 57. Si l'angle d'écart est petit, la masse du pendule (fig. 153) décrit une circonférence de rayon l selon la loi $s = a \sin kt$ (l'origine des coordonnées est en O ; a et k sont des constantes). Il faut trouver la vitesse, les accélérations tangentielle et normale de la masse et les positions du pendule pour lesquelles ces grandeurs s'annulent.

Solution. En utilisant les formules adéquates on trouve que :

$$v = \frac{ds}{dt} = ak \cos kt\ ;\quad w_\tau = \frac{dv}{dt} = -ak^2 \sin kt\ ;$$

$$w_n = \frac{v^2}{l} = \frac{a^2k^2}{l} \cos^2 kt.$$

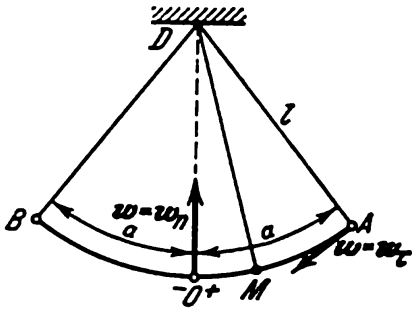


Fig. 153

La loi du mouvement montre que la masse effectue des oscillations harmoniques d'amplitude d'arc a. Aux positions limites A et B, $\sin kt = \pm 1$ et, par conséquent, $\cos kt = 0$. C'est pourquoi aux points A et B la vitesse et l'accélération normale deviennent nulles, tandis que l'accélération tangentielle y prend la plus grande valeur : $w_{\tau\,\max} = ak^2$. Au contraire, quand la masse arrive à l'origine O, $s = 0$ et, par suite, $\sin kt = 0$ et $\cos kt = 1$. Dans cette position, $w_\tau = 0$ et v et w_n ont les valeurs maximums :

$$v_{\max} = ak, \quad w_{n\,\max} = \frac{a^2k^2}{l}.$$

L'exemple ci-dessus montre que, dans le mouvement curviligne varié, w_τ et w_n peuvent s'annuler en certains points de la trajectoire. Plus précisément, $w_\tau = 0$ aux points où

$$\frac{dv}{dt} = 0,$$

c'est-à-dire là où v possède un maximum ou un minimum, et $w_n = 0$ aux points où $v = 0$ (comme dans notre cas) ou bien où $\rho = \infty$ (points d'inflexion de la trajectoire).

Problème 58. Un train commence à parcourir en un mouvement uniformément accéléré une courbe de rayon $R = 800$ m et, après avoir franchi une distance $s_1 = 600$ m, acquiert la vitesse $v_1 = 36$ km/h. Trouver la vitesse et l'accélération du train à mi-chemin du trajet parcouru.

Solution. Le train étant animé d'un mouvement uniformément accéléré et $v_0 = 0$, la loi du mouvement (si on considère que $s_0 = 0$) est

$$s = \frac{1}{2} w_\tau t^2$$

et la vitesse

$$v = w_\tau t.$$

Après avoir éliminé le temps t de ces équations, on obtient:

$$v^2 = 2w_\tau s.$$

D'après l'hypothèse quand $s = s_1$, $v = v_1$; en conséquence:

$$w_\tau = \frac{v_1^2}{2s_1}.$$

A mi-chemin, c'est-à-dire, pour $s_2 = \frac{s_1}{2}$, la vitesse v_2 est égale à:

$$v_2 = \sqrt{2w_\tau s_2} = \sqrt{w_\tau s_1} = \frac{v_1}{\sqrt{2}}.$$

L'accélération normale en ce point de la trajectoire est égale à:

$$w_{n2} = \frac{v_2^2}{R} = \frac{v_1^2}{2R}.$$

Connaissant w_τ et w_{n2}, on détermine l'accélération totale du train à mi-chemin:

$$w_2 = \sqrt{w_\tau^2 + w_{n2}^2} = \frac{v_1^2}{2}\sqrt{\frac{1}{s_1^2} + \frac{1}{R^2}}.$$

En introduisant les valeurs numériques on trouve que:

$$v_2 \approx 7{,}1 \text{ m/s}; \quad w_2 = \frac{5}{48} \approx 0{,}1 \text{ m/s}^2.$$

Problème 59. Un point, lancé avec une vitesse initiale horizontale, se déplace selon la loi déterminée par les équations:

$$x = v_0 t; \quad y = \frac{1}{2} g t^2,$$

où v_0 et g sont des constantes.

Il faut trouver la trajectoire, la vitesse et l'accélération du point, de même que ses accélérations tangentielle et normale et le rayon de courbure de sa trajectoire pour toutes les positions, en exprimant ces grandeurs au moyen de la vitesse du point en cette position.

Solution. En substituant, dans la deuxième équation, la valeur de t tirée de la première équation, on obtient

$$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

La trajectoire du point est une parabole (fig. 154). En dérivant les équations du mouvement par rapport au temps, on trouve que :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = gt,$$

d'où

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}. \tag{a}$$

Ainsi, à l'instant initial ($t = 0$) la vitesse du point $v = v_0$; par la suite, la valeur de la vitesse s'accroît sans cesse avec le temps.

Trouvons l'accélération du point. Appliquant les formules adéquates, on a :

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad w_y = \frac{d^2y}{dt^2} = g.$$

Par conséquent, l'accélération du point

$$w = g.$$

Dans notre cas, le point se déplace avec une accélération constante en module et en direction, celle-ci étant parallèle à l'axe Oy.

Remarquons qu'ici, bien que w = const., le mouvement uniformément varié est non pas w = const., mais w_τ = const. Or, comme on va le voir, w_τ n'est pas constante.

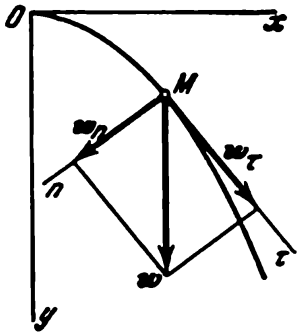


Fig. 154

Connaissant v en fonction de t [formule (a)], on trouve maintenant w_τ :

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} = \frac{g^2t}{v}.$$

Mais l'égalité (a) donne $v^2 = v_0^2 + g^2t^2$, d'où :

$$t = \frac{1}{g}\sqrt{v^2 - v_0^2}.$$

Substituant cette valeur de t dans l'équation de w_τ, on exprime w_τ en fonction de la vitesse v :

$$w_\tau = g\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v^2}}.$$

Il s'ensuit qu'à l'instant initial, quand $v = v_0$, $w_\tau = 0$. Ensuite, w_τ croît avec v et pour $v \to \infty$ $w_\tau \to g$; par conséquent, à la limite, la valeur de l'accélération tangentielle tend vers l'accélération totale g.

Pour trouver w_n, considérons l'équation

$$w^2 = w_\tau^2 + w_n^2.$$

Elle nous donne :

$$w_n^2 = w^2 - w_\tau^2 = g^2 - g^2\left(1 - \frac{v_0^2}{v^2}\right) = g^2\frac{v_0^2}{v^2};$$

et par suite :

$$w_n = \frac{v_0 g}{v}.$$

Ainsi, à l'instant du départ ($v = v_0$), $w_n = g$, mais ensuite w_n décroît quand v augmente et tend à la limite vers zéro.

Pour déterminer le rayon de courbure de la trajectoire on utilise la formule :

$$w_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

On a donc :

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{v^3}{v_0 g}.$$

A l'instant initial le rayon de courbure a une valeur minimum :

$$\rho_{min} = \frac{v_0^2}{g};$$

ensuite, avec l'accroissement de v, le rayon de courbure croît et, par conséquent, la courbure de la trajectoire décroît. Pour $v \to \infty$, $\rho \to \infty$ et la courbure tend vers zéro.

§ 71. Vitesse en coordonnées polaires. Quand le point se déplace toujours dans un même plan, on peut déterminer sa position par ses coordonnées polaires r et φ (fig. 155). Au cours du mouvement du

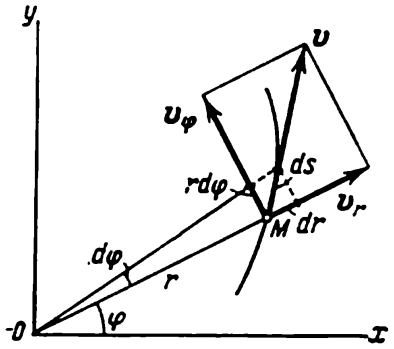


Fig. 155

point ces coordonnées changent avec le temps. La loi du mouvement du point en coordonnées polaires sera donc définie par les équations :

$$r = f_1(t), \qquad \varphi = f_2(t). \tag{31}$$

La vitesse du point est numériquement égale à $\frac{ds}{dt}$, c'est-à-dire au rapport du déplacement élémentaire ds à l'intervalle de temps dt. Dans ce cas, le déplacement ds est la somme géométrique du déplacement radial, égal numériquement à dr, et du déplacement transversal, perpendiculaire au rayon, égal numériquement à $r\,d\varphi$. Il s'ensuit que la vitesse v sera aussi une somme géométrique de la vitesse radiale v_r et de la vitesse transversale v_φ égales numériquement à :

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt}. \tag{32}$$

Vu que v_r et v_φ sont rectangulaires, on a en module :

$$v=\sqrt{v_r^2+v_\varphi^2}=\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}. \qquad (33)$$

Les formules (32) et (33) déterminent la vitesse du point en coordonnées polaires pour un mouvement plan.

§ 72. Etude graphique du mouvement du point. Le procédé graphique de résolution des problèmes de cinématique du point est utilisé dans les cas où la fonction $s = f(t)$ [ou $x = f(t)$ pour le mouvement rectiligne] a une expression analytique très complexe ou quand la loi du mouvement étudié est directement donnée par des graphiques obtenus empiriquement à l'aide d'appareils enregistreurs.

Si on connaît le graphique du mouvement donnant la distance s en fonction du temps t (fig. 156), on peut construire le graphique de la vitesse par le procédé de dérivation graphique. Comme on le voit sur le dessin, la vitesse moyenne du point durant l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$ est déterminée par la tangente de l'angle que fait la sécante K_1K_2 avec l'axe des abscisses, car on a (au coefficient d'échelle près) :

$$v_{\text{moy}}=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\operatorname{tg}\alpha^*.$$

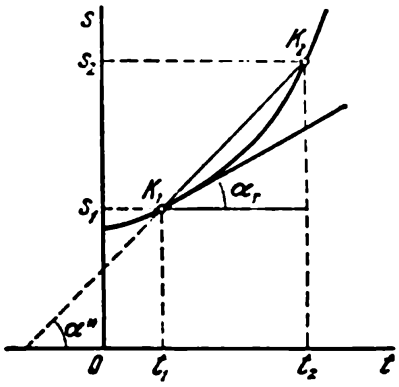


Fig. 156

La vitesse du point à l'instant donné t_1 est déterminée par l'angle que fait la tangente à la courbe au point K_1 avec l'axe des abscisses, car on a avec la même restriction que ci-dessus :

$$v_1=\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=t_1}=\operatorname{tg}\alpha_1. \qquad (34)$$

Ainsi, après avoir tracé les tangentes à la courbe $s = f(r)$ aux points K_1, K_2, . . ., et calculé les angles qu'elles font avec l'axe des temps, nous trouverons les valeurs de la vitesse du point aux instants t_1, t_2, . . . Ces valeurs nous permettent de construire le graphique des vitesses. Il est possible de construire de même, sur la base du graphique des vitesses, le graphique des accélérations tangentielles $w_\tau = \frac{dv}{dt}$. La marche à suivre (compte tenu des échelles de représentation pour t et s) est considérée au problème 60.

Pour construire les graphiques des accélérations normale et totale (cas du mouvement curviligne), on détermine les valeurs de w_n et de w aux différents instants par calcul numérique d'après les formules adéquates ; on se sert des valeurs de v et w_τ données par les graphiques des vitesses et des accélérations tangentielles déjà construits, tandis que ρ est déterminé d'après la trajectoire du mouvement.

Si on connaît le graphique des vitesses pour le mouvement donné, il est facile de construire l'abaque du mouvement par le procédé d'intégration graphique. Comme $ds = v\,dt$, il en résulte, prenant $s_0 = 0$, que :

$$s=\int_0^t v\,dt.$$

L'intégrale est calculée comme une surface, prise avec le signe plus pour les valeurs positives de v et avec le signe moins pour les valeurs négatives. Le calcul des surfaces devient particulièrement commode si l'on construit le graphique sur le papier millimétré. Dans le cas de la figure 157, la distance s_1 à l'instant t_1 est égale à la différence des surfaces hachurées supérieure et inférieure multipliée par le coefficient de l'échelle [1].

Après avoir ainsi trouvé les valeurs de s aux différents instants t, on peut construire l'abaque du mouvement. De même, d'après le graphique des accélérations tangentielles on construit le graphique des vitesses.

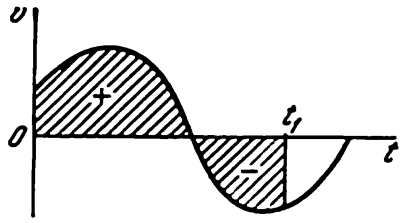


Fig. 157

Problème 60. On demande d'étudier par voie graphique le mouvement du piston dans le mécanisme à manivelle (fig. 158), dans le cas où la longueur de la manivelle $O'A = 0{,}2$ m et la longueur de la bielle $AB = 0{,}4$ m. La manivelle tourne uniformément en faisant un tour complet en un temps $T = 1{,}6$ s.

Solution. 1) Construction de l'abaque du mouvement du piston.

La construction consiste en les opérations suivantes:

a) On choisit les échelles pour la distance x et le temps t. Quand on fait la construction sur papier millimétré, l'erreur de mesure peut atteindre $\pm 0{,}25 \div \div 0{,}5$ mm (suivant la qualité du papier et le soigné de l'épure). Il faut en tenir compte lors du choix des échelles. Dans notre cas, prenons comme échelle pour x: 1 cm pour 0,1 m; pour t: 1 cm pour 0,2 s.

b) Représentons le schéma du mécanisme à l'échelle choisie pour x (fig. 158, *a*): $O'A_0 = 2$ cm, $A_0B_0 = 4$ cm. Menons l'axe de coordonnées $O'x$ le long de la trajectoire du piston. Divisons la demi-circonférence sur laquelle se déplace le point A en 8 parties égales (avec l'augmentation du nombre de divisions la précision de l'épure croît). Le point A parcourt chaque division en 0,1 s. A partir des points de division, avec une ouverture de compas $AB = 4$ cm, marquons des repères sur l'axe $O'x$. Ces repères donnent les valeurs de x aux instants t égaux respectivement à 0; 0,1 s; 0,2 s, etc.

c) D'après ces valeurs de x et de t, construisons l'abaque du mouvement du piston pour un tour de manivelle, en reliant les points du graphique par une courbe continue (fig. 158, *b*); dans ce cas, la branche droite de la courbe est symétrique de la branche gauche.

2) Construction du graphique des vitesses. Les opérations à effectuer sont:

a) En conservant l'échelle des temps t de la figure 158, *b*, on trace les axes v, t (fig. 158, *c*). On porte sur l'axe t le segment O_1K_0, représentant une seconde à l'échelle choisie (dans notre cas, la longueur $O_1K_0 = 5$ cm).

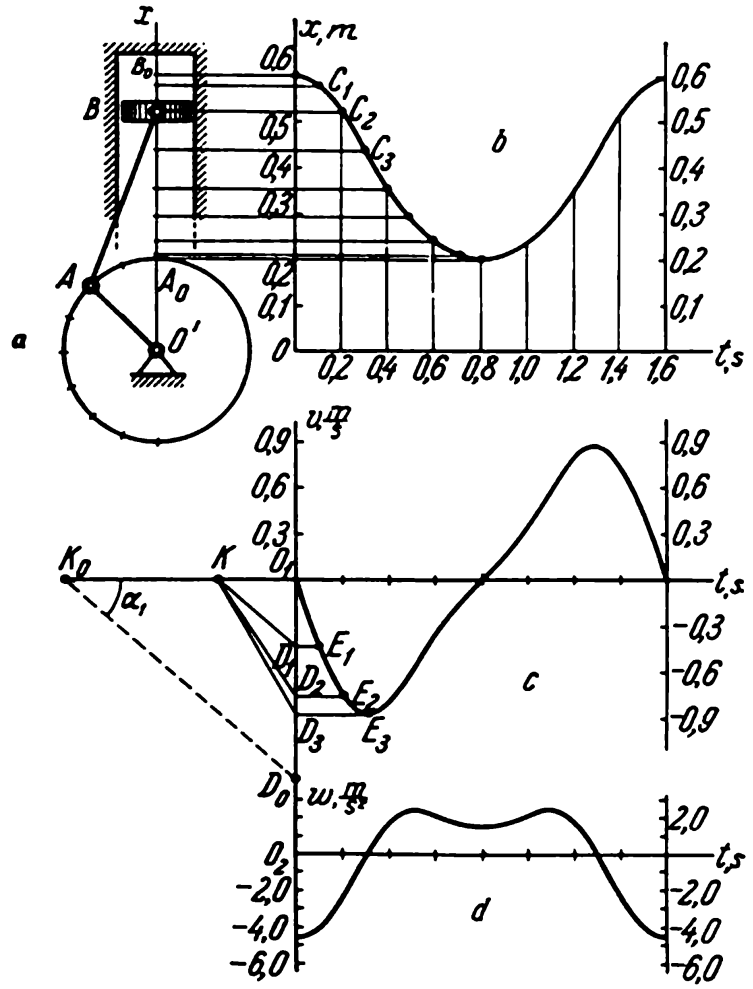
b) On détermine la direction de la tangente à la courbe $x = f(t)$ au point C_1 correspondant à l'instant $t_1 = 0{,}1$ s [2].

---

[1] La somme de ces surfaces déterminera le chemin parcouru par le point durant le temps t_1 si $s_0 = 0$.

[2] Pour tracer la tangente au point donné de la courbe il est bon d'utiliser une règle à surface latérale réfléchissante, perpendiculaire au plan de la règle (on peut préparer cette règle en collant une bande d'étain battu lisse sur la

Par le point K_0 on mène la droite K_0D_0, parallèle à cette tangente (ligne pointillée). Alors, le segment O_1D_0 représentera la vitesse à l'instant $t_1 = 0{,}1$ s,



F i g. 158

car $O_1K_0 = 1$ s, tandis que d'après la formule (34)

$$(v)_{t=0,1s} = \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{O_1D_0}{O_1K_0} = O_1D_0.$$

Si la distance x est exprimée à l'échelle de 1 cm pour 0,1 m, la vitesse v sera exprimée à l'échelle de 1 cm pour 0,1 m/s. Si l'échelle obtenue est incommode (trop grande ou trop petite), on peut la changer comme il sera montré plus bas.

surface latérale d'une règle à calcul classique). Après avoir appuyé la règle au point donné de la courbe (en coupant la courbe) on la fait tourner jusqu'à l'apparition du prolongement de la courbe dans le miroir sans discontinuité visible. Dans cette position la direction de la règle est celle de la normale à la courbe au point donné, tandis que la perpendiculaire à la règle sera celle de la tangente. Quand au lieu du miroir on utilise une bande d'étain battu il est bon de repasser au préalable le tracé de la courbe à l'encre de Chine.

c) Dans notre cas, l'échelle pour v est trop grande. Réduisons-la au tiers. Pour cela, du point O_1 portons le segment $O_1K = \frac{1}{3} O_1K_0$. Menons par le point K la droite KD_1, parallèle à la tangente au point C_1 (ou à la droite K_0D_0). Alors, le segment O_1D_1 déterminera la vitesse à l'instant $t_1 = 0{,}1$ s à l'échelle 1 cm pour 0,3 m/s (échelle de v).

Après avoir mené la droite D_1E_1, parallèle à l'axe O_1t, on obtient le point E_1 du graphique des vitesses.

D'une manière analogue, en menant les droites KD_2, KD_3, ... parallèles aux directions des tangentes aux points C_2, C_3, ..., on obtient les points E_2,

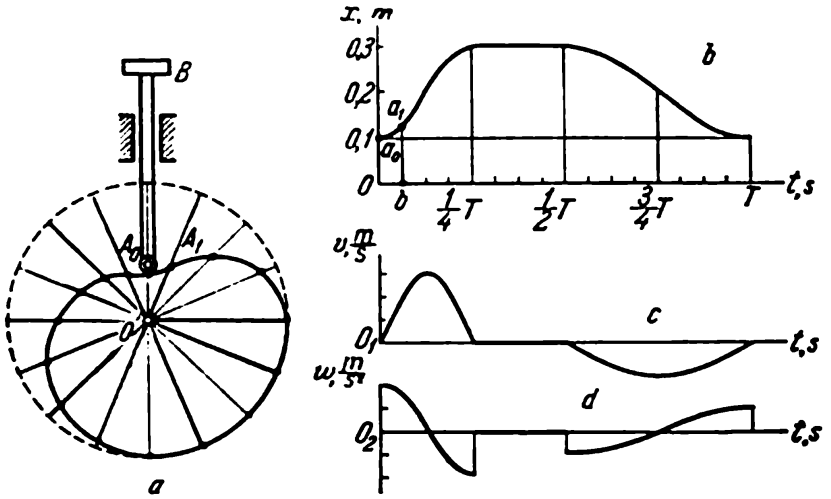


Fig. 159

E_3, ... du diagramme des vitesses. En joignant ces points par une courbe continue on obtient le graphique de la vitesse du piston (fig. 158, *c*).

3) La construction du graphique de l'accélération à partir du graphique des vitesses (ou du graphique de l'accélération tangentielle en cas du mouvement curviligne) est réalisée de manière analogue à la construction du graphique des vitesses en partant de l'abaque du mouvement. A la figure 158, *d*, on montre le graphique des accélérations du piston à l'échelle 1 cm pour 2,5 m/s².

Problème 61. Déterminer par une construction graphique le profil d'une came (fig. 159, *a*) si pendant sa rotation uniforme autour de l'axe O' la tige verticale AB se déplace conformément à la loi représentée à la figure 159, *b* (sur le graphique, T temps d'un tour de came; pendant le premier quart de tour la tige monte à 0,2 m, durant le deuxième quart de tour elle reste sur place et au cours du dernier demi-tour elle revient à sa position initiale). Construire également les graphiques de la vitesse et de l'accélération de la tige pendant le mouvement. L'abaque du mouvement est donné à l'échelle 1 cm pour 0,1 m.

Solution. Construisons le profil de la came à l'échelle de l'abaque du mouvement. Pour cela, traçons de O' comme centre une circonférence de rayon 3 cm et divisons-la en 16 parties égales. Le segment OT sur l'axe t de l'abaque doit être aussi partagé en 16 parties égales. Portons la valeur de x à chacun de ces instants le long du rayon correspondant, à partir du centre O' ($O'A_0 = Oa_0$, $O'A_1 = ba_1$, etc.). Après avoir relié les points A_0, A_1, etc. par une courbe, on obtient le profil de la came (fig. 159, *a*).

D'une maniere analogue, si on connaît le profil de la came, il est possible de construire l'abaque du mouvement de la tige AB.

Choisissant une valeur pour T, temps d'une révolution de la came, on construit (de la même façon qu'au problème précédent) les graphiques de la vitesse et de l'accélération de la tige AB.

Ces abaques sont représentés sur les figures 159, *c* et 159, *d*. Durant le deuxième quart de tour de la came la vitesse et l'accélération de la tige AB (conformément aux données du problème) sont égales à zéro. La vitesse de la tige change de façon continue, tandis que l'accélération subit des discontinuités aux instants $t_1 = \frac{1}{4} T$ et $t_2 = \frac{1}{2} T$.

Chapitre XI

MOUVEMENT DE TRANSLATION ET MOUVEMENT DE ROTATION DU CORPS SOLIDE

§ 73. Mouvement de translation. En cinématique, comme en statique, nous considérons tous les corps solides comme étant absolument invariables, c'est-à-dire que nous admettons que la distance entre deux points quelconques du corps reste constante durant tout le mouvement.

Les problèmes de la cinématique du corps solide se divisent en deux parties :

1) Définition du mouvement et étude des caractéristiques cinématiques du mouvement du corps pris dans son ensemble.

2) Etude du mouvement de chaque point du corps séparément.

Commençons par l'étude du mouvement de translation du corps solide.

On entend par mouvement de translation du corps solide un mouvement dans lequel chaque droite appartenant au corps se déplace tout en restant parallèle à elle-même.

Il ne faut pas confondre le mouvement de translation avec le mouvement rectiligne. Dans le mouvement de translation du corps, les trajectoires de ses points peuvent se déplacer suivant n'importe quelles lignes courbes.

Donnons quelques exemples de mouvements de translation.

1. La carrosserie d'une automobile sur une section de route droite et horizontale est animée d'un mouvement de translation. Les trajectoires de ses points sont des lignes droites.

2. La bielle d'accouplement AB (fig. 160) lors de la rotation des manivelles O_1A et O_2B ($O_1A = O_2B$) est aussi en mouvement de translation (toute droite portée sur elle reste parallèle à elle-même). En même temps, les points de cette bielle effectuent des mouvements circulaires.

Les propriétés du mouvement de translation sont exprimées par le théorème suivant : *dans le mouvement de translation tous les points du corps décrivent les mêmes trajectoires (superposables) et à chaque instant ils possèdent des vitesses et des accélérations égales en module et en direction.*

Soit un corps solide qui effectue un mouvement de translation par rapport au système d'axes $Oxyz$. Prenons dans ce corps deux points arbitraires A et B, dont les positions à l'instant t sont déterminées par les rayons vecteurs $\boldsymbol{r}_A$ et $\boldsymbol{r}_B$ (fig. 161) ; traçons le vecteur $\overline{AB}$,

joignant ces points. Dans ce cas, comme il est facile de le voir:

$$r_B = r_A + \overline{AB}. \tag{35}$$

De plus, la longueur AB est constante, car c'est la distance entre deux points du corps solide; la direction $\overline{AB}$ reste invariable, car le corps est animé du mouvement de translation. Donc, le vecteur $\overline{AB}$ durant tout le mouvement du corps est constant ($\overline{AB}$ = const.).

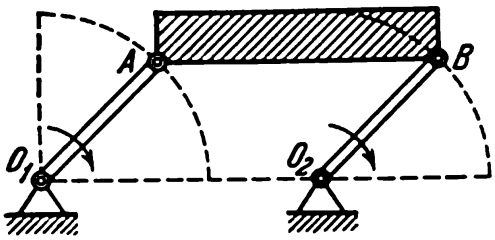


Fig. 160

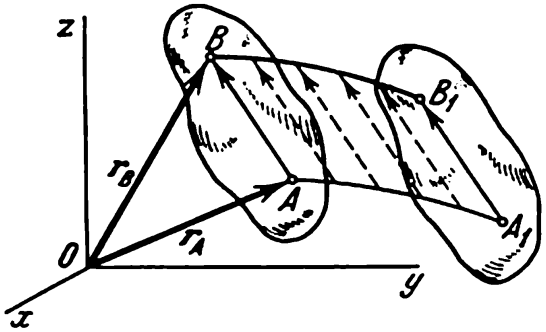


Fig. 161

Il s'ensuit de l'égalité (35) (ou directement de la figure) que la trajectoire du point B se déduit de la trajectoire du point A par un déplacement parallèle de tous ses points d'une grandeur égale au vecteur constant $\overline{AB}$. Par conséquent, les trajectoires des points A et B seront en effet égales (coïncidant à la superposition).

Pour trouver les vitesses des points A et B, dérivons les deux membres de l'égalité (35) par rapport au temps. On obtient:

$$\frac{dr_B}{dt} = \frac{dr_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt}.$$

Mais la dérivée du vecteur constant $\overline{AB}$ est égale à zéro. Quant aux dérivées temporelles des vecteurs r_A et r_B, elles donnent les vitesses des points A et B. Il en résulte que:

$$v_A = v_B,$$

c'est-à-dire que les vitesses des points A et B du corps sont à tout instant égales en module et en direction. Après avoir pris les dérivées par rapport au temps des deux membres de l'égalité obtenue, on trouve:

$$\frac{dv_A}{dt} = \frac{dr_B}{dt} \quad \text{ou} \quad w_A = w_B.$$

Par conséquent, les accélérations des points A et B du corps sont aussi à tout instant égales en module et en direction.

Comme les points A et B ont été pris arbitrairement, il découle des résultats obtenus que les trajectoires de tous les points du corps de même que leurs vitesses et leurs accélérations sont à tout instant des grandeurs équipollentes. Le théorème est donc démontré.

Il résulte de ce théorème que le mouvement de translation du corps est complètement défini par le mouvement d'un de ses points. Par conséquent, l'étude du mouvement de translation du corps est ramenée au problème de cinématique du point qu'on avait déjà examiné.

Dans un mouvement de translation, la vitesse $\boldsymbol{v}$ commune à tous les points du corps est appelée *vitesse du mouvement de translation du corps* et l'accélération $\boldsymbol{w}$, *accélération du mouvement de translation*. On peut donc appliquer les vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ à tout point du corps.

Remarquons que les notions de vitesse et d'accélération du *corps* n'ont de sens que *pour le mouvement de translation seulement*. Dans tous les autres cas, comme on le verra, les points du corps se déplacent avec des vitesses et des accélérations différentes et pour ces mouvements les expressions « vitesse du corps » ou « accélération du corps » n'ont pas de sens.

§ 74. Mouvement de rotation du corps solide. Vitesse et accélération angulaires. *On appelle mouvement de rotation du corps solide un mouvement dans lequel deux points quelconques du corps (ou qui lui sont liés invariablement) restent fixes* (fig. 162). La droite AB passant par les points immobiles A et B est appelée *axe de rotation*.

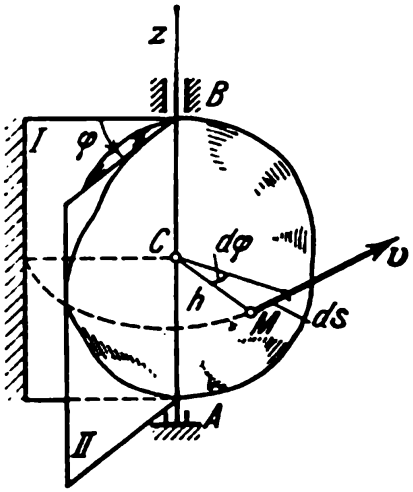


Fig. 162

Les distances entre les points du corps solide restant invariables, il en résulte que pendant le mouvement de rotation tous les points appartenant à l'axe de rotation restent immobiles tandis que tous les autres points du corps décrivent des circonférences dans des plans perpendiculaires à l'axe de rotation, et ayant pour centres des points situés sur cet axe (cette conséquence peut aussi servir de définition du mouvement de rotation [1]).

Pour déterminer la position du corps en rotation, menons deux plans par l'axe de rotation Az: le plan I — immobile et le plan II,

[1] La rotation d'un corps autour de l'axe peut aussi se réaliser de façon qu'aucun des points appartenant au corps ne se trouve sur l'axe de rotation (par exemple, la rotation d'une roue sur un axe ou celle d'un homme sur un arrousel).

lié au corps et tournant avec lui (fig. 162). Dans ce cas, la position du corps à tout instant sera déterminée univoquement par l'angle φ entre les plans, pris avec le signe convenable. Cet angle est appelé *angle de rotation du corps*. L'angle φ est considéré comme positif s'il est compté à partir du plan immobile dans le sens contraire à la marche des aiguilles d'une montre (pour un observateur regardant du bout positif de l'axe Az) et comme négatif quand il est compté dans le sens des aiguilles d'une montre. L'angle φ est toujours mesuré *en radians*

Pour connaître la position du corps à tout instant, il faut connaître la relation qui lie l'angle φ au temps t, c'est-à-dire :

$$\varphi = f\ (t). \tag{36}$$

L'équation (36) exprime la *loi du mouvement de rotation du corps solide*.

La vitesse angulaire ω et l'accélération angulaire ε sont les caractéristiques cinématiques essentielles du mouvement de rotation du corps solide.

Si pendant l'intervalle de temps $\Delta t = t_1 - t$ le corps tourne de l'angle $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, la valeur numérique de la vitesse moyenne angulaire du corps au cours de cet intervalle de temps sera égale à

$$\omega_{\text{moy}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Par vitesse angulaire instantanée du corps on entend la grandeur vers laquelle tend la vitesse moyenne ω_{moy} quand l'intervalle de temps Δt tend vers zéro :

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{37}$$

La *vitesse angulaire instantanée du corps est donc numériquement égale à la dérivée première de l'angle de rotation par rapport au temps.* De l'équation (37) il découle aussi que la grandeur ω est égale au rapport de l'angle de rotation élémentaire $d\varphi$ à l'intervalle de temps correspondant dt. Le signe de ω est donné par le sens de rotation du corps. Il est facile de voir que $\omega > 0$ quand la rotation est réalisée en sens contraire des aiguilles d'une montre, et $\omega < 0$, quand elle est réalisée dans celui des aiguilles d'une montre. L'équation aux dimensions de la vitesse angulaire, si le temps est mesuré en secondes, est :

$$[\omega] = \frac{\textit{radian}}{\textit{seconde}} = \frac{1}{\text{s}},$$

car le radian est une grandeur sans dimension.

On peut représenter la vitesse angulaire du corps par le vecteur $\boldsymbol{\omega}$, dont la valeur numérique est égale à $\frac{d\varphi}{dt}$ et qui est dirigé le long de

l'axe de rotation du corps de telle façon que de son extrémité on voie la rotation s'effectuer en sens contraire des aiguilles d'une montre (voir fig. 163). Un tel vecteur détermine à la fois le module de la vitesse angulaire, l'axe de rotation et le sens de rotation autour de cet axe.

L'accélération angulaire caractérise le changement de la vitesse angulaire avec le temps.

Si pendant l'intervalle de temps $\Delta t = t_1 - t$ la vitesse angulaire du corps change d'une valeur $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, l'accélération angulaire

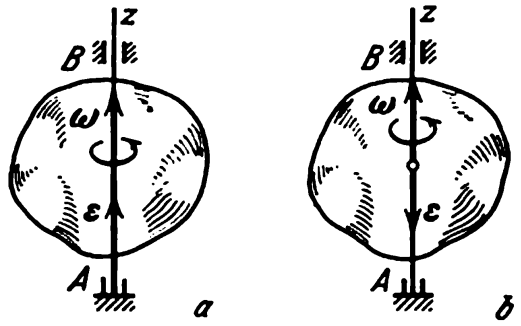


Fig. 163

moyenne du corps pendant cet intervalle de temps sera numériquement égale à :

$$\varepsilon_{moy} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Par accélération angulaire instantanée du corps on entend la valeur vers laquelle tend la valeur de ε_{moy}, quand l'intervalle de temps Δt tend vers zéro ; par conséquent

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

ou, en tenant compte de l'équation (37),

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (38)$$

Ainsi, *l'accélération angulaire instantanée du corps est numériquement égale à la dérivée première de la vitesse angulaire ou à la dérivée seconde de l'angle de rotation du corps par rapport au temps.* L'équation aux dimensions de l'accélération angulaire est $[\varepsilon] = 1/s^2$.

Si le module de la vitesse angulaire s'accroît avec le temps, la rotation du corps est appelée *accélérée* et s'il décroît, elle est *retardée*. Il est facile de voir que la rotation sera accélérée quand les valeurs ω et ε ont le même signe et elle sera retardée, quand les signes sont différents.

On peut aussi représenter l'accélération angulaire du corps (par analogie avec la vitesse angulaire) sous forme d'un vecteur ε dirigé le long de l'axe de rotation. Le sens de ε coïncide avec celui de ω quand le corps est en rotation accélérée (fig. 163, *a*), et il est contraire à ω lors d'une rotation retardée (fig. 163, *b*).

§ 75. Rotation uniforme et uniformément variée. La rotation du corps est appelée uniforme quand la vitesse angulaire est *constante* (ω = const.). Trouvons la loi de rotation uniforme. La formule (37) nous donne $d\varphi = \omega\, dt$.

De là, en considérant qu'à l'instant initial $t = 0$ l'angle $\varphi = 0$, et en prenant les intégrales, à gauche de 0 à φ et à droite de 0 à t, on obtient :

$$\varphi = \omega t. \tag{39}$$

Il découle de l'égalité (39) que pour une rotation uniforme

$$\omega = \frac{\varphi}{t}. \tag{40}$$

Dans la pratique on définit souvent la vitesse de rotation uniforme en tours par minute, en représentant cette grandeur par la notation n tr/mn [1]. Cherchons la relation qui permet de passer de n tr/mn à ω 1/s. La révolution d'un tour fait décrire au corps un angle de 2π, tandis que n tours lui font décrire $2\pi n$; cette rotation s'effectue en un temps $t = 1$ mn $= 60$ s.

Il suit de l'égalité (40) que

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \approx 0{,}1n. \tag{41}$$

La rotation est appelée *uniformément variée* quand l'accélération angulaire du corps reste constante (ε = const.) durant tout le mouvement.

Trouvons la loi de rotation uniformément variée, considérant qu'à l'instant initial $t = 0$ l'angle $\varphi = 0$ et la vitesse angulaire $\omega = \omega_0$ (ω_0 — vitesse angulaire initiale). Il découle de la formule (38) que $d\omega = \varepsilon\, dt$. En intégrant le membre de gauche dans les limites de ω_0 jusqu'à ω, et le membre de droite dans les limites de 0 à t, on trouve que :

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{42}$$

Ecrivons l'équation (42) sous la forme

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon t \text{ ou } d\varphi = \omega_0\, dt + \varepsilon t\, dt.$$

[1] Soulignons que la dimension de n n'est pas celle de l'angle, mais de la vitesse angulaire.

Intégrant une deuxième fois, on trouve la loi du mouvement de rotation uniformément variée:

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}. \tag{43}$$

La vitesse angulaire ω de cette rotation est déterminée par la formule (42). La rotation est uniformément accélérée quand les valeurs de ω et de ε ont le même signe, et elle est uniformément retardée quand les signes sont différents.

En conclusion soulignons l'analogie de la loi du mouvement rectiligne du point et de la loi du mouvement de rotation du corps solide. Il est facile de voir que toutes les formules obtenues au chapitre IX se transforment en des formules du présent paragraphe, quand x, v et w sont substitués par φ, ω et ε.

§ 76. Vitesses et accélérations des points d'un corps en rotation. Après avoir établi aux paragraphes précédents les caractéristiques du mouvement du corps dans son ensemble, on passera à l'étude du mouvement de ses points pris séparément.

Examinons un point M du corps solide qui se trouve à la distance h de l'axe de rotation Az (voir fig. 162). Pendant la rotation du corps le point M décrit une circonférence de rayon h, dont le plan est perpendiculaire à l'axe de rotation et le centre C est sur l'axe lui-même. Le point M effectue le déplacement élémentaire $ds = h\,d\varphi$ le long de sa trajectoire si durant le temps dt le corps tourne de l'angle $d\varphi$. Dans ce cas, la vitesse du point sera égale au rapport de ds à dt, c'est-à-dire:

$$v = \frac{ds}{dt} = h\,\frac{d\varphi}{dt}$$

ou

$$v = h\omega. \tag{44}$$

La vitesse v est appelée vitesse *linéaire* ou *circonférencielle* du point M.

Ainsi, la *valeur numérique de la vitesse linéaire d'un point d'un corps solide en rotation est égale au produit de la vitesse angulaire du corps par la distance de ce point à l'axe de rotation.*

Le vecteur vitesse linéaire est dirigé suivant la tangente à la circonférence décrite par le point M, ou suivant la perpendiculaire au plan passant par l'axe de rotation et par le point M.

Vu qu'à l'instant donné ω a la même valeur pour tous les points du corps, il résulte de la formule (44) que les vitesses linéaires des points d'un corps en rotation sont proportionnelles à leurs distances à l'axe de rotation (fig. 164).

Pour trouver l'accélération du point M on utilise les formules:

$$w_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad w_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Dans notre cas, $\rho = h$. En y substituant la valeur de v donnée par l'égalité (44), on obtient:

$$w_\tau = h\frac{d\omega}{dt}, \quad w_n = \frac{h^2\omega^2}{h}$$

ou finalement:

$$w_\tau = h\varepsilon, \quad w_n = h\omega^2. \tag{45}$$

L'accélération tangentielle w_τ est portée par la tangente à la trajectoire (et est dirigée dans le sens du mouvement quand la

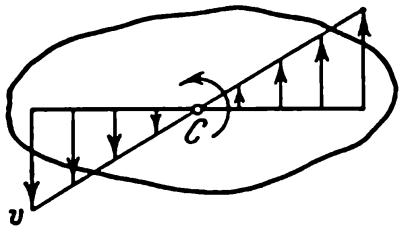


Fig. 164

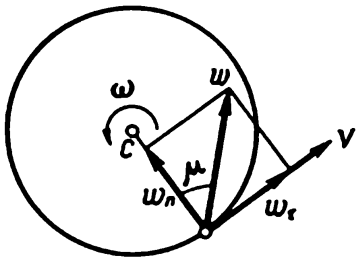


Fig. 165

rotation est accélérée, et dans le sens opposé quand la rotation est retardée); l'accélération normale w_n est toujours portée par le rayon h et dirigée vers l'axe de rotation (fig. 165).

L'accélération totale du point M sera égale à:

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{h^2\varepsilon^2 + h^2\omega^4}$$

ou

$$w = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{46}$$

L'angle μ que fait le vecteur accélération totale avec le rayon de la circonférence décrite par le point peut être calculé d'après la formule:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{|w_\tau|}{w_n}.$$

En substituant les grandeurs w_τ et w_n par leurs valeurs tirées des équations (45), on obtient:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \tag{47}$$

Comme à un instant donné ε et ω ont la même valeur pour tous les points du corps, il découle des formules (46) et (47) que les accélérations de tous les points d'un corps solide en rotation sont proportionnelles à leurs distances de l'axe de rotation et qu'elles forment le même angle μ avec les rayons des circonférences décrites par ces points (fig. 166).

Les formules (44)-(47) permettent de déterminer la vitesse et l'accélération de tout point du corps si on connaît la loi de rotation du corps et la distance entre le point considéré et l'axe de rotation. Sur la base des mêmes formules il est possible, en connaissant le mouvement d'un point du corps, de déterminer le mouvement de tout autre point du corps ainsi que toutes les circonstances du mouvement du corps pris dans son ensemble.

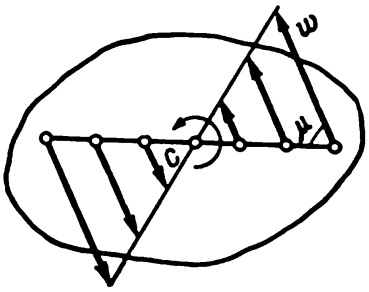


Fig. 166

Problème 62. Un arbre tournant à une vitesse $n = 90$ tr/mn, après arrêt du moteur tourne d'un mouvement uniformément retardé et s'arrête après $t_1 = 40$ s. Trouver le nombre de tours effectués par l'arbre durant ce laps de temps.

Solution. L'arbre étant en rotation uniformément retardée, on a:

$$\varphi = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}, \tag{a}$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{b}$$

La vitesse angulaire initiale de l'arbre ω_0 en mouvement de rotation uniformément retardée est celle qu'il avait à l'instant d'arrêt du moteur. Par conséquent:

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30}.$$

A l'instant d'arrêt de l'arbre, quand $t = t_1$, la vitesse angulaire de l'arbre $\omega_1 = 0$. En substituant ces valeurs dans l'équation (b) on obtient:

$$0 = \frac{\pi n}{30} + \varepsilon t_1 \text{ et } \varepsilon = -\frac{\pi n}{30 t_1}.$$

Si on désigne le nombre de tours effectués par le moteur durant le temps t_1 par N (ne pas confondre avec n; n vitesse angulaire!), l'angle de rotation au cours du même temps sera égal à $\varphi_1 = 2\pi N$. En substituant les valeurs trouvées pour ε et pour φ_1 dans l'équation (a), on obtient:

$$2\pi N = \frac{\pi n}{30} t_1 - \frac{\pi n}{60} t_1 = \frac{\pi n}{60} t_1,$$

d'où

$$N = \frac{n t_1}{120} = 30 \text{ tours.}$$

Problème 63. Un volant de rayon $R = 1{,}2$ m tourne uniformément à une vitesse $n = 90$ tr/mn. Déterminer la vitesse linéaire et l'accélération d'un point de la jante du volant.

Solution. La vitesse linéaire du point est $v = R\omega$, où la vitesse angulaire ω doit être obligatoirement exprimée en radians par seconde. Dans notre cas :

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = 3\pi \frac{1}{\text{s}}.$$

Alors

$$v = \frac{\pi n}{30} R \approx 11{,}3 \text{ m/s}.$$

Comme $\omega = \text{const.}$, $\varepsilon = 0$ et, par suite,

$$w = w_n = R\omega^2 = \frac{\pi^2 n^2}{900} R \approx 106{,}6 \text{ m/s}^2.$$

Dans le cas donné l'accélération du point est dirigée vers l'axe de rotation.

Problème 64. Pendant son lancement un volant tourne conformément à la loi :

$$\varphi = \frac{9}{32} t^3.$$

Déterminer la vitesse linéaire et l'accélération d'un point qui se trouve à la distance $h = 0{,}8$ m de l'axe de rotation, à l'instant où l'accélération tangentielle du point devient égale à l'accélération normale.

Solution. On trouve aisément la vitesse angulaire et l'accélération angulaire du volant :

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{27}{32} t^2, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{27}{16} t.$$

Pour l'accélération tangentielle et normale du point, on a les formules $w_\tau = h\varepsilon$, $w_n = h\omega^2$.

Désignons l'instant où $w_\tau = w_n$ par t_1. Il est évident qu'à cet instant $\varepsilon_1 = \omega_1^2$ ou

$$\frac{27}{16} t_1 = \left(\frac{27}{32}\right)^2 t_1^4,$$

d'où

$$t_1^3 = \frac{64}{27} \text{ et } t_1 = \frac{4}{3} \text{ s}.$$

En substituant cette valeur de t_1 dans les équations donnant ω et ε, on trouve qu'à l'instant t_1

$$\omega_1 = \frac{3}{2} \text{ 1/s}, \quad \varepsilon_1 = \frac{9}{4} \text{ 1/s}^2.$$

Il en résulte que les valeurs recherchées sont :

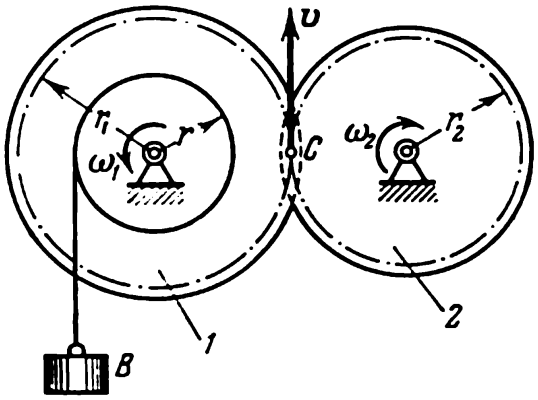
$$v_1 = h\omega_1 = 1{,}2 \text{ m/s}; \quad w_1 = h\sqrt{\varepsilon_1^2 + \omega_1^4} = 1{,}8\sqrt{2} \approx 2{,}54 \text{ m/s}^2.$$

Le vecteur $\boldsymbol{w}_1$ est dirigé sous l'angle de 45° par rapport au rayon h.

Problème 65. Un poids B (fig. 167) fait tourner un arbre de rayon r et un pignon 1 de rayon r_1, monté sur le même axe que l'arbre. Le mouvement du

poids débute de l'état de repos et s'effectue avec une accélération constante a. Déterminer la loi de rotation du pignon *2* de rayon r_2 qui s'engrène avec le pignon *1*.

S o l u t i o n. La vitesse initiale du poids B étant nulle, sa vitesse v_B à tout instant t sera égale à at ($v_B = at$). Les points de la jante de l'arbre auront la même vitesse. Mais, d'un autre côté, les vitesses de ces points sont égales



F i g. 167

à $\omega_1 r$, où ω_1 est la vitesse angulaire commune de l'arbre et du pignon *1*. Il s'ensuit que:

$$\omega_1 r = at, \quad \omega_1 = \frac{at}{r}.$$

Déterminons maintenant ω_2. Vu qu'au point C d'engrenage des pignons la vitesse linéaire doit être la même pour les deux pignons, $v_C = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$, d'où

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1 = \frac{r_1 a}{r_2 r} t.$$

Donc, la vitesse angulaire du pignon *2* s'accroît proportionnellement au temps. Tenant compte de ce que $\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$, où φ_2 est l'angle de rotation du pignon *2*, on obtient:

$$d\varphi_2 = \frac{r_1 a}{r_2 r} t\, dt.$$

Après avoir pris les intégrales des deux membres et faisant en sorte que pour $t = 0$ l'angle $\varphi_2 = 0$, on trouvera la loi de rotation uniformément accélérée du pignon *2* sous la forme

$$\varphi_2 = \frac{r_1 a}{2 r r_2} t^2.$$

Chapitre XII

MOUVEMENT PLAN DU CORPS SOLIDE

§ 77. Equations du mouvement plan. Décomposition du mouvement en mouvement de translation et de rotation. *On entend par mouvement plan le mouvement du corps solide dans lequel tous ses points se déplacent parallèlement à un plan fixe P* (fig. 168). Sont animés d'un mouvement plan divers éléments des mécanismes et des machines, telle, par exemple, une roue roulant sur un segment

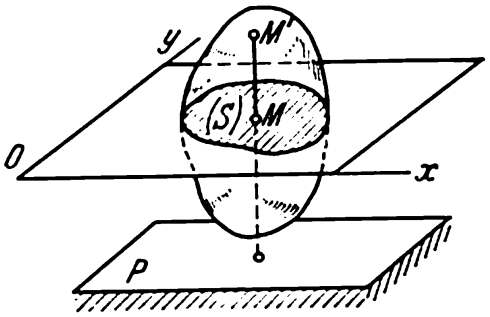


Fig. 168

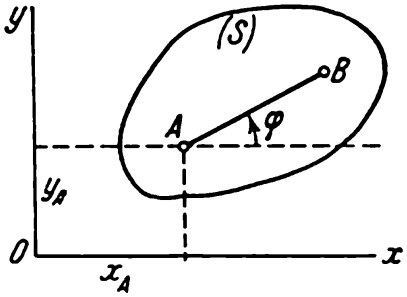


Fig. 169

de voie rectiligne ou une bielle d'un mécanisme bielle-manivelle, etc. Le mouvement de rotation du corps solide est un cas particulier du mouvement plan.

Au cours du mouvement plan, tous les points du corps situés sur une droite MM' perpendiculaire au plan P (voir fig. 168) se déplacent de façon identique. C'est pourquoi, pour l'étude du mouvement d'un corps, il suffit d'étudier le mouvement de la section S du corps par le plan Oxy (le plan Oxy est un plan quelconque parallèle au plan fixe P). Dans la suite de l'exposé, on fera coïncider le plan Oxy avec le plan du dessin et on ne représentera que la section S au lieu du corps tout entier.

Si on connaît la position d'un point A de la section, c'est-à-dire ses coordonnées x_A, y_A (fig. 169) et l'angle φ que le segment AB, tracé arbitrairement dans la section S, forme avec l'axe des x, on peut déterminer la position de la section S dans le plan Oxy.

Le point A, choisi pour déterminer la position de la section S, sera dans la suite appelé *pôle*.

Au cours du mouvement du corps les valeurs de x_A, y_A et φ changent. Pour connaître la loi du mouvement du corps, c'est-à-dire pour pouvoir définir sa position dans l'espace à tout instant,

il faut connaître les relations:

$$x_A = f_1(t), \qquad y_A = f_2(t), \qquad \varphi = f_3(t). \tag{48}$$

Les équations (48) sont appelées *équations du mouvement plan du corps solide.*

Examinons deux positions successives I et II, occupées par la section S du corps en mouvement, aux instants t_1 et $t_2 = t_1 + \Delta t$ (fig. 170). Il est facile de voir que la section S, et avec elle tout le corps, peuvent être amenés de la position I à la position II de la façon suivante. Il faut d'abord déplacer le corps par translation de façon que le pôle A_1, se déplaçant le long de sa trajectoire,

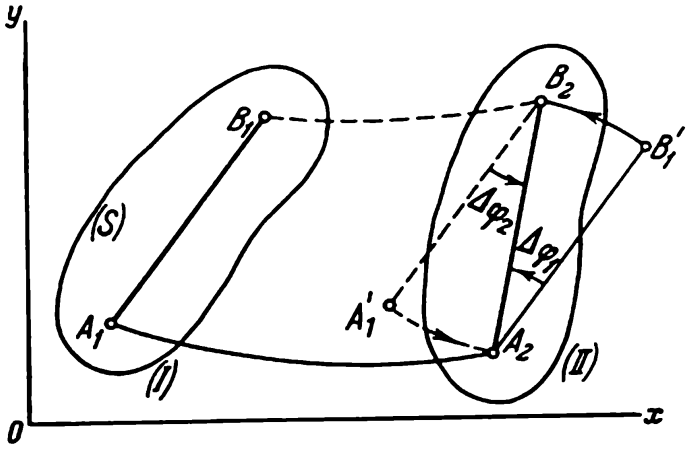


Fig. 170

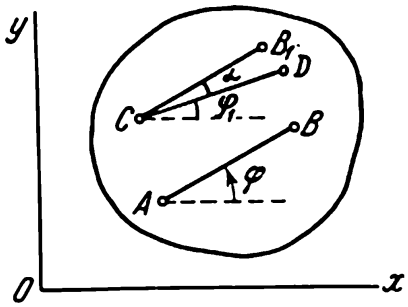


Fig. 171

arrive à la position A_2 (le segment A_1B_1 occupera alors la position A_2B_1'), puis on fait tourner la section autour du pôle A_2 de l'angle $\Delta\varphi_1$. On peut de la même façon déplacer le corps de la position II à la position suivante III et ainsi de suite. Il en découle que le *mouvement plan du corps solide est composé d'un mouvement de translation dans lequel tous les points se déplacent de la même façon que le pôle A, et d'un mouvement de rotation autour de ce pôle* [1].

Il est évident que la composante de translation du mouvement plan est définie par les deux premières relations des équations (48), tandis que la troisième de ces équations définit la rotation autour du pôle.

Les caractéristiques cinématiques essentielles du mouvement examiné sont la vitesse et l'accélération du mouvement de translation, égales à la vitesse et à l'accélération du pôle ($v_{\text{trans}} = v_A$, $w_{\text{trans}} = w_A$), ainsi que la vitesse angulaire ω et l'accélération ε de la rotation autour du pôle. On peut déterminer les valeurs de ces caractéristiques à chaque instant à l'aide des équations (48).

[1] Le mouvement de rotation du corps se réalise autour de l'axe perpendiculaire au plan P et passant par le pôle A. Cependant, pour abréger, on dénommera dans la suite ce mouvement tout simplement rotation autour du pôle A.

Dans l'étude du mouvement on peut choisir pour pôle n'importe quel point du corps. Si au lieu de A on prend pour pôle un point C et on définit la position de la section par le segment CD faisant avec l'axe Ox l'angle φ_1 (fig. 171), les caractéristiques de la composante de translation du mouvement changeront car dans le cas général $v_C \neq v_A$ et $w_C \neq \neq w_A$ (autrement le corps effectuerait un mouvement de translation). Quant aux caractéristiques de la composante de rotation du mouvement, c'est-à-dire ω et ε, elles restent toujours invariables. En effet, traçons, pour déterminer la rotation du corps autour du pôle C, le segment CB_1 parallèle à AB, nous voyons qu'à tout instant l'angle $\varphi_1 = \varphi - \alpha$, où α-const.

Il en découle que:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

ou

$$\omega_1 = \omega, \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

On peut encore expliquer ce résultat de la façon suivante. Examinons encore une fois le déplacement du corps de la position I à la position II (voir fig. 170), mais en prenant maintenant le point B comme pôle. Alors, déplaçant le corps et le pôle ensemble par translation, on fera coïncider le point B_1 avec le point B_2 (dans ce cas le segment B_1A_1 occupera la position B_2A_1'). Puis, en tournant la section S autour du pôle B_2 de l'angle $\Delta\varphi_2$, on amène le corps dans la position II.

Il est facile de voir que dans ce cas le déplacement de translation B_1B_2 est différent du déplacement A_1A_2 qui avait été réalisé avec le pôle A, tandis que l'angle de rotation $\Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_1$ (puisque $B_2A_1' \parallel A_2B_1'$). Par conséquent, la composante de rotation du mouvement reste invariable lorsqu'on change de pôle.

§ 78. Détermination des trajectoires des points du corps. Etudions maintenant séparément le mouvement des points du corps solide, c'est-à-dire recherchons leurs trajectoires, vitesses et accélérations. Pour cela, comme on l'a déjà indiqué, il suffit d'étudier le mouvement des points du corps situés dans la section S. On déterminera d'abord les trajectoires.

Examinons le point M du corps dont la position dans la section S est déterminée par la distance $b = AM$ du pôle et par l'angle $BAM = \alpha$ (fig. 172). Si le mouvement du corps est donné par les équations (48), les coordonnées x et y du point M dans le système d'axes Oxy seront:

$$\begin{aligned} x &= x_A + b\cos(\varphi + \alpha), \\ y &= y_A + b\sin(\varphi + \alpha), \end{aligned} \tag{49}$$

où x_A, y_A, φ sont des fonctions du temps, connues par les équations (48).

Les équations (49) déterminant la loi du mouvement du point M dans le plan Oxy donnent en même temps l'équation de la trajectoire de ce point sous forme paramétrique. Après avoir éliminé le temps t du système (49), on obtient l'équation habituelle de la trajectoire.

Si le corps examiné est un organe d'un mécanisme, il suffit, pour déterminer la trajectoire de tout point M du corps, d'exprimer

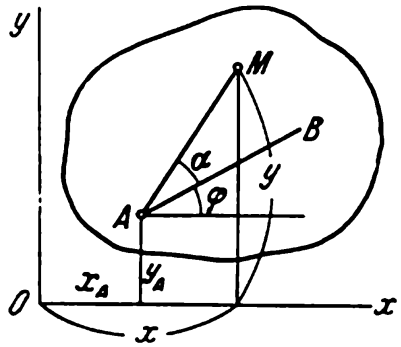


Fig. 172

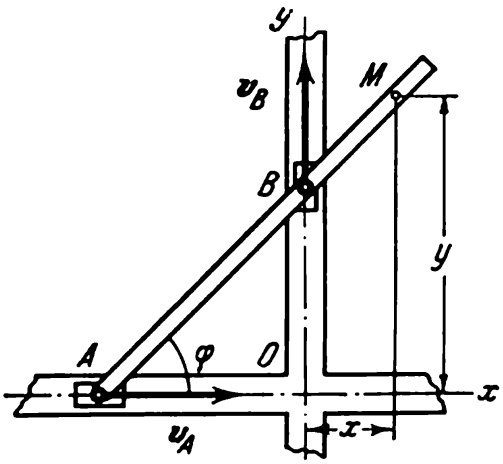


Fig. 173

ses coordonnées en fonction d'un paramètre quelconque déterminant la position du mécanisme, puis d'éliminer ce paramètre. Dans ce cas, il n'est pas obligatoire de connaître les équations du mouvement (48).

Problème 66. Les coulisseaux A et B auxquels est fixée la règle de l'ellipsographe se déplacent suivant deux glissières rectangulaires (fig. 173). La distance $AB = l$. Déterminer la trajectoire du point M de la règle.

Solution. Choisissant le point A pour pôle, nous déterminons la position du point M de la règle à l'aide du segment $AM = b$. La position de la règle elle-même est donnée par l'angle φ. Alors, on trouve pour les coordonnées x et y du point M:

$$x = (b - l)\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi.$$

Eliminant le paramètre φ, on voit que la trajectoire du point (indépendamment de la loi du mouvement de la règle) est représentée par une ellipse:

$$\frac{x^2}{(b-l)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec les demi-axes $a = |b - l|$ et b, et avec le centre au point O. En changeant, au moyen des vis appropriées, les distances l et b, on peut tracer avec le crayon en M des ellipses de demi-axes quelconques ne dépassant pas les dimensions de la règle. D'où la dénomination du dispositif, ellipsographe.

§ 79. Détermination des vitesses des points du corps. Le mouvement plan du corps solide se compose d'un mouvement de translation dans lequel tous les points du corps se déplacent avec la vitesse du pôle v_A, et d'un mouvement de rotation autour de ce pôle.

Nous allons montrer que la vitesse de chaque point M est la somme géométrique des vitesses correspondant à chacun de ces mouvements.

En effet, la position de tout point M, situé dans la section (S) du corps, est déterminée dans le système d'axes Oxy par le rayon

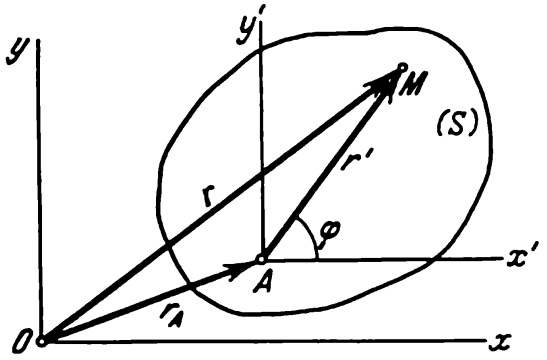


Fig. 174

vecteur $r = r_A + r'$ (fig. 174), où le vecteur $r' = \overline{AM}$. Alors

$$v_M = \frac{dr}{dt} = \frac{dr_A}{dt} + \frac{dr'}{dt}.$$

Dans l'équation obtenue, la valeur de $\frac{dr_A}{dt}$ est égale à la vitesse v_A du pôle A ; quant à la valeur de $\frac{dr'}{dt}$, elle est égale à la vitesse v_{MA} du point M quand $r_A = \text{const.}$, c'est-à-dire quand le point A est immobile ou, autrement dit, lors de la rotation du corps autour du pôle A.

Ainsi, il découle de l'égalité précédente que

$$v_M = v_A + v_{MA}. \tag{50}$$

La vitesse v_{MA} du point M dans le mouvement de rotation autour du pôle A sera (§ 76) :

$$v_{MA} = \omega \cdot MA \quad (v_{MA} \perp \overline{MA}), \tag{51}$$

où ω est la vitesse angulaire de rotation du corps.

Ainsi, la *vitesse de chaque point M du corps est la somme géométrique de la vitesse d'un point A, pris comme pôle, et de la vitesse du*

point M tournant avec le corps autour du pôle A. On trouve le module et la direction de la vitesse v_M en construisant le parallélogramme correspondant (fig. 175).

Problème 67. Il faut trouver la vitesse du point M de la jante d'une roue qui roule sans glissement sur un rail rectiligne (fig. 176), quand la vitesse du centre C de la roue est égale à v_C et l'angle $DKM = \alpha$.

Solution. Prenant pour pôle le point C dont la vitesse est connue, on trouve que $v_M = v_C + v_{MC}$, où $v_{MC} \perp \overline{CM}$ et en module $v_{MC} = \omega \cdot MC = \omega R$ (R — le rayon de la roue). On trouve la valeur de la vitesse angulaire ω

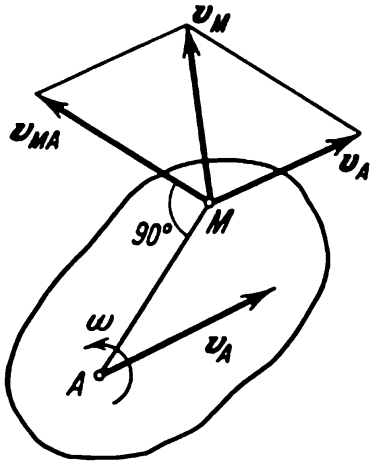


Fig. 175

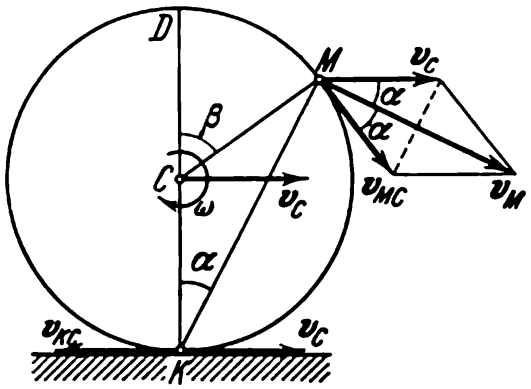


Fig. 176

en partant du fait que le point K de la roue ne glisse pas sur le rail et que par suite à l'instant donné $v_K = 0$. D'un autre côté, de même que pour le point M, $v_K = v_C + v_{KC}$, où $v_{KC} = \omega \cdot KC = \omega R$. Etant donné que pour le point K v_{KC} et v_C sont dirigées le long d'une même droite, pour $v_K = 0$ v_{KC} sera égale à v_C, d'où $\omega = \frac{v_C}{R}$. Finalement on trouve que:

$$v_{MC} = \omega R = v_C.$$

Le parallélogramme construit sur les vecteurs v_{MC} et v_C sera un losange. Mais l'angle entre v_C et v_{MC} est égal à β, car les côtés formant ces angles sont perpendiculaires entre eux. De plus, l'angle $\beta = 2\alpha$, étant un angle au centre s'appuyant sur le même arc que l'angle inscrit α. Mais comme nous avons un losange, les angles entre v_C et v_M et entre v_{MC} et v_M sont aussi égaux à α. Enfin, les diagonales du losange étant perpendiculaires entre elles, on obtient:

$$v_M = 2v_C \cos\alpha \text{ et } v_M \perp \overline{KM}.$$

Comme on le voit, le calcul est assez embrouillé. Ci-dessous nous allons examiner les méthodes permettant de résoudre les problèmes de ce genre beaucoup plus simplement (voir le problème 69).

§ 80. Théorème sur les projections des vitesses de deux points du corps. La détermination des vitesses des points du corps à l'aide de la formule (50) est habituellement liée à des calculs assez compliqués (voir le problème 67). Cependant, partant de ce résultat

fondamental, on peut déduire quelques méthodes plus commodes et plus simples pour déterminer les vitesses des points du corps.

Une de ces méthodes nous est donnée par le théorème suivant: *les projections des vitesses de deux points du corps solide sur la droite joignant ces points sont égales entre elles.*

Soient deux points quelconques A et B du corps. Prenant le point A pour pôle (fig. 177), on obtient conformément à la formule

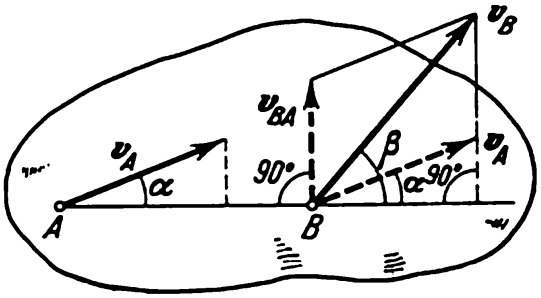


Fig. 177

(50) que $v_B = v_A + v_{BA}$. Projetant les deux membres de l'égalité sur la droite AB, compte tenu de ce que le vecteur v_{BA} est perpendiculaire à AB, on trouve que

$$v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha, \tag{52}$$

et le théorème est démontré. Ce résultat permet de trouver facilement la vitesse d'un point donné du corps quand on connaît la direction du mouvement de ce point et la vitesse d'un autre point du même corps.

Problème 68. Trouver la relation entre les vitesses des points A et B de la règle d'ellipsographe (voir fig. 173) pour un angle φ donné.

Solution. Les directions des vitesses des points A et B sont connues. En projetant les vecteurs v_A et v_B sur la droite AB, on a d'après le théorème démontré plus haut:

$$v_A \cos \varphi = v_B \cos (90° - \varphi),$$

d'où

$$v_A = v_B \operatorname{tg} \varphi.$$

§ 81. Détermination des vitesses des points du corps au moyen du centre instantané des vitesses. Une autre méthode simple et concrète de détermination des vitesses des points du corps en mouvement plan est basée sur la notion du centre instantané des vitesses.

Par centre instantané des vitesses on entend le point de la section S du corps, dont la vitesse à l'instant donné est égale à zéro.

Il est évident que si le corps n'est pas en mouvement de translation, un tel point existe à chaque instant et que ce point est unique. Soient les points A et B du corps, situés dans la section S

et possédant à l'instant t des vistesses v_A et v_B qui ne sont pas parallèles entre elles (fig. 178). Dans ce cas, le point P, situé à l'intersection des perpendiculaires Aa au vecteur v_A et Bb au vecteur v_B, sera justement le centre instantané des vitesses, puisque $v_P = 0$. En effet, si on suppose que $v_P \neq 0$, conformément au théorème sur la projection des vitesses des points du corps le vecteur v_P devrait être perpendiculaire en même temps à AP (car $v_A \perp AP$) ainsi qu'à BP (car $v_B \perp BP$), ce qui est impossible.

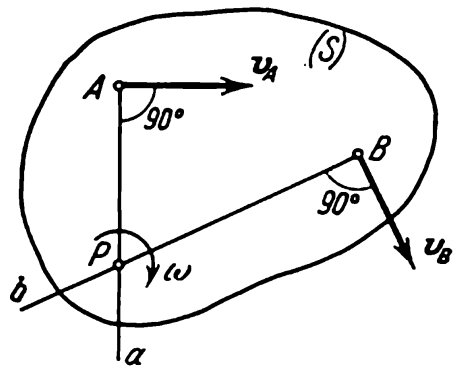


Fig. 178

On voit aussi à cet instant qu'aucun autre point de la section S ne peut avoir une vitesse nulle (ainsi, pour le point a la projection de v_B sur la droite Ba n'est pas égale à zéro et, par conséquent, $v_a \neq 0$, etc.).

Si maintenant on prend à l'instant t le point P pour pôle, la vitesse du point A, selon la formule (50), sera égale à

$$v_A = v_P + v_{AP} = v_{AP},$$

car $v_P = 0$. On obtient un résultat analogue pour tout autre point du corps. Il s'ensuit que la *vitesse de tout point du corps situé dans la section S est égale à sa vitesse de rotation autour du centre instantané des vitesses P*. De plus, selon les relations (51)

$$v_A = \omega \cdot PA \quad (v_A \perp \overline{PA});$$

$$v_B = \omega \cdot PB \quad (v_B \perp \overline{PB}), \tag{53}$$

et ainsi de suite.

Il découle aussi des égalités (53) que

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}, \tag{54}$$

c'est-à-dire que les *vitesses des points du corps sont proportionnelles à leurs distances au centre instantané des vitesses.*

Les résultats obtenus nous amènent aux conclusions suivantes:

1) *Pour déterminer le centre instantané des vitesses, il suffit de connaître les directions des vitesses v_A et v_B de deux points quelconques A et B de la section du corps* (ou de la trajectoire de ces points). Ce centre instantané des vitesses se trouve au point d'intersection des perpendiculaires aux vitesses des points A et B (ou aux tangentes à leurs trajectoires), menées respectivement par ces points.

2) *Pour déterminer la vitesse de n'importe quel point du corps, il faut connaître le module et la direction de la vitesse d'un point quelconque A du corps et la direction de la vitesse d'un autre point B.* Dans ce cas, menant par les points A et B les perpendiculaires aux vitesses v_A et v_B, on construit le centre instantané des vitesses P et on détermine d'après le sens de v_A le sens de rotation du corps. Après cela, connaissant v_A, on détermine conformément à la formule (54) la vitesse v_M d'un point quelconque M du corps.

Le vecteur v_M est dirigé perpendiculairement à $\overline{PM}$ dans le sens de rotation du corps.

3) *La vitesse angulaire du corps*, comme le montrent les formules (53), *est égale à tout instant au rapport de la vitesse d'un point de la section S à sa distance au centre instantané P*:

$$\omega = \frac{v_A}{PA}. \qquad (55)$$

Trouvons encore une autre expression pour ω. Il suit des égalités (50) et (51) que $v_{AB} = |v_A - v_B|$ et $v_{AB} = \omega \cdot AB$, d'où

$$\omega = \frac{|v_A - v_B|}{AB} = \frac{|v_A + (-v_B)|}{AB}. \qquad (56)$$

Les égalités (55) et (56) donnent la même valeur, car on a montré (§ 77) que la rotation de la section S autour du point A ou du point P se réalise à la même vitesse angulaire ω.

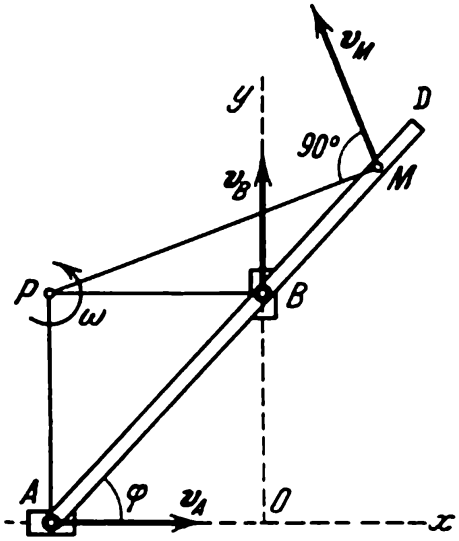


Fig. 179

Exemple. Pour la règle d'ellipsographe AM (fig. 179), les directions des vitesses des points A et B sont connues. Menant les perpendiculaires à ces directions, on trouve le centre instantané des vitesses P de la règle.

Connaissant P, de l'égalité des rapports $\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}$ on obtient $v_A = v_B \frac{PA}{PB} = v_B \operatorname{tg} \varphi$, c'est-à-dire le même résultat qu'au problème 68. Pour le point M on trouve de même que $v_M = v_B \frac{PM}{PB}$. On peut calculer la longueur de PM, connaissant AB, AM et l'angle φ. La direction du vecteur v_M est donnée sur le dessin ($v_M \perp PM$).

Pour la vitesse angulaire de la règle on trouve à l'aide des formules (55) et (56) :

$$\omega = \frac{v_B}{PB} \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{|v_B - v_A|}{AB}.$$

Il est facile de vérifier que les deux formules donnent le même résultat.

Examinons quelques cas particuliers de détermination du centre instantané des vitesses P.

a) Si le mouvement plan est un roulement sans glissement d'un corps cylindrique sur la surface d'un autre, immobile, le point de contact P (fig. 180) possède à l'instant considéré une vitesse nulle et, par conséquent, est le centre instantané des vitesses ($v_P = 0$, car en l'absence de glissement les points de contact des deux corps doivent avoir des vitesses égales et le deuxième corps est immobile). Un exemple nous en est fourni par le roulement d'une roue sur un rail.

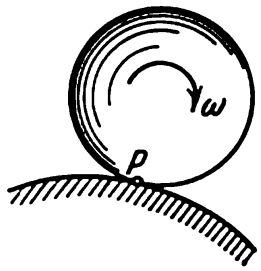


Fig. 180

b) Si les vitesses des points A et B sont parallèles, et si la droite AB n'est pas perpendiculaire à v_A (fig. 181), le centre instantané des vitesses est situé à l'infini et les vitesses de tous les points sont parallèles à v_A. Il suit du théorème sur les projections des vitesses que $v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$, c'est-à-dire que $v_B = v_A$; on obtient le résultat analogue pour tous les autres points du corps. Il en découle que dans le cas examiné les vitesses de tous les points du corps à l'instant donné sont égales entre

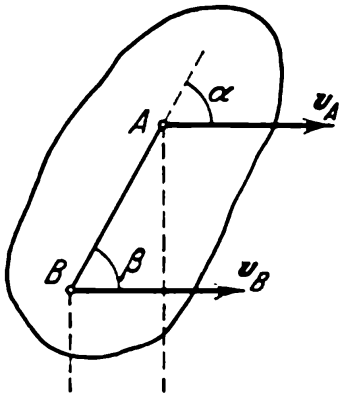


Fig. 181

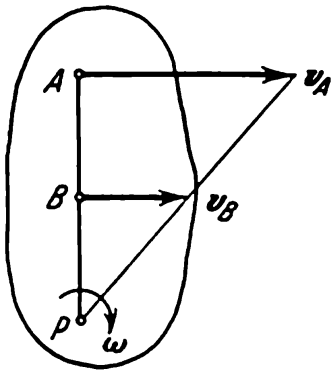


Fig. 182

elles et ont même module et même direction, c'est-à-dire que le *corps possède une distribution instantanée des vitesses de translation* (on appelle aussi un tel mouvement du corps *mouvement de translation instantané*). La vitesse angulaire ω du corps à cet instant, comme on le voit d'après la formule (56), est égale à zéro.

c) Si les vitesses des points A et B du corps sont parallèles l'une à l'autre et si de plus la ligne AB est perpendiculaire à v_A, le centre instantané des vitesses P est déterminé à l'aide des constructions effectuées sur la fig. 182. La justesse de ces constructions découle de la proportion (54). Dans ce cas, différent des précédents, il faut pour trouver P connaître, outre les directions, les modules des vitesses v_A et v_B.

Les résultats obtenus ci-dessus montrent que dans le mouvement plan les vitesses des points du corps sont distribuées à chaque instant comme si le corps tournait autour de l'axe Pz, perpendiculaire à la section S du corps et passant par le point P. On appelle cet axe *axe instantané de rotation du corps*. L'axe instantané se distingue de l'axe de rotation fixe par le fait que pendant le mouvement du corps il change constamment de position. Le mouvement plan se compose d'une suite de rotations élémentaires autour de ces axes instantanés.

§ 82. Résolution des problèmes[1]. Pour déterminer les caractéristiques cinématiques du mouvement (la vitesse angulaire du corps ou les vitesses de ses points), il faut connaître le module et la direction de la vitesse d'un point et la direction de la vitesse d'un autre point du corps (à l'exclusion des cas a) et c) examinés à la fin du paragraphe 81). Il convient de commencer la résolution des problèmes par la détermination des cas caractéristiques conformément aux données du problème.

Le mécanisme dont on étudie le mouvement sera représenté dans la position pour laquelle on recherche les caractéristiques. Au cours des calculs on tiendra compte de ce que la notion de centre instantané des vitesses ne se rapporte qu'au corps solide donné.

Dans un mécanisme comportant plusieurs corps, chaque corps qui n'est pas en mouvement de translation possède à l'instant donné son centre instantané des vitesses et sa vitesse angulaire.

Problème 69. Déterminer la vitesse du point M de la jante d'une roue en roulement (voir le problème 67) par la méthode du centre instantané des vitesses.

Solution. Le point de contact P (fig. 183) est le centre instantané des vitesses car $v_P = 0$. Par conséquent, $v_M \perp PM$. Etant donné que l'angle droit PMD s'appuie sur le diamètre, le vecteur de la vitesse v_M d'un point quelconque M de la jante passe par le point D. Partant de l'égalité des rapports

$$\frac{v_M}{PM} = \frac{v_C}{PC}$$

et remarquant que $PC = R$ et $PM = 2R \cos \alpha$, on trouve

$$v_M = 2v_C \cos \alpha.$$

Plus le point M est loin de P, plus grande sera sa vitesse ; c'est l'extrémité supérieure D du diamètre vertical qui possède la plus grande vitesse $v_D = 2v_C$.

[1] A ce sujet, voir également le § 96 (problème 90).

Selon la formule (55) la vitesse angulaire de la roue est égale à :

$$\omega = \frac{v_C}{PC} = \frac{v_C}{R}.$$

On a une distribution de vitesses analogue lors du roulement d'une roue ou d'un pignon sur n'importe quelle surface cylindrique (voir fig. 180).

Problème 70. Déterminer la vitesse du centre C de la poulie mobile de rayon r ainsi que sa vitesse angulaire ω (fig. 184), si le poids A monte avec la

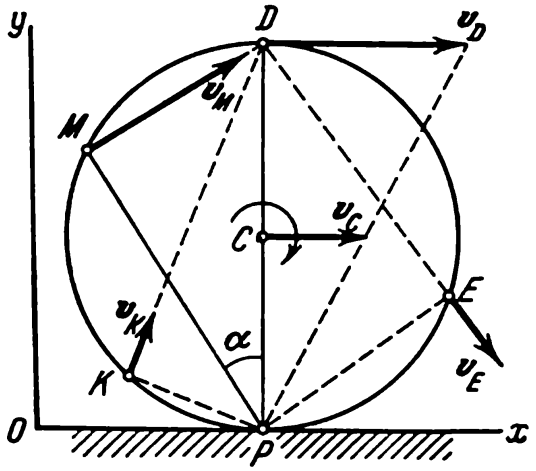


Fig. 183

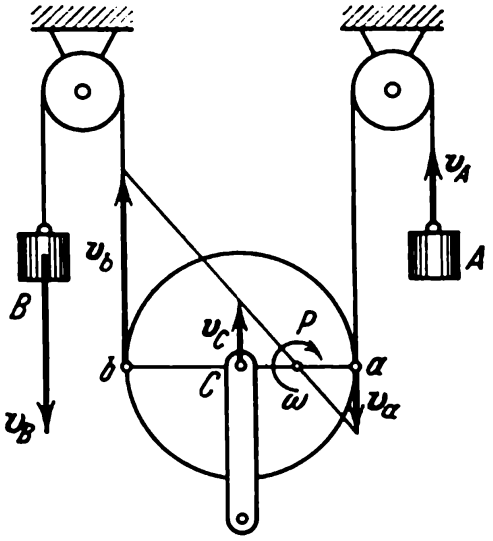


Fig. 184

vitesse v_A et le poids B descend avec la vitesse v_B. Pendant le mouvement le fil ne glisse pas sur la poulie mobile et ses brins sont verticaux.

Solution. La corde ne glissant pas, les vitesses des points a et b de la poulie sont égales en module aux vitesses des poids, c'est-à-dire $v_a = v_A$ et $v_b = v_B$. Connaissant les vitesses des points et supposant, pour fixer les idées, que $v_B > v_A$, on trouve la position du centre instantané des vitesses P de la poulie mobile de la même manière que dans le cas de la figure 182. La vitesse du centre C de la poulie est représentée par le vecteur v_C. Pour déterminer le module de v_C et la vitesse angulaire ω de la poulie mobile, on part des égalités suivantes (voir formule (56)) :

$$\omega = \frac{|v_b + (-v_a)|}{ab}, \quad \omega = \frac{|v_b - v_C|}{bC}.$$

Etant donné que $ab = 2r$, $bC = r$, il en découle que :

$$\omega = \frac{v_B + v_A}{2r}, \quad v_C = \frac{v_B - v_A}{2}.$$

Le centre C de la poulie monte quand $v_B > v_A$, et descend quand $v_B < v_A$. Pour $v_B = v_A$, $v_C = 0$.

Dans le cas où les deux poids A et B descendent, le signe de v_A dans les formules ci-dessus change.

Problème 71. Dans le mécanisme bielle-manivelle (fig. 185) la manivelle OA de longueur r tourne avec une vitesse angulaire ω_{OA}. La longueur de la bielle est $AB = l$. Pour un angle donné φ il faut déterminer : 1) la vitesse du coulisseau B ; 2) la position du point M de la bielle AB, possédant la plus petite vitesse ; 3) la vitesse angulaire ω_{AB} de la bielle. De plus, il faut examiner les positions du mécanisme quand $\varphi = 0$ et $\varphi = 90°$.

Solution. Il découle des données du problème que le point A possède la vitesse $v_A = \omega_{OA} r$, dirigée perpendiculairement à OA, tandis que la vitesse

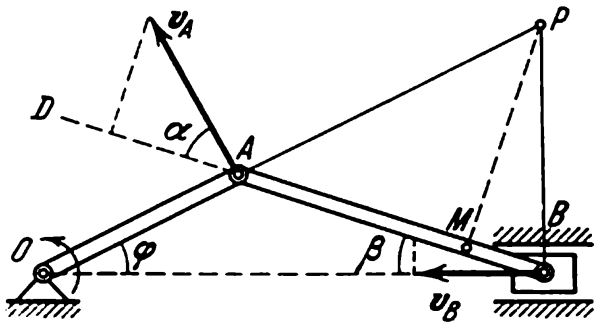


Fig. 185

du point B est dirigée le long de la droite BO. Ces données sont suffisantes pour déterminer toutes les caractéristiques cinématiques de la bielle AB.

1) Conformément au théorème sur les projections des vitesses on a $v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta$. L'angle OAD, étant un angle extérieur du triangle OAB, est égal à $\varphi + \beta$. Il s'ensuit que $\alpha = 90° - (\varphi + \beta)$ et que

$$v_B = \omega_{OA} r \frac{\sin(\varphi+\beta)}{\cos\beta} = \omega_{OA} r (\sin\varphi + \cos\varphi \operatorname{tg}\beta).$$

Eliminons l'angle β de cette égalité. Dans le triangle OAB :

$$\frac{\sin\beta}{r} = \frac{\sin\varphi}{l}.$$

De plus on a :

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}.$$

Il en résulte que

$$v_B = \omega_{OA} r \left(1 + \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right) \sin\varphi.$$

2) Après avoir mené les perpendiculaires aux vitesses par les points A et B, on détermine le centre instantané des vitesses P pour la bielle AB (la droite AP étant le prolongement de OA). La plus petite vitesse sera celle du point M qui est le plus rapproché du centre P, étant situé sur la perpendiculaire PM à AB. La vitesse de ce point est :

$$v_M = v_A \cos\alpha = \omega_{OA} r \sin(\varphi+\beta).$$

3) La vitesse angulaire de la bielle AB selon la formule (55) est égale à

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{PA} \text{ ou } \omega_{AB} = \frac{v_B}{PB}.$$

La longueur PB (ou PA) peut être calculée d'après les données du problème.

4) Pour l'angle $\varphi = 0$ (fig. 186,*a*) la perpendiculaire AB à la vitesse v_A et la perpendiculaire Bb à la direction de v_B se coupent au point B. Par conséquent, en cette position le point B est le centre instantané des vitesses et $v_B = 0$ (point

« mort » du mécanisme). Pour cette position

$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{AB}=\frac{r}{l}\,\omega_{OA}.$$

La distribution de vitesses des points de la bielle AB est donnée sur le dessin.

5) Pour l'angle $\varphi = 90°$ (fig. 186, *b*) les vitesses v_A et v_B sont dirigées

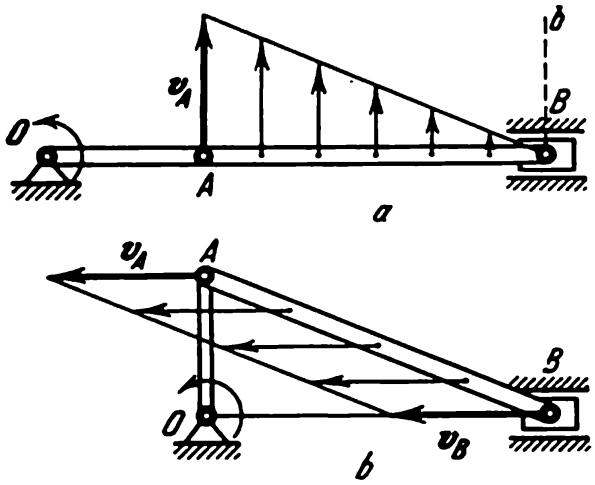


Fig. 186

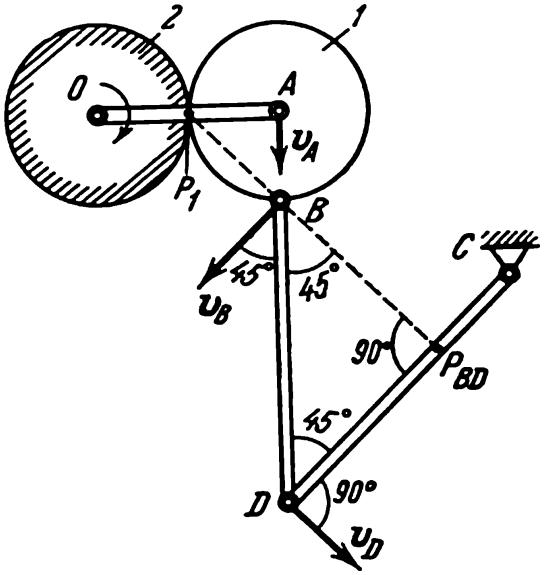


Fig. 187

parallèlement et les perpendiculaires à ces vitesses se rejoignent à l'infini. Par conséquent, à cet instant tous les points de la bielle AB possèdent la même vitesse égale à v_A ; $\omega_{AB} = 0$.

Problème 72. La manivelle OA (fig. 187), tournant autour de l'axe O avec la vitesse angulaire ω_{OA}, porte l'axe du pignon mobile *1* qui roule sur le pignon immobile *2*. Les pignons possèdent les mêmes rayons, égaux à r. La bielle BD de longueur l, liée au culbuteur DC, est articulée au pignon *1*.

Déterminer la vitesse angulaire ω_{BD} de la bielle au moment où elle est perpendiculaire à la manivelle OA si en ce moment l'angle $BDC = 45°$.

Solution. Pour déterminer ω_{BD} il faut connaître la vitesse d'un point quelconque de la bielle BD et la position de son centre instantané des vitesses. Cherchons la vitesse du point B en utilisant le fait qu'il appartient en même temps au pignon *1*. On connaît pour le pignon *1* la vitesse $v_A = \omega_{OA}2r$ ($v_A \perp OA$) et le centre instantané des vitesses P_1. Il en résulte que $v_B \perp P_1B$ et conformément au théorème sur les projections des vitesses $v_B \cos 45° = v_A$, d'où $v_B = v_A\sqrt{2} = 1r\omega_{OA}\sqrt{2}$.

Maintenant on connaît pour la bielle la vitesse v_B et la direction de la vitesse v_D ($v_D \perp DC$). Après avoir mené les perpendiculaires aux vitesses v_B et v_D, on trouve le centre instantané des vitesses P_{BD} de la bielle. De plus, le segment

$$BP_{BD}=l\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Alors

$$\omega_{BD}=\frac{v_B}{BP_{BD}}=4\,\frac{r}{l}\,\omega_{OA}.$$

Remarquons qu'on aura tort si l'on veut rechercher le centre instantané des vitesses en menant les perpendiculaires aux vecteurs v_A et v_D (erreur fréquente). Les points A et D appartiennent à des corps différents et l'intersection des perpendiculaires mentionnées n'est pas un centre instantané des vitesses (comparer avec le problème 73).

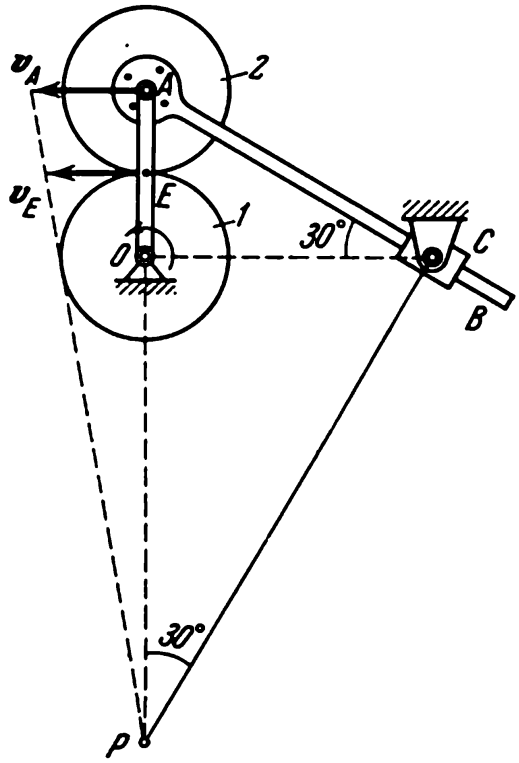
Problème 73. Le pignon *1* et la manivelle OA, qui tourne à la vitesse angulaire ω_{OA}, sont montés indépendamment l'un de l'autre sur l'axe O (fig. 188)

La manivelle porte l'axe A du pignon *2*, fixé d'une façon rigide à la bielle AB passant à travers le manchon oscillant C. Les rayons des pignons *1* et *2* sont identiques. Déterminer la vitesse angulaire ω_1 du pignon *1* au moment où $OA \perp OC$, si on a en même temps $\angle ACO = 30°$.

S o l u t i o n. Pour déterminer la vitesse angulaire ω_1 du pignon *1* il faut trouver la vitesse linéaire de son point E. On trouve cette vitesse en partant du fait que le point E du pignon *2* possède la même vitesse. On connaît la direction et le module de la vitesse du point A pour le pignon *2*:

$$v_A \perp OA, \quad v_A = \omega_{OA} 2r$$

(r rayon du pignon).



F i g. 188

On connaît en outre la direction de la vitesse v_E, mais dans ce cas ces données sont insuffisantes, car $v_E \parallel v_A$. On ne peut pas non plus trouver la valeur de v_E d'après le théorème sur les projections vu que v_A et v_E sont perpendiculaires à AE.

On utilisera le fait que le pignon *2* et la bielle AB forment un seul corps (ayant été rivés). On connaît la direction de la vitesse du point C pour ce corps: le vecteur v_C est dirigé le long de CA, car au point C la bielle ne peut que glisser le long du manchon.

Après avoir mené les perpendiculaires aux vecteurs v_A et v_C, on trouve le centre instantané des vitesses P du corps BAE.

D'après les données du problème, l'angle $ACO = 30°$, d'où l'angle $CPA = 30°$. C'est pourquoi:

$$AC = 2AO = 4r, \quad PA = 2AC = 8r, \quad PE = 7r.$$

Alors, se servant de la proportion

$$\frac{v_E}{PE} = \frac{v_A}{PA},$$

on trouve que $v_E = \frac{7}{8} v_A = \frac{7}{4} r \omega_{OA}$.

Il s'ensuit que

$$\omega_1 = \frac{v_E}{OE} = \frac{7}{4} \omega_{OA}.$$

§ 83. **Diagramme des vitesses.** On peut déterminer les vitesses du corps par voie graphique en construisant le diagramme des vitesses. Le graphique sur lequel on porte à partir d'un centre des vecteurs équipollents aux vitesses des différents points du corps est appelé *diagramme des vitesses.*

Admettons que v_A, v_B, v_C soient les vitesses des points A, B, C du corps donné (fig. 189, *a*). On obtient le diagramme des vites-

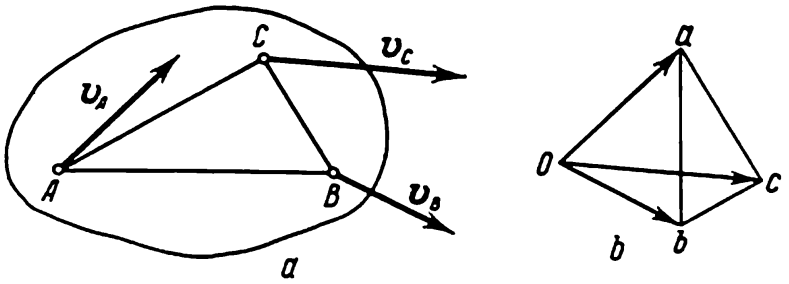


Fig. 189

ses correspondant en menant à partir d'un centre O (fig. 189, *b*) les segments

$$\overline{Oa} = v_A, \ \overline{Ob} = v_B, \ \overline{Oc} = v_C$$

à l'échelle choisie.

Etablissons les propriétés et les règles de construction du diagramme des vitesses. Des formules (50) et (51) (voir § 79) on obtient que

$$v_B = v_A + v_{BA}, \tag{57}$$

où

$$v_{BA} \perp AB \text{ et } v_{BA} = \omega \cdot AB. \tag{57'}$$

Mais le triangle Oab montre que $\overline{Ob} = \overline{Oa} + \overline{ab}$, ou encore $v_B = v_A + \overline{ab}$. En comparant ce résultat à l'égalité (57), on obtient $\overline{ab} = v_{BA}$.

D'une façon analogue, on trouve que $\overline{ac} = v_{CA}$ et ainsi de suite. Et conformément aux formules (57')

$$ab \perp AB, \quad ac \perp AC, \quad \text{etc.} \tag{58}$$

En outre, d'après les mêmes formules on a $ab = \omega \cdot AB$, $ac = \omega \cdot AC$ et ainsi de suite, d'où il découle que

$$\frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC} = \frac{bc}{BC} = \ldots = \omega. \tag{58'}$$

Par conséquent, *les segments qui relient les extrémités des vecteurs vitesse sur le diagramme des vitesses sont perpendiculaires et proportionnels aux segments qui relient les points correspondants du corps*; les figures désignées sur le diagramme des vitesses et dans la sec-

tion S du corps par les mêmes lettres sont semblables et sont tournées de 90° l'une par rapport à l'autre.

Les relations (58) et (58′) permettent de construire le diagramme des vitesses et de déterminer la vitesse de n'importe quel point du corps, quand on connaît le module et la direction de la vitesse d'un point quelconque et la direction de la vitesse d'un autre point de ce corps.

Si on connaît le diagramme des vitesses, la vitesse angulaire du corps est déterminée conformément à la formule (58′).

On construit le diagramme des vitesses d'un mécanisme comme un ensemble de diagrammes des vitesses de ses différents éléments (corps), tous les vecteurs vitesse étant menés à partir d'un centre commun O. Un exemple de construction est donné au problème 74.

Problème 74. Construire le diagramme des vitesses d'un mécanisme (fig. 190,*a*) pour la position représentée au dessin, quand la vitesse v_A de l'extré-

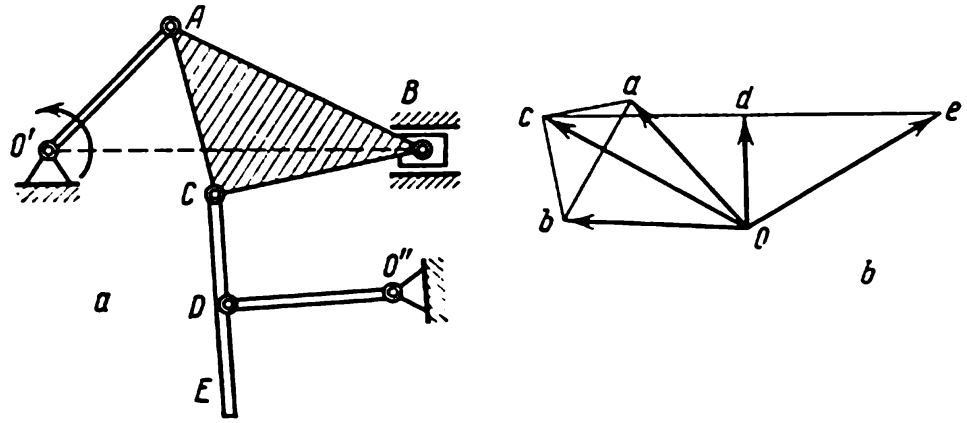


Fig. 190

mité de la manivelle $O'A$ est connue. La bielle ABC a la forme d'une plaque triangulaire rigide. La manivelle $O''D$ est articulée au milieu D de la tige CE ($CD = DE$).

Solution. 1) Après avoir choisi une échelle des longueurs (par exemple, 1 cm pour 0,1 m) on représente le mécanisme dans la position donnée (fig. 190, *a*).

2) Détermination de v_B. On choisit l'échelle des vitesses (par exemple, 1 cm pour 0,5 m/s) et on porte à cette échelle le vecteur $\overline{Oa} = v_A$ à partir d'un centre O. Ce vecteur est perpendiculaire à $O'A$ (fig. 190, *b*). A partir du même centre on trace la droite Ob parallèle à v_B (la vitesse v_B est dirigée suivant BO'), et à partir du point a, la droite $ab \perp AB$, jusqu'à l'intersection avec Ob. Dans ce cas, conformément à (58), le point b sera l'extrémité du vecteur $\overline{Ob} = v_B$.

3) Détermination de v_C. A partir du point a on trace une droite perpendiculaire à AC et à partir du point b, une droite perpendiculaire à BC. L'intersection de ces droites donne, conformément à (58), le point c. Reliant les points O et c on trouve le vecteur $\overline{Oc} = v_C$.

4) Détermination de v_D. On connaît la direction de v_D ($v_D \perp O''D$). Traçant, à partir du centre O, la droite Od parallèle à v_D et à partir du point

c, la perpendiculaire à CD, on trouve le point d situé à leur intersection : joignant les points O et d on obtient le vecteur $\overline{Od} = v_D$.

5) Détermination de v_E. Le point E du mécanisme est situé sur la droite CDE; par conséquent, du fait de la similitude, le point e sur le diagramme des vitesses doit aussi être situé sur la droite cde. De plus, selon (58′), $cd : de = CD : DE$. Et comme $DE = CD$, portant le segment $de = cd$ sur le prolongement de cd on trouve le point e. Joignant les points O et e on obtient le vecteur $\overline{Oe} = v_E$.

Remarque. Les relations (58) ne sont vérifiées que pour un même corps solide. C'est pourquoi, par exemple, le segment be sur le diagramme des vitesses ne sera pas perpendiculaire à BE, car les points B et E du mécanisme appartiennent à des corps différents.

On calcule les vitesses angulaires des bielles ABC et CE à l'instant donné d'après l'égalité (58′) par les formules (pour le calcul de toutes les valeurs il faut tenir compte des échelles) :

$$\omega_{ABC} = \frac{ab}{AB}, \quad \omega_{CE} = \frac{cd}{CD}.$$

§ 84. Détermination des accélérations des points du corps. Démontrons que, dans le mouvement plan, l'accélération de n'importe quel point M du corps (ainsi que la vitesse) est composée des accélérations qu'il reçoit dans le mouvement de translation et dans le mouvement de rotation de ce corps. La position du point M par rapport aux axes Oxy (voir fig. 174) est déterminée par le rayon vecteur $r = r_A + r'$, où $r' = \overline{AM}$. Alors

$$w_M = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r_A}{dt^2} + \frac{d^2r'}{dt^2}.$$

Dans l'égalité obtenue, la valeur $\frac{d^2r_A}{dt^2} = w_A$ est égale à l'accélération du pôle A, tandis que la valeur $\frac{d^2r'}{dt^2} = w_{MA}$ détermine l'accélération que possède le point M durant sa rotation avec le corps autour du pôle A (voir § 79). Par conséquent :

$$w_M = w_A + w_{MA}. \tag{59}$$

D'autre part, l'accélération w_{MA} du point M pendant le mouvement de rotation autour du pôle A sera d'après les formules (46) et (47) (voir § 76) :

$$w_{MA} = MA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad \operatorname{tg}\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}, \tag{60}$$

où ω et ε sont la vitesse angulaire et l'accélération angulaire du corps [1], et μ, l'angle entre la direction w_{MA} et le segment MA.

Ainsi, *l'accélération de n'importe quel point M du corps est la somme géométrique de l'accélération d'un autre point, pris pour pôle,*

[1] Sur le dessin, la flèche circulaire en trait plein montre le sens de ω (sens de rotation), et celle en pointillés, le sens (signe) de ε. Dans le mouvement accéléré les deux flèches sont dirigées dans le même sens, dans le mouvement retardé, dans des sens opposés.

et de l'accélération du point M dans sa rotation avec le corps autour de ce pôle. On trouve le module et la direction de l'accélération w_M par la construction du parallélogramme correspondant (fig. 191).

Cependant, la détermination de la grandeur w_M à l'aide du parallélogramme représenté à la figure 191 complique quelque peu le calcul, car il faudrait préalablement calculer l'angle μ et ensuite

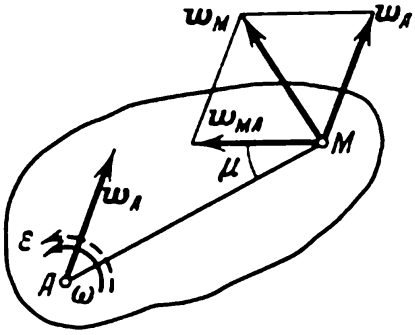


Fig. 191

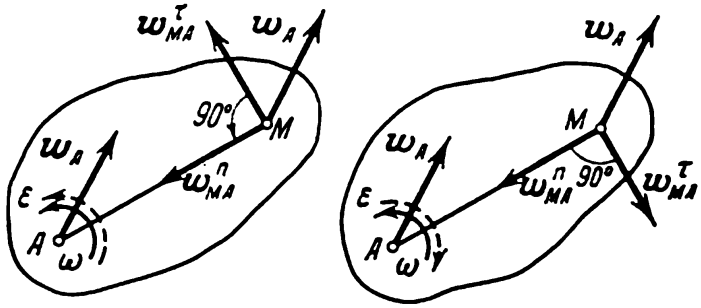


Fig. 192

l'angle entre les vecteurs w_{MA} et w_A. C'est pourquoi il est plus commode, lors de la résolution des problèmes, de décomposer le vecteur w_{MA} en sa composante tangentielle (w^{τ}_{MA}) et sa composante normale (w^{n}_{MA}), où

$$w^{\tau}_{MA} = AM \cdot \varepsilon, \quad w^{n}_{MA} = AM \cdot \omega^2. \tag{61}$$

Le vecteur w^{τ}_{MA} est dirigé perpendiculairement à AM dans le sens de rotation quand la rotation est accélérée et en sens inverse de la rotation quand celle-ci est retardée; le vecteur w^{n}_{MA} est toujours dirigé du point M vers le pôle A (fig. 192).

Alors au lieu de l'égalité (59) on obtient:

$$w_M = w_A + w^{\tau}_{MA} + w^{n}_{MA}. \tag{62}$$

Si le mouvement du pôle A n'est pas rectiligne, son accélération est aussi composée d'une accélération tangentielle et d'une accélération normale; on a alors:

$$w_M = w_{A\tau} + w_{An} + w^{\tau}_{MA} + w^{n}_{MA}, \tag{62'}$$

de plus, les modules de deux derniers termes sont déterminés par les formules (61). Ce sont les formules (61), (62) qu'on utilise dans la résolution des problèmes; on détermine les vecteurs du membre droit de l'égalité, puis on calcule leur somme géométrique ou bien on effectue les constructions graphiques correspondantes.

Résolution des problèmes. On peut trouver l'accélération de chaque point du corps à un instant donné si on connaît: 1) les vecteurs de la vitesse v_A et de l'accélération w_A d'un

point quelconque A du corps à ce moment; 2) la trajectoire d'un autre point quelconque B du corps. Dans certains cas, au lieu de la trajectoire il suffit de connaître la position du centre instantané des vitesses.

Lors de la résolution d'un problème il faut représenter le corps (ou le mécanisme) dans la position pour laquelle on veut déterminer l'accélération de ses points.

On commence par la détermination de la vitesse et de l'accélération du point pris pour pôle. La marche ultérieure des calculs est examinée de façon détaillée dans les problèmes résolus plus bas. On y donne aussi des indications complémentaires nécessaires.

Le problème 77 se résout par la méthode graphique.

Problème 75. Le centre O d'une roue roulant sur un rail rectiligne (fig. 193) possède à un instant donné la vitesse $v_O = 1$ m/s et l'accélération $w_O = 2$ m/s².

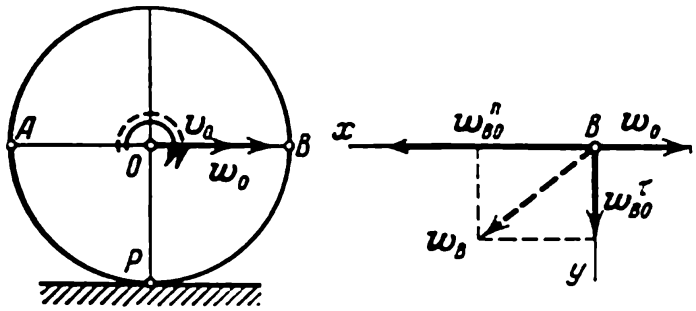


Fig. 193

Le rayon de la roue vaut $R = 0{,}2$ m. Déterminer l'accélération du point B, extrémité du diamètre AB perpendiculaire à OP, et l'accélération du point P coïncidant avec le centre instantané des vitesses.

Solution. 1) Vu que v_O et w_O sont connus, on prend le point O pour pôle.

2) Détermination de ω. Le point de contact P est le centre instantané des vitesses; il s'ensuit que la vitesse angulaire de la roue est donnée par

$$\omega = \frac{v_O}{PO} = \frac{v_O}{R}. \qquad \text{(a)}$$

Le sens de ω est déterminé par celui de v_O et il est montré sur le dessin par une flèche en trait plein.

3) Détermination de ε. Etant donné que dans l'égalité (a) la grandeur $PO = R$ reste constante pour toute position de la roue, en dérivant cette égalité par rapport au temps, on obtient:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dv_O}{dt} \text{ ou } \varepsilon = \frac{w_O}{R}. \qquad \text{(b)}$$

Les signes de ε et de ω coïncidant, la rotation de la roue est donc accélérée.

Il est important de retenir que la *grandeur ε n'est déterminée par l'égalité* (b) *que dans le cas où la distance PO dans la formule* (a) *est constante.*

Remarques. a) Il ne faut pas croire que si d'après les données du problème $v_O = 1$ m/s, la valeur de v_O reste constante. La valeur indiquée de v_O

n'est valable que *pour l'instant donné*; au cours du temps v_O change puisque $w_O \neq 0$.

b) Dans le cas considéré $\frac{dv_O}{dt} = w_O$, car le mouvement du point O est rectiligne. Dans le cas général $\frac{dv_O}{dt} = w_{O\tau}$.

4) Détermination de w_{BO}^{τ} et de w_{BO}^{n}. Comme on a pris le point O pour pôle, selon la formule (62), on a

$$w_B = w_O + w_{BO}^{\tau} + w_{BO}^{n}. \tag{c}$$

Dans notre cas, $BO = R$ et

$$w_{BO}^{\tau} = BO \cdot \varepsilon = w_O = 2 \text{ m/s}^2, \quad w_{BO}^{n} = BO \cdot \omega^2 = \frac{v_O^2}{R} = 5 \text{ m/s}^2. \tag{d}$$

Après avoir représenté à part le point B, on représente (sans tenir compte de l'échelle) les vecteurs dont se compose l'accélération w_B, à savoir: le vecteur w_O (on le transporte du point O), le vecteur w_{BO}^{τ} (dans le sens de rotation car il y a accélération) et le vecteur w_{BO}^{n} (dirigé toujours de B vers le pôle O).

5) Calcul de w_B. Apres avoir tracé les axes Bx et By on trouve que

$$w_{Bx} = w_{BO}^{n} - w_O = 3 \text{ m/s}^2,$$

$$w_{By} = w_{BO}^{\tau} = 2 \text{ m/s}^2,$$

d'où il suit que

$$w_B = \sqrt{w_{Bx}^2 + w_{By}^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}6 \text{ m/s}^2.$$

D'une façon analogue, on trouve facilement l'accélération du point P, $w_P = w_{PO}^{n} = 5$ m/s², elle est dirigée le long de PO. Ainsi l'accélération du point P, dont la vitesse à l'instant donné est égale à zéro, n'est pas nulle.

Problème 76. Le pignon *2* de rayon $r_2 = 0{,}2$ m, monté sur la bielle OA, roule sur le pignon immobile *1* de rayon $r_1 = 0{,}3$ m (fig. 194, *a*). La bielle, qui tourne autour de l'axe O, possède à un moment donné la vitesse angulaire $\omega = 1$ 1/s et l'accélération angulaire $\varepsilon = -4$ 1/s². Déterminer pour cet instant l'accélération du point D situé sur la jante du pignon mobile (le rayon AD est perpendiculaire à la bielle).

Solution: 1) Pour résoudre le problème il faut considérer le mouvement du pignon *2*. Les données du problème permettent de trouver facilement la vitesse v_A et l'accélération w_A du point A de ce pignon, qu'on prend pour pôle.

2) Détermination de v_A et de w_A. Connaissant ω et ε pour la manivelle, on trouve

$$\begin{aligned} v_A &= OA \cdot \omega = 0{,}5 \text{ m/s}; \\ w_{A\tau} &= OA \cdot \varepsilon = -2 \text{ m/s}^2; \\ w_{An} &= OA \cdot \omega^2 = 0{,}5 \text{ m/s}^2. \end{aligned} \tag{a}$$

Vu que les signes de v_A et $w_{A\tau}$ sont contraires, le mouvement du point A à partir de la position donnée est retardé. La direction des vecteurs $w_{A\tau}$ et w_{An} est indiquée sur le dessin.

3) Détermination de ω_2. Le point de contact P est le centre instantané des vitesses pour le pignon *2*; par conséquent, la vitesse angulaire ω_2

du pignon *2* est égale à

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_A}{r_2}\ ;\ \omega_2 = 2{,}5\ 1/\text{s}. \qquad \text{(b)}$$

Le sens de ω_2 (sens de rotation du pignon) est déterminé par le sens de v_A et il est montré par une flèche en trait plein.

4) Détermination de ε_2. De même qu'au problème précédent, la grandeur $AP = r_2$ est constante durant tout le mouvement. C'est pourquoi :

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{1}{r_2}\cdot\frac{dv_A}{dt} = \frac{w_{A\tau}}{r_2}\ ;\ \varepsilon_2 = -10\ 1/\text{s}^2. \qquad \text{(c)}$$

Les signes de ω_2 et de ε_2 étant contraires, la rotation du pignon *2* est retardée.

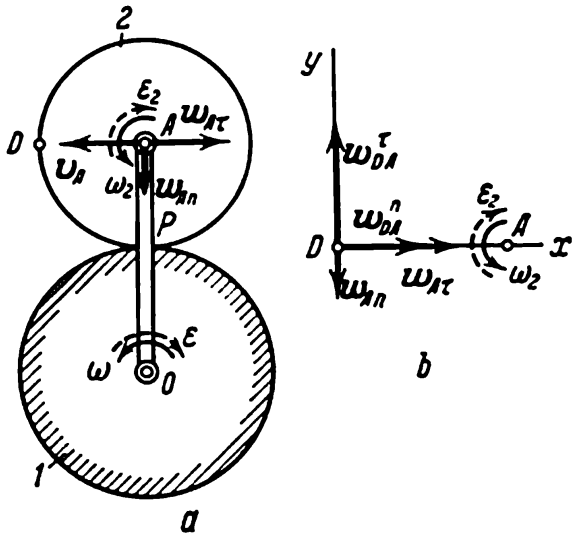


Fig. 194

5) Détermination de w^{τ}_{DA} et de w^{n}_{DA}. L'accélération du point D est fournie par la formule (62′)

$$w_D = w_{A\tau} + w_{An} + w^{\tau}_{DA} + w^{n}_{DA}.$$

Dans notre cas $DA = r_2$ et

$$w^{\tau}_{DA} = DA\cdot\varepsilon_2 = -2\ \text{m/s}^2\ ;\quad w^{n}_{DA} = DA\cdot\omega_2^2 = 1{,}25\ \text{m/s}^2.$$

Représentons sur le dessin (fig. 194 *b*) les vecteurs qui composent l'accélération w_D, à savoir : $w_{A\tau}$, w_{An} (transporté du point A) ; w^{τ}_{DA} (en sens inverse de la rotation car celle-ci est retardée) ; w^{n}_{DA} (de D vers le pôle A).

6) Calcul de w_D. Après avoir tracé les axes Dx et Dy, on trouve que

$$w_{Dx} = |w_{A\tau}| + w^{n}_{DA} = 3{,}25\ \text{m/s}^2\ ;$$

$$w_{Dy} = |w^{\tau}_{DA}| - w_{An} = 1{,}5\ \text{m/s}^2,$$

d'où

$$w_D = \sqrt{w^2_{Dx} + w^2_{Dy}} \approx 3{,}58\ \text{m/s}^2.$$

On peut aussi déterminer la valeur de w_D graphiquement en construisant le polygone vectoriel des vecteurs $w_{A\tau}$, w_{An}, w^{τ}_{DA}, w^{n}_{DA} à l'échelle choisie.

Problème 77. La bielle AB, reliée au culbuteur BC, est fixée à la manivelle OA qui tourne uniformément autour de l'axe O avec la vitesse angulaire $\omega_{OA} = 4$ 1/s (fig. 195). On donne les dimensions suivantes: $OA = r = 0{,}5$ m, $AB = 2r$, $BC = r\sqrt{2}$. Dans la position montrée sur le dessin, $\angle OAB = 90°$

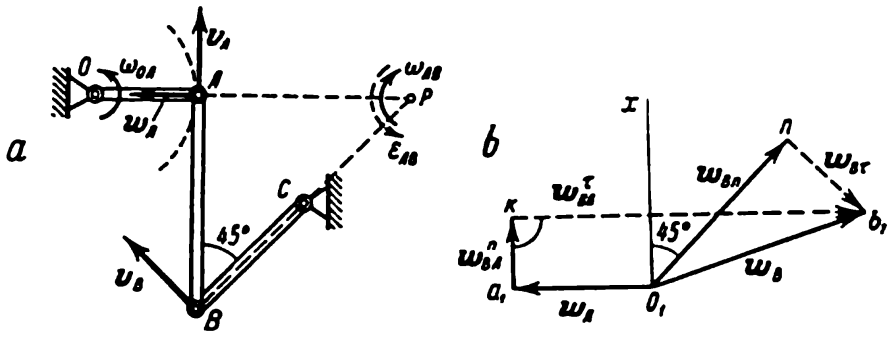


Fig. 195

et $\angle ABC = 45°$. Déterminer l'accélération du point B de la bielle dans cette position, ainsi que la vitesse angulaire et l'accélération angulaire du culbuteur BC.

Solution. Le problème peut être résolu par voie graphique ou analytiquement.

A. Solution graphique. 1) On choisit le point A comme pôle pour le mouvement de la bielle. Etant donné que $\omega_{OA} =$ const., pour ce point on a:

$$v_A = r\omega_{OA} = 2 \text{ m/s}; \quad w_A = w_{An} = r\varphi^2_{OA} = 8 \text{ m/s}^2. \tag{a}$$

Représentons graphiquement les vecteurs v_A et w_A.

2) Détermination de ω_{AB}. On connaît la trajectoire du point B de la bielle (une circonférence de rayon BC). Connaissant la direction de v_B ($v_B \perp BC$), on construit le centre instantané des vitesses P de la bielle AB. Il est facile de voir que $AP = AB = 2r$.

Alors,

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} \text{ ou } \omega_{AB} = \frac{\omega_{OA}}{2} = 2 \text{ 1/s}. \tag{b}$$

Le sens de la rotation est indiqué sur le dessin.

Dans ce cas, au cours du mouvement du mécanisme, la distance AP ne reste pas constante et on ne peut pas se servir du procédé utilisé dans les deux problèmes précédents pour déterminer ε_{AB}. C'est pourquoi, pour ce problème, il est plus commode d'utiliser le procédé graphique de résolution. A cette fin, cherchons préalablement les grandeurs w^n_{BA} et w_{Bn}.

3) Détermination de w^n_{BA}. Connaissant ω_{AB}, on trouve par la formule (61)

$$w^n_{BA} = AB \cdot \omega^2_{AB} = 4 \text{ m/s}^2. \tag{c}$$

4) Détermination de w_{Bn}. Connaissant la trajectoire du point B, on peut déterminer l'accélération normale w_{Bn} de ce point. Pour cela, déterminons préalablement la vitesse v_B, à l'aide du théorème sur les projections (ou à l'aide du centre instantané P). On obtient $v_B \cos 45° = v_A$, d'où $v_B = v_A\sqrt{2}$.

Alors

$$w_{Bn}=\frac{v_B^2}{BC}=\frac{2v_A^2}{r\sqrt{2}}=8\sqrt{2}\ \text{m/s}^2. \qquad \text{(d)}$$

Remarques. Si on a construit pour le mécanisme étudié le diagramme des vitesses:

a) on peut trouver la valeur ω_{AB} d'après la formule (58): $\omega_{AB}=\frac{ab}{AB}$. Alors les calculs faits aux points *2* et *3* deviennent superflus, car on a directement w_{BA}^n par l'égalité

$$w_{BA}^n=AB\cdot\omega_{AB}^2=\frac{(ab)^2}{AB};$$

b) lors de la détermination de w_{Bn}, la valeur de v_B peut être déduite du diagramme des vitesses.

5) Détermination de w_B. Remarquons qu'on a $w_B=w_{B\tau}+w_{Bn}$. D'autre part, la valeur de w_B est déterminée par la formule (62). Il 'ensuit que

$$w_A+w_{BA}^n+w_{BA}^\tau=w_{Bn}+w_{B\tau}. \qquad \text{(e)}$$

Représentons cette égalité graphiquement. Traçons le vecteur $\overline{O_1a_1}=w_A$ à partir d'un centre arbitraire O_1 à une échelle convenable; ensuite, traçons le vecteur $\overline{a_1k}=w_{BA}^n$ ($w_{BA}^n\uparrow\uparrow\overline{BA}$) à partir du point a_1 et menons la droite kb_1, perpendiculaire à a_1k, par point k. Cette droite donne la direction de w_{BA}^τ et l'extrémité du vecteur cherché w_B doit être située quelque part sur ce support.

On mène enfin le vecteur $\overline{O_1n}=w_{Bn}$ ($w_{Bn}\uparrow\uparrow\overline{BC}$) à partir du point O_1 et on trace la droite nb_1 perpendiculaire à ce vecteur. Cette droite indique la direction de $w_{B\tau}$. L'extrémité du vecteur w_B doit être aussi située sur cette droite. Il en résulte que c'est le point b_1 d'intersection des droites kb_1 et nb_1 qui donne l'extrémité du vecteur w_B[1]. Ainsi, $w_B=\overline{O_1b_1}$. Après avoir mesuré la longueur O_1b_1, compte tenu de l'échelle, on trouve dans notre cas que $w_B\approx 13$ m/s².

En même temps, il découle de la construction que $\overline{kb_1}=w_{BA}^\tau$ et $\overline{nb_1}=w_{B\tau}$.

Construisant de telle manière (à partir du même centre O) les accélérations d'autres points du mécanisme, on obtient un graphique qu'on appelle *diagramme des accélérations*.

6) Détermination de ε_{AB}. Après avoir mesuré la longueur kb_1, on trouve à l'aide de la formule (61)

$$|\varepsilon_{AB}|=\frac{|w_{BA}^\tau|}{AB}=\frac{kb_1}{AB}.$$

Le calcul, compte tenu de l'échelle, donne: $|\varepsilon_{AB}|=20$ 1/s. On voit sur le dessin que le vecteur $v_{BA}=v_B-v_A$ est dirigé dans le sens opposé à w_{BA}^τ; par conséquent, la rotation de la tige AB est retardée et $\varepsilon_{AB}=-20$ 1/s².

B. Détermination analytique de w_B. Après avoir fait tous les calculs, effectués aux points 1-4, on construit de la même façon que pour la résolution graphique les polygones vectoriels qui expriment l'égalité (e). Puis, on trace l'axe de coordonnées O_1x perpendiculairement au vecteur inconnu

[1] Si on avait connu d'avance la direction de w_B, on aurait pu trouver immédiatement $w_B=\overline{O_1b_1}$ par intersection de kb_1 et de la droite $O_1b_1\parallel w_B$.

w^{τ}_{BA} et on projette les deux membres de l'égalité vectorielle (e) sur cet axe. Dans ce cas on obtient:

$$w^{n}_{BA} = w_{Bn} \cos 45° - |w_{B\tau}| \cos 45°.$$

De là on trouve que

$$|w_{B\tau}| = w_{Bn} - w^{n}_{BA} \sqrt{2} = 8\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

On aura alors en définitive:

$$w_B = \sqrt{w^2_{B\tau} + w^2_{Bn}} = 4\sqrt{10} = 12{,}65 \text{ m/s}^2.$$

S'il est nécessaire de déterminer ε_{AB} par un calcul numérique, on trouve en projetant les deux membres de l'égalité (e) sur l'axe O_1n perpendiculaire à $w_{B\tau}$ que

$$-w_A \cos 45° + w^{n}_{BA} \cos 45° + |w^{\tau}_{BA}| \cos 45° = w_{Bn}.$$

Ce qui nous donne

$$|w^{\tau}_{BA}| = w_A - w^{n}_{BA} + w_{Bn}\sqrt{2} = 20 \text{ m/s}^2.$$

Alors

$$|\varepsilon_{BA}| = \frac{|w^{\tau}_{BA}|}{AB} = 20 \text{ 1/s}^2.$$

Ayant déterminé les valeurs v_B et $w_{B\tau}$ par voie graphique ou analytiquement, on obtient la vitesse angulaire et l'accélération angulaire du culbuteur BC à l'aide des égalités:

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{BC}, \quad |\varepsilon_{BC}| = \frac{|w_{B\tau}|}{BC}.$$

Le calcul donne: $\omega_{BC} = 4$ 1/s, $\varepsilon_{BC} = -8$ 1/s (avec le signe moins parce que le sens de $w_{B\tau}$ est opposé à v_B).

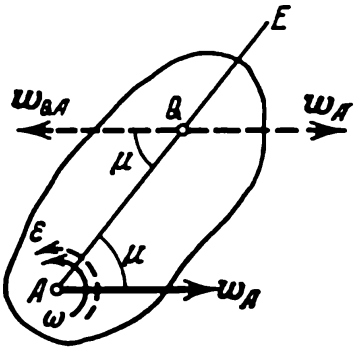


Fig. 196

§ 85. Centre instantané des accélérations. Si un corps solide est animé dans sa section S d'un mouvement autre que translation, il existe à chaque instant un point Q dont l'accélération est nulle. On appelle ce point *centre instantané des accélérations.*

Si on connaît l'accélération w_A d'un point A du corps et les grandeurs ω et ε, la position du centre Q est déterminée de la façon suivante:

1) On calcule la valeur de l'angle μ d'après la formule $\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$.

2) On mène par le point A sous l'angle μ par rapport au vecteur w_A la droite AE (fig. 196) de telle sorte qu'elle soit en avance sur w_A *quand le mouvement est accéléré et en retard quand le mouvement est retardé.*

3) On porte sur AE le segment AQ égal à

$$AQ = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \tag{63}$$

Le point Q, construit de cette manière, sera le centre instantané des accélérations. En effet, conformément aux formules (59) et (60)

$$w_Q = w_A + w_{QA},$$

où $w_{QA} = QA\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. En substituant ici la valeur de QA déduite de l'égalité (63), on trouve que $w_{QA} = w_A$. D'autre part, le vecteur w_{QA} doit former un angle μ avec la ligne QA ; par conséquent, le vecteur w_{QA} est parallèle à w_A, mais il est dirigé dans le sens opposé. C'est pourquoi $w_{QA} = -w_A$ et $w_Q = 0$.

Si on prend le point Q pour pôle, l'accélération de n'importe quel point M du corps, étant donné que $w_Q = 0$, est, selon les formules (59) et (60), égale à

$$w_M = w_Q + w_{MQ} = w_{MQ}\,; \quad w_M = QM\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{64}$$

Il en découle que l'*accélération de tout point du corps est égale à son accélération dans le mouvement de rotation autour du centre instantané des accélérations Q*. De plus, par la formule (64) on a :

$$\frac{w_M}{QM} = \frac{w_A}{QA} = \ldots \text{ et ainsi de suite,} \tag{65}$$

c'est-à-dire que les *accélérations des points du corps sont proportionnelles à leurs distances au centre instantané des accélérations*. La distribution des accélérations

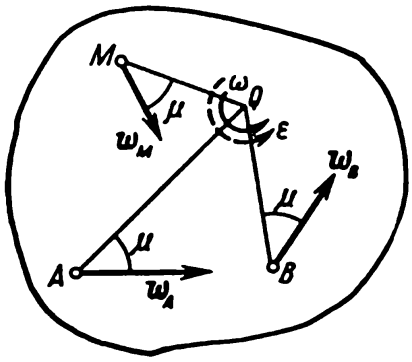


Fig. 197

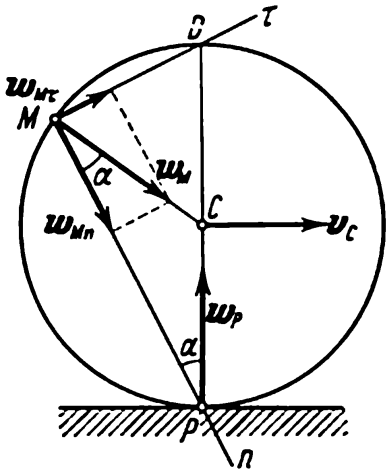


Fig. 198

est montrée sur la figure 197. Notons que le centre instantané des vitesses P ne coïncide obligatoirement pas à tout instant avec le centre instantané des accélérations. Par exemple, si une roue roule sur un rail rectiligne (voir fig. 198) et que la vitesse de son centre C soit constante (v_C = const.), le centre instantané des vitesses est situé au point P ($v_P = 0$), mais en même temps, comme on l'a montré au problème 75, $w_P \neq 0$; par conséquent, le point P n'est pas le centre instantané des accélérations. Dans ce cas le centre instantané des accélérations se trouve évidemment au point C puisqu'il est animé d'un mouvement uniforme et rectiligne et que $w_C = 0$. Les centres des vitesses et des accélérations coïncident dans le cas où le corps tourne autour d'un axe immobile.

La notion de centre instantané des accélérations est fort utile pour la résolution de certains problèmes.

Problème 78. Une roue roule sur un rail rectiligne de façon que la vitesse v_C de son centre C soit constante. Déterminer l'accélération du point M de la jante de la roue (fig. 198).

S o l u t i o n. Vu que $v_C = \text{const.}$, le point C, comme il a été indiqué plus haut, est le centre instantané des accélérations. Le centre instantané des vitesses se trouve au point P. Il s'ensuit que pour la roue

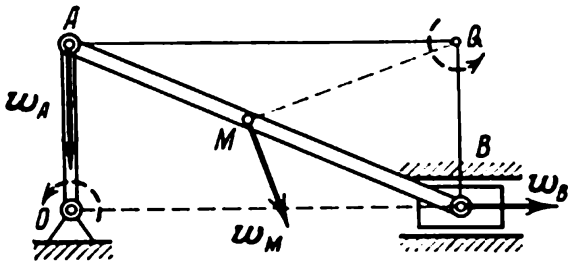
$$\omega = \frac{v_C}{PC} = \frac{v_C}{R} = \text{const.}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 0, \quad \mu = 0.$$

Il résulte de la formule (64) que:

$$w_M = CM\omega^2 = \frac{v_C^2}{R}.$$

Ainsi, l'accélération de n'importe quel point de la jante (le point P compris) est égale à v_C^2/R et elle est dirigée vers le centre C de la roue, puisque l'angle



F i g. 199

$\mu = 0$. Remarquons que pour le point M, cette accélération ne sera pas l'accélération normale. En effet, la vitesse du point M est perpendiculaire à PM (voir le problème 69). Il s'ensuit que la tangente $M\tau$ à la trajectoire du point M est dirigée suivant MD, tandis que la normale principale Mn est dirigée suivant MP. C'est pourquoi $w_{Mn} = w_M \cos\alpha$, $w_{M\tau} = w_M \sin\alpha$.

Problème 79. La manivelle OA tourne à vitesse angulaire constante ω_{OA} (fig. 199). Trouver l'accélération du coulisseau B et l'accélération angulaire de la bielle AB au moment où $\angle BOA = 90°$, si $OA = r$, $AB = l$.

S o l u t i o n. A l'instant considéré les vitesses de tous les points de la bielle AB sont égales à v_A (voir le problème 71, fig. 186, *b*), le centre instantané des vitesses est situé à l'infini et $\omega_{AB} = 0$. Alors $\operatorname{tg}\mu = \frac{\varepsilon_{AB}}{\omega_{AB}^2} = \infty$ et $\mu = 90°$ ($\varepsilon_{AB} \neq 0$, car dans le cas contraire les accélérations de tous les points de la bielle AB auraient dû, selon la formule (64), s'annuler, alors que $w_A \neq 0$).

L'accélération du point A est égale à $w_A = w_{An} = r\omega_{OA}^2$ et elle est dirigée le long de AO. Vu que le point B est animé d'un mouvement rectiligne, son accélération est dirigée le long de OB. On voit sur la figure 197 que l'accélération de tout point M du corps est dirigée sous l'angle μ par rapport à QM. Dans le cas donné $\mu = 90°$; par conséquent, les droites QA et QB doivent être perpendiculaires à w_A et w_B. En menant ces perpendiculaires, on trouve la position du point Q. Ecrivons maintenant la proportion (65)

$$\frac{w_B}{QB} = \frac{w_A}{QA},$$

où $QB = r$, $QA = \sqrt{l^2 - r^2}$; on obtient:

$$w_B = \frac{r^2}{\sqrt{l^2 - r^2}} \omega_{OA}^2.$$

L'accélération w_M de tout point M de la bielle AB est perpendiculaire à QM ($\mu = 90°$); on trouve le module w_M à l'aide de la proportion (65).

L'accélération angulaire ε_{AB} de la bielle sera déterminée à partir de l'égalité $w_A = QA \cdot \varepsilon_{AB}$ qu'on obtient par la formule (64) pour $\omega_{AB} = 0$. Il s'ensuit que

$$\varepsilon_{AB} = \frac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}} \omega_{OA}^2.$$

Chapitre XIII

MOUVEMENT DU CORPS SOLIDE AYANT UN POINT FIXE ET MOUVEMENT DU CORPS SOLIDE LIBRE

§ 86. Mouvement du corps solide ayant un point fixe. Examinons le mouvement du corps solide dont l'un des points O reste fixe durant tout le mouvement. Un tel mouvement est décrit, par exemple, par une toupie, dont le point d'appui est immobile, ou par tout autre corps fixé à un point O par une rotule. La position du corps, ayant un point fixe O, est déterminée par la position de deux autres points quelconques A et B non situés sur la droite portant le point O, car en fixant les points A et B, le corps ne pourrait que tourner autour de l'axe AB, ce qui serait impossible si le point O, non situé sur AB, est immobile.

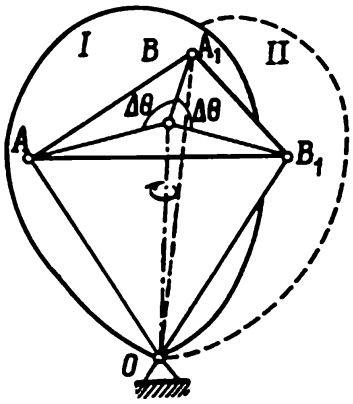


Fig. 200

Afin de se faire une idée du mouvement du corps, démontrons tout d'abord le *théorème d'Euler-d'Alembert*: *tout déplacement d'un corps solide possédant un point fixe O ne peut se réaliser que par une rotation de ce corps autour d'un certain axe passant par le point O.*

Admettons qu'à l'instant t_1 le corps occupe la position I dans l'espace et qu'à l'instant t_2 il se trouve dans la position II, montrée sur le dessin en pointillé (fig. 200). On choisira de la façon suivante les points A et B du corps à l'aide desquels on détermine sa position dans l'espace: le point A est pris arbitrairement, quant au point B, on choisit le point qui, à l'instant t_1, occupe la position que le point A occupera à l'instant t_2.

Après déplacement du corps en position II, le point A vient en A_1, position occupée par le point B à l'instant t_1, tandis que le point B de son côté passe à une nouvelle position B_1. Pour démontrer le théorème, on mène un plan par les points A, A_1 et B_1 et on abaisse sur ce plan la perpendiculaire OD à partir du point O. Il faut remarquer que $OA = OA_1 = OB_1$, car le corps est un solide parfait; pour la même raison $AB = A_1B_1$. Mais alors $AD = A_1D = B_1D$, comme projections d'obliques égales sur le même plan.

Il s'ensuit que $\triangle ADA_1 = \triangle A_1DB_1$, d'où $\angle ADA_1 = \angle A_1DB_1 = \Delta\theta$. Si maintenant on fait tourner le corps autour de l'axe OD de l'angle $\Delta\theta$, le triangle ADA_1 tout en se déplaçant

dans son plan vient en coïncidence avec le triangle A_1DB_1 et en même temps le point A passe à la position A_1 et le point B à la position B_1. Ainsi, le corps sera en effet transporté de la position I à la position II, au moyen de la seule rotation d'angle $\Delta\theta$ autour de l'axe OD.

Le théorème démontré affirme seulement que le déplacement du corps de la position I à la position II *peut être réalisé* par rotation autour de l'axe OD, mais il n'en découle pas que le mouvement du corps durant l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$ était

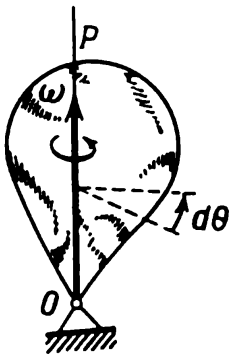


Fig. 201

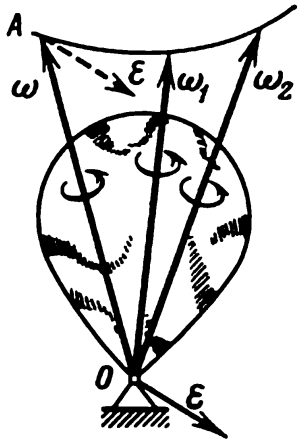


Fig. 202

en réalité une telle rotation. En fait, le corps pourrait passer de la position I à la position II d'une tout autre façon. Cependant, plus l'intervalle de temps Δt est bref, c'est-à-dire plus les positions I et II sont rapprochées l'une de l'autre, plus le mouvement de rotation d'angle $\Delta\theta$ autour de l'axe OD s'approchera du déplacement réel du corps.

Si on fait tendre l'intervalle de temps Δt vers zéro, la direction de l'axe OD approchera d'une position limite OP. L'axe OP, représentant la position limite de l'axe OD quand l'intervalle de temps Δt tend vers zéro, est appelé axe *instantané de rotation du corps*. Par une rotation d'angle élémentaire $d\theta$ autour de cet axe, le corps se déplace de la position donnée à une position voisine infiniment proche (fig. 201). La vitesse angulaire

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

avec laquelle cette rotation est réalisée représente la *vitesse angulaire du corps à l'instant donné t*. On peut représenter cette vitesse par un vecteur $\boldsymbol{\omega}$ aligné sur l'axe OP (voir § 74).

L'axe instantané de rotation se distingue de l'axe immobile par le fait que sa direction dans l'espace de même que dans le corps

change constamment. Par conséquent, on peut se représenter le mouvement du corps solide autour d'un point fixe comme une série de rotations élémentaires de vitesse angulaire ω autour d'axes instantanés de rotation successifs passant par le point fixe (fig. 202).

Les positions successives de l'axe instantané de rotation engendrent une surface conique, tandis que l'extrémité A du vecteur ω décrit une courbe sur cette surface.

L'*accélération angulaire* ε du corps, qui dans le cas donné détermine le changement de la vitesse angulaire ω en module et en direction, sera égale à

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Par analogie avec la formule (13) (voir § 64) on conclut que le vecteur ε est dirigé parallèlement à la tangente à la trajectoire de l'extrémité du vecteur ω au point A (voir fig. 202).

Il s'ensuit que dans ce cas, contrairement au cas d'une rotation autour d'un axe immobile, la direction du vecteur ε ne coïncide pas avec celle du vecteur ω.

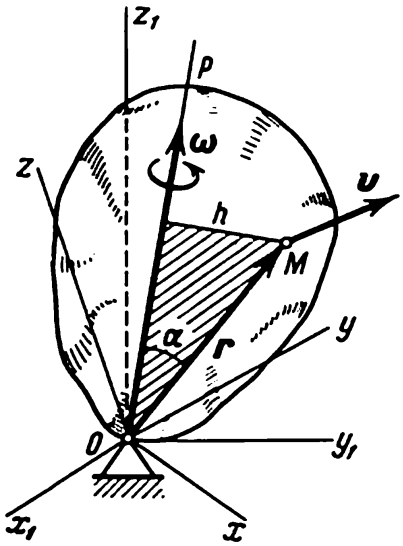


Fig. 203

§ 87. Vitesses et accélérations des points du corps. Etant donné qu'à tout instant, dans le mouvement autour de son point fixe, le corps possède un axe instantané de rotation OP, le module de la vitesse d'un de ses points M (fig. 203) sera à cet instant déterminé par l'égalité

$$v = \omega h, \qquad (66)$$

où ω est la vitesse angulaire du corps et h, la distance du point M à l'axe instantané de rotation. Le vecteur vitesse v est perpendiculaire au plan MOP qui passe par l'axe instantané de rotation et par le point M, et dirigé dans le sens de rotation du corps.

Parfois, il n'est pas commode d'utiliser la formule (66) pour déterminer v, parce que (contrairement au § 76) la grandeur h, qui y intervient, change avec le temps.

Pour la même raison, la formule (66) ne permet pas d'obtenir l'expression pour l'accélération du point M, comme cela fut fait au paragraphe 76 quand h était constant.

Cherchons donc une autre formule qui permette de déterminer directement le vecteur vitesse v du point M.

Si on examine le produit vectoriel $\omega \times r$, où r est le rayon-vecteur joignant le point fixe O au point M, on trouvera qu'en module

$$|\omega \times r| = \omega r \sin \alpha = \omega h.$$

En ce qui concerne l'orientation (on a déjà parlé du support et du sens du produit vectoriel au § 41) et les dimensions des vecteurs $\omega \times r$ et v, comme on le voit facilement, elles coïncident.

Il en résulte que

$$v = \omega \times r, \tag{67}$$

c'est-à-dire que le *vecteur vitesse de n'importe quel point M du corps est égal au produit vectoriel de la vitesse angulaire du corps par le rayon-vecteur de ce point.*

En utilisant la formule (67) on trouve l'accélération du point M:

$$w = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dt} \times r\right) + \left(\omega \times \frac{dr}{dt}\right).$$

Etant donné que $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$, et que $\frac{dr}{dt} = v$, on trouve finalement

$$w = (\varepsilon \times r) + (\omega \times v). \tag{68}$$

L'accélération $w_1 = \varepsilon \times r$ est appelée *accélération de rotation*, tandis que l'accélération $w_2 = \omega \times v$ est appelée *accélération axipète* du point M. Le

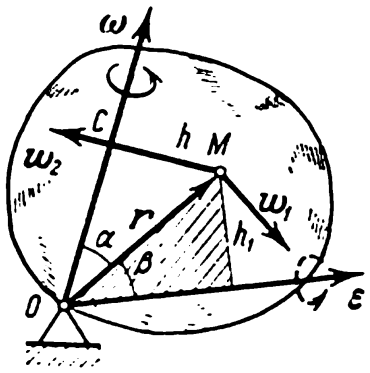


Fig. 204

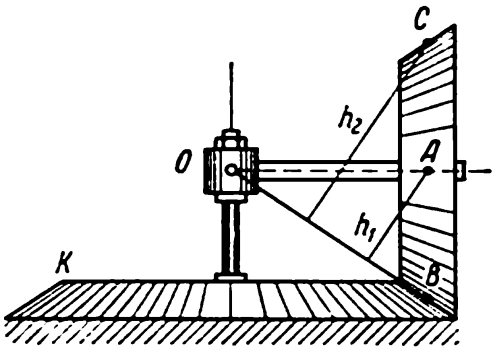


Fig. 205

vecteur w_1 est perpendiculaire au plan passant par le point M et par le vecteur ε (fig. 204) et vaut en module $w_1 = \varepsilon r \sin \beta = \varepsilon h_1$, où h_1 est la distance du point M au vecteur ε. Quant au vecteur w_2, perpendiculaire à la fois à v et à ω, il sera dirigé le long de MC (voir les fig. 203 et 204) et vaudra en module $w_2 = \omega v \sin 90° = \omega^2 h$, puisque $v = \omega h$.

Problème 80. Trouver les vitesses des points B et C de la roue conique (fig. 205), quand la vitesse v_A du mouvement de son centre A est connue. La roue se déplace sans glissement sur la surface conique immobile K.

Solution. La roue se meut autour du point fixe O. Les points situés sur la droite OB doivent posséder les mêmes vitesses que les points de la surface K, puisque la roue roule sur elle sans glisser; par conséquent, les vitesses de ces

points sont égales à zéro et la droite OB est l'axe instantané de rotation de la roue. Alors, $v_A = \omega h_1$, où ω est la vitesse angulaire de la roue dans sa rotation autour de l'axe OB et où h_1 est la distance du point A à cet axe. Il en découle que $\omega = v_A/h_1$.

La vitesse v_C du point C sera égale à ωh_2, où h_2 est la distance du point C à l'axe OB. Vu que dans le cas donné $h_2 = 2h_1$, $v_C = 2v_A$, pour le point B, situé sur l'axe instantané de rotation, $v_B = 0$.

§ 88. Cas général du mouvement d'un corps solide libre. Examinons le cas le plus général du mouvement d'un corps solide, quand il n'est pas gêné et se déplace librement dans l'espace. Dans ce cas, la position du corps par rapport au système de référence

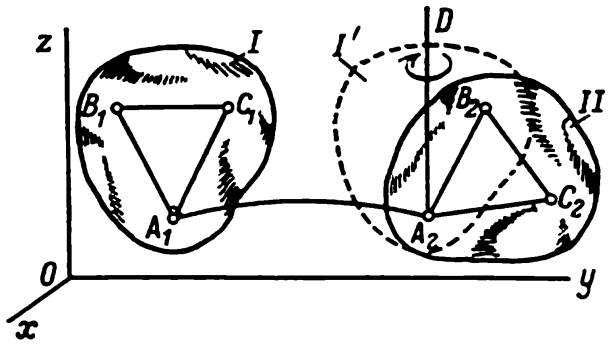


Fig. 206

$Oxyz$ est évidemment déterminée par la position de trois quelconques de ses points A, B et C qui ne sont pas situés sur une même droite. Admettons qu'à l'instant t_1 le corps se trouve dans la position I et à l'instant t_2 il arrive dans la position II (fig. 206). Alors, le déplacement du corps durant l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$ peut s'effectuer de la manière suivante. On déplace d'abord le corps par translation de façon qu'un point A_1 du corps (pôle) choisi arbitrairement vienne dans une nouvelle position A_2; le corps tout entier occupera alors la position I'. Maintenant, pour amener le corps dans la position II, il faut le faire tourner autour du pôle A_2 considéré comme un point fixe, ce qui est réalisable (selon le théorème démontré au § 86) au moyen d'une seule rotation du corps autour de l'axe A_2D. Ainsi, le déplacement du corps depuis la position I jusqu'à la position II est réalisé par un mouvement de translation de l'ensemble du corps et un mouvement de rotation autour de l'axe AD, qui passe par le pôle A. Cependant, pour un intervalle de temps arbitraire Δt ce déplacement ne représente pas le mouvement réel du corps. On obtient le mouvement vrai en divisant l'intervalle de temps, pendant lequel s'effectue le mouvement, en intervalles élémentaires, pour lesquels l'axe AD occupe la position limite qui correspond à celle de l'axe instantané de rotation.

On arrive ainsi à la conclusion que le *mouvement du corps solide libre se compose dans le cas général d'un mouvement de translation pendant lequel tous les points du corps se déplacent comme un pôle A arbitraire avec la vitesse* v_A *et d'une suite de rotations élémentaires à vitesse angulaire* ω *autour des axes instantanés de rotation passant par le pôle A* (fig. 207). Tel est, par exemple, le mouvement de tout corps qui effectue dans l'air un mouvement autre que translation (une pierre lancée, un avion faisant de l'acrobatie aérienne, un obus, etc.). Un cas particulier du mouvement du corps libre est

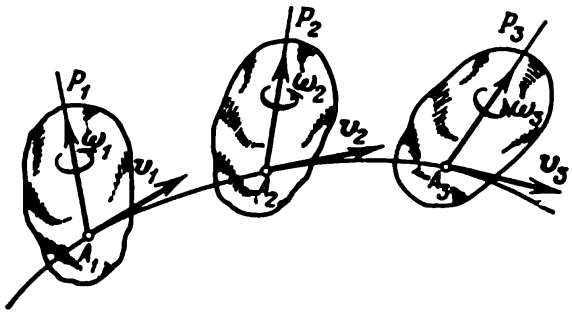


Fig. 207

un mouvement plan (chapitre XII); le vecteur ω est alors toujours perpendiculaire au plan du mouvement. Il faut remarquer que dans le cas général, de même qu'en mouvement plan, le mouvement de rotation (ainsi que la valeur de ω) ne dépend pas du choix du pôle.

Dans le cas général examiné, de même qu'en mouvement plan (voir § 79, fig. 175), la vitesse v_M de n'importe quel point M du corps se compose de la vitesse v_A du pôle A et de la vitesse v_{MA}, avec laquelle se déplace le point M pendant le mouvement du corps autour du pôle A, c'est-à-dire

$$v_M = v_A + v_{MA}. \tag{69}$$

La justesse de cette conclusion est démontrée de la façon déjà indiquée au § 79. Conformément à la formule (67) on a $v_{MA} = \omega \times \overline{AM}$.

De façon analogue, on trouve pour l'accélération de n'importe quel point M du corps (voir § 84)

$$w_M = w_A + w_{MA}. \tag{70}$$

La grandeur w_{MA} est déterminée par l'égalité (68), où il faut prendre $r = \overline{AM}$ et $v = v_{MA} = \omega \times \overline{AM}$.

Chapitre XIV

MOUVEMENT COMPOSÉ DU POINT

§ 89. Mouvements relatif, d'entraînement et absolu. Jusqu'ici on étudiait le mouvement du point ou du corps par rapport à un seul système de référence. Cependant il y a des cas où il est rationnel (parfois même nécessaire) d'examiner le mouvement du point (ou du corps) simultanément par rapport à deux systèmes de référence, dont l'un est considéré conventionnellement comme fixe, tandis que l'autre se déplace de façon déterminée par rapport au premier. Le mouvement résultant du point (ou du corps) est alors appelé mouvement composé.

Par exemple, une sphère roulant sur le pont d'un bateau en mouvement effectue un mouvement composé par rapport à la côte, étant animée d'un mouvement de roulement par rapport au pont (système de référence mobile) et entraînée avec le pont par rapport à la côte (système de référence fixe). Ainsi, le mouvement composé de la sphère se décompose en deux mouvements plus simples et d'étude plus facile. La possibilité de décomposition du mouvement du point ou du corps en mouvements plus simples grâce à l'introduction d'un système de référence supplémentaire (système mobile) est largement utilisée dans les calculs cinématiques. C'est là l'importance pratique de la théorie du mouvement composé dont les résultats sont d'ailleurs utilisés en dynamique pour l'étude de l'équilibre relatif et du mouvement des corps soumis à des forces.

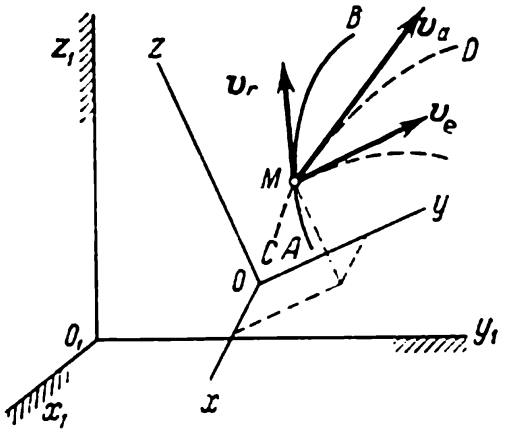


Fig. 208

Examinons le mouvement composé du point M, se déplaçant par rapport au système de référence mobile $Oxyz$, qui se meut à son tour d'une manière arbitraire par rapport à un autre système de référence $O_1x_1y_1z_1$ considéré comme fixe (fig. 208). Il est bien entendu que chacun de ces systèmes de référence est lié à un corps déterminé qui n'est pas montré sur le dessin. Introduisons les définitions suivantes :

1. Le mouvement du point M par rapport aux axes de coordonnées mobiles est appelé *mouvement relatif* (un tel mouvement peut

être constaté par l'observateur lié au système mobile $Oxyz$ et se déplaçant avec lui). La trajectoire AB, décrite par le point en mouvement relatif, est appelée *trajectoire relative*.

La vitesse du mouvement le long de la courbe AB est appelée *vitesse relative* (désignée par v_r). La grandeur caractérisant les changements de la vitesse relative v_r pendant le mouvement du point le long de la trajectoire AB, c'est-à-dire au cours de son mouvement relatif seulement, est appelée *accélération relative* (désignée par w_r).

2. Le mouvement du système mobile $Oxyz$ avec tous les points de l'espace qui lui sont invariablement liés par rapport au système fixe $O_1x_1y_1z_1$ est un *mouvement d'entraînement* pour le point M.

La vitesse du point lié invariablement aux axes mobiles $Oxyz$ et avec lequel coïncide le point M à un instant donné est appelée *vitesse d'entraînement* du point M à cet instant (désignée par v_e) ; quant à l'accélération de ce point, elle est appelée *accélération d'entraînement* du point M (désignée par w_e). Autrement dit, si on se représente le mouvement relatif du point M comme se réalisant à la surface (ou à l'intérieur) d'un corps solide lié invariablement aux axes mobiles $Oxyz$, la vitesse (ou l'accélération) d'entraînement du point M à un instant donné sera représentée par la vitesse (ou par l'accélération) du point du corps qui à cet instant coïncide avec le point M.

Il est évident que l'accélération d'entraînement ne caractérise que les changements de la vitesse d'entraînement v_e, qui ont lieu pendant le mouvement d'entraînement du système de référence mobile.

3. Le mouvement du point par rapport au système de référence $O_1x_1y_1z_1$ fixe est appelé *mouvement absolu* ou *composé*. La trajectoire CD de ce mouvement est appelée *trajectoire absolue*. La vitesse, *vitesse absolue* (désignée par v_a) et l'accélération, *accélération absolue* (désignée par w_a).

Dans l'exemple cité plus haut, le mouvement de la sphère par rapport au pont du bateau est relatif, et la vitesse de mouvement est la vitesse relative de la sphère ; le mouvement du bateau par rapport à la côte est un mouvement d'entraînement pour la sphère, et la vitesse du point du pont qui à l'instant donné est en contact avec la sphère est à cet instant sa vitesse d'entraînement ; enfin, le mouvement de la sphère par rapport à la côte est son mouvement absolu, et la vitesse de ce mouvement, la vitesse absolue de la sphère.

Pour résoudre les problèmes de cinématique qui se posent dans ce cadre, il est nécessaire d'établir les relations entre les vitesses et les accélérations des mouvements relatif, d'entraînement et absolu.

§ 90. Composition des vitesses. Considérons un point M soumis à un mouvement composé. Se mouvant le long de sa trajectoire

relative AB, ce point effectue durant l'intervalle de temps $\Delta t = t_1 - t$ un déplacement relatif, défini par le vecteur $\overline{MM'}$ (fig. 209, *a*). Au cours de ce laps de temps, la trajectoire AB, se mouvant avec les axes mobiles, se déplacera dans une nouvelle position A_1B_1 et le point de la courbe AB, qui coïncide à l'instant t avec le point M, effectuera un déplacement d'entraînement $\overline{MM''}$.

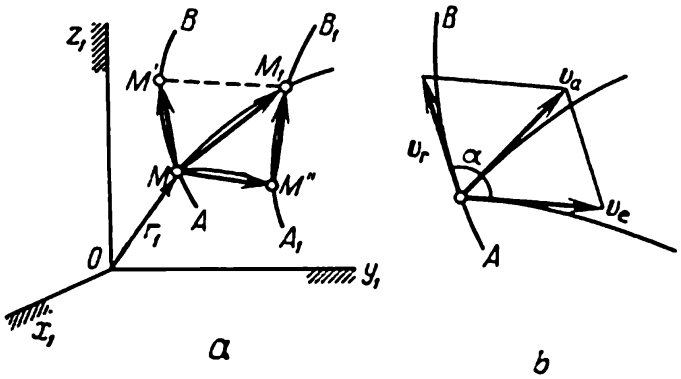


Fig. 209

Les déplacements décrits amèneront le point M à la position M_1, son déplacement absolu durant le temps Δt sera $\overline{MM_1}$.

Le triangle vectoriel $MM''M_1$ nous permet d'écrire

$$\overline{MM_1} = \overline{MM''} + \overline{M''M_1}.$$

Divisant les deux membres de cette égalité par Δt et passant à la limite, on obtient

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM''}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{M''M_1}}{\Delta t}. \qquad (71)$$

Mais par définition:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = v_a, \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM''}}{\Delta t} = v_e.$$

En ce qui concerne le second terme de la somme, comme pour $\Delta t \to 0$ la courbe A_1B_1 tend vers la courbe AB, on aura à la limite:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{M''M_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM'}}{\Delta t} = v_r.$$

Les vitesses obtenues sont dirigées suivant les tangentes aux trajectoires correspondantes (fig. 209, *b*).

En portant toutes ces valeurs dans l'égalité (71), on obtient:

$$v_a = v_r + v_e. \qquad (72)$$

Il s'ensuit que *dans le mouvement composé, la vitesse absolue du point est égale à la somme géométrique de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement* (théorème sur la composition des vitesses). Le parallélogramme construit à la fig. 209, *b* est appelé *parallélogramme des vitesses.*

Si l'angle entre les directions des vitesses v_r et v_e est égal à α, on a en module:

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos\alpha}. \tag{73}$$

Indiquons un autre raisonnement aboutissant à l'égalité (72). Admettons que la position d'un point en mouvement par rapport aux axes fixes $x_1y_1z_1$ soit définie par le rayon-vecteur r_1 (voir fig. 209, *a*). Considérons les vecteurs $\overline{MM'}$, $\overline{MM''}$ et $\overline{MM_1}$ comme des déplacements élémentaires effectués durant le laps de temps dt et dirigés suivant les tangentes aux trajectoires correspondantes passant par le point M. Dans ce cas le vecteur $\overline{MM_1}$ est égal à l'accroissement total dr_1, qu'a subit le vecteur r_1 durant le temps dt. Le vecteur $\overline{MM'}$ donne à son tour l'accroissement relatif $(dr_1)_r$ du point le long de la courbe AB, et $\overline{MM''}$ exprime l'accroissement (dr_1) subi par le vecteur r_1 rien que du fait du mouvement d'entraînement de la courbe AB.

On a donc:

$$dr_1 = (dr_1)_r + (dr_1)_e, \tag{74}$$

c'est-à-dire que l'accroissement total du vecteur r_1 durant l'intervalle de temps élémentaire dt est égal à la somme géométrique des accroissements en mouvements relatif et d'entraînement. En divisant les deux membres de l'égalité (74) par dt, on obtient

$$\frac{dr_1}{dt} = \frac{(dr_1)_r}{dt} + \frac{(dr_1)_e}{dt} \tag{74'}$$

ou bien, $v_a = v_r + v_e$, car par définition les rapports ci-dessus sont respectivement égaux à v_a, v_r et v_e.

A l'aide du parallélogramme des vitesses, on résout certains problèmes relatifs à la cinématique du point, notamment: a) connaissant les vitesses v_r et v_e, on peut trouver la vitesse absolue v_a du point; b) connaissant v_a et les directions des vitesses v_r et v_e, on peut trouver les modules de ces vitesses; c) connaissant les vitesses v_a et v_e, il est possible de déterminer la vitesse relative du point v_r:

$$v_r = v_a + (-v_e).$$

Problème 81. Le point M se meut le long de la droite OA avec la vitesse u (fig. 210), tandis que la droite elle-même tourne avec la vitesse angulaire ω dans le plan Ox_1y_1 autour du point O. Déterminer la vitesse du point M par rapport aux axes Ox_1y_1 en fonction de la distance $OM = r$.

Solution. Examinons le mouvement du point M comme composé du mouvement relatif le long de la droite OA et du mouvement d'entraînement de cette droite. Alors la vitesse u, dirigée le long de OA, est la vitesse relative du point. Le mouvement de rotation de la droite OA autour du centre O est le mouvement d'entraînement pour le point M et la vitesse du point de la droite OA qui à l'instant donné coïncide avec le point M est sa vitesse d'entraînement

v_e. Etant donné que ce point de la droite décrit une circonférence de rayon $OM = r$, $v_e = \omega r$ et est dirigée perpendiculairement à OM. En construisant le parallélogramme avec les vecteurs u et v_e, on trouve la vitesse absolue v_a du mouvement du point M par rapport aux axes Ox_1y_1. Vu que u et v_e sont mutuellement perpendiculaires, on trouve:

$$v_a = \sqrt{u^2 + \omega^2 r^2}.$$

Problème 82. Les eaux d'une rivière de largeur h coulent à une vitesse constante v. Un rameur communique à son canot une vitesse u si l'eau est immuable. Déterminer la direction suivant laquelle il faut traverser la rivière afin

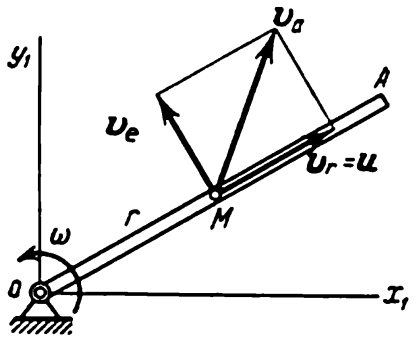


Fig. 210

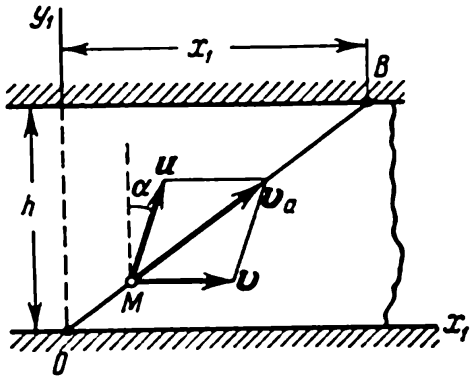


Fig. 211

de gagner la rive opposée dans le temps le plus court. Trouver le point d'abordage du canot.

Solution. Supposons que le mouvement du canot commence au point O (fig. 211). Traçons les axes de coordonnées Ox_1y_1 et représentons le canot dans une position arbitraire M. Supposons que le rameur dirige le canot sous un angle constant par rapport à l'axe Oy_1. Dans ce cas la vitesse absolue v_a du canot se compose de la vitesse relative v_r, égale à la vitesse qui lui est communiquée par le rameur ($v_r = u$), et de la vitesse d'entraînement v_e, égale à la vitesse du courant de la rivière ($v_e = v$):

$$v_a = v_r + v_e = u + v.$$

Les projections de la vitesse absolue sur les axes de coordonnées (d'après le théorème sur la projection de la somme de vecteurs) sont égales à:

$$v_{ax_1} = u \sin \alpha + v; \quad v_{ay_1} = u \cos \alpha.$$

Etant donné que ces deux projections sont constantes, les déplacements du canot le long des axes de coordonnées valent:

$$x_1 = (u \sin \alpha + v)\, t; \quad y_1 = (u \cos \alpha)\, t.$$

Quand le canot aborde la rive opposée, $y_1 = h$. Ce qui donne le temps de la traversée:

$$t_1 = \frac{h}{u \cos \alpha}.$$

Il est évident que t_1 aura la plus petite valeur quand $\cos \alpha = 1$, c'est-à-dire $\alpha = 0$. Ainsi, le rameur traversera la rivière dans le plus court délai s'il dirige le canot perpendiculairement à la rive. Alors:

$$t_{\min} = \frac{h}{u}.$$

En introduisant dans l'expression pour x_1 $\alpha = 0$ et $t = t_{min}$, on obtient

$$x_1 = \frac{v}{u} h.$$

Par conséquent, le canot abordera au point B, qui se trouve à une distance x_1 de l'axe Oy_1 dans le sens du courant. Cette dérive est d'autant plus petite que v et h sont plus petits et que u est plus grand.

Problème 83. Le levier OM de l'appareil enregistreur forme à un instant donné un angle α avec l'horizontale tandis que le style M a la vitesse v, perpendiculaire à OM (fig. 212). Le tambour tourne autour de l'axe vertical avec la

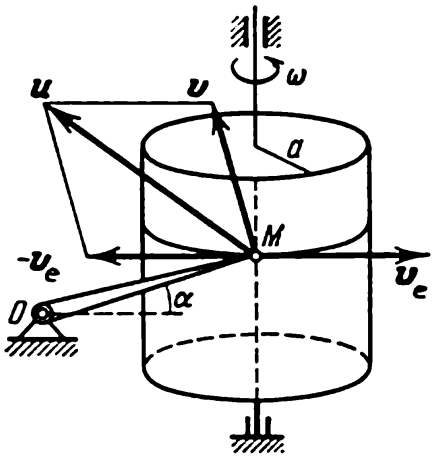


Fig. 212

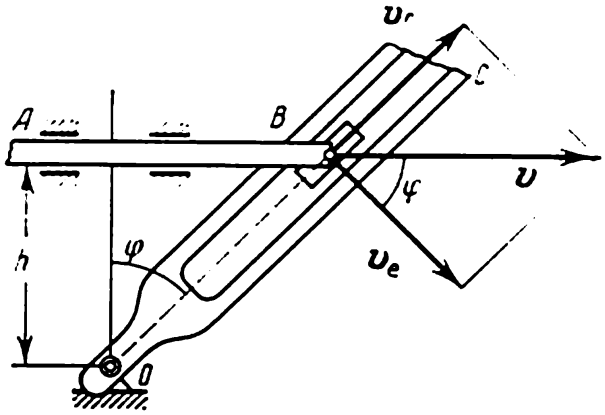


Fig. 213

vitesse angulaire ω. Déterminer la vitesse u de déplacement du style sur le papier, étant donné que le rayon du tambour est égal à a.

Solution. On connaît la vitesse absolue du style $v_a = v$. On peut considérer la vitesse v comme une somme géométrique de la vitesse du mouvement du style par rapport au papier (c'est la vitesse cherchée u) et de la vitesse d'entraînement v_e, égale à la vitesse du point du papier qui à l'instant donné se trouve en contact avec le style; en module, $v_e = \omega a$.

Selon le théorème sur la composition des vitesses, on a: $v = u + v_e$, d'où $u = v + (-v_e)$. En construisant sur la base des vecteurs v et $(-v_e)$ le parallélogramme des vitesses, on trouve la vitesse cherchée u. Vu que l'angle entre v et $(-v_e)$ est égal à $90° - \alpha$, le module de u sera:

$$u = \sqrt{v^2 + \omega^2 a^2 + 2v\omega a \sin \alpha}.$$

Maintenant, par le théorème des sinus on peut déterminer l'angle formé par la vitesse u avec la direction de v_e.

Problème 84. Le bout B de la tige horizontale AB est articulé à la crosse qui glisse le long de la fente de la coulisse OC et fait tourner cette dernière autour de l'axe O (fig. 213); la distance de l'axe O à la tige AB est égale à h. Déterminer la vitesse angulaire de la coulisse en fonction de la vitesse v de la tige et de l'angle φ.

Solution. On connaît la vitesse absolue de la crosse, égale à la vitesse v de la tige. On peut considérer cette vitesse comme composée de la vitesse relative v_r de glissement de la crosse le long de la fente de la coulisse et de la vitesse d'entraînement v_e, égale à la vitesse du point de la coulisse qui coïncide

à l'instant donné avec la crosse. On connaît les supports de ces vitesses : la vitesse v_r est dirigée le long de OB, la vitesse v_e est perpendiculaire à OB.

Alors, en décomposant la vitesse donnée v suivant v_r et v_e, on trouve ces dernières. La règle du parallélogramme montre qu'en module $v_r = v \cos \varphi$.

Mais d'un autre côté, la vitesse d'entraînement $v_e = \omega \cdot OB = \omega \frac{h}{\cos \varphi}$, où ω est la vitesse angulaire de la coulisse. En comparant ces deux valeurs de v_e, on trouve la vitesse angulaire de la coulisse :

$$\omega = \frac{v}{h} \cos^2 \varphi.$$

§ 91. Composition des accél érations. Théorème de Coriolis. Précisons d'abord les notions d'accélération relative et d'accélération d'entraînement du point. Pendant le mouvement composé la vitesse relative du point v_r subit des accroissements aussi bien lors du mouvement relatif que du mouvement d'entraînement, c'est-à-dire que comme dans l'égalité (74) (voir § 90) $dv_r = (dv_r)_r + (dv_r)_e$. Mais par définition on appelle accélération relative du point la grandeur w_r, caractérisant la variation de sa vitesse relative v_r *dans le mouvement relatif seulement.* Il s'ensuit que :

$$w_r = \frac{(dv_r)_r}{dt}. \tag{75}$$

La grandeur w_r ne tient pas compte de la variation subie par le vecteur v_r dans le mouvement d'entraînement.

De même, la vitesse d'entraînement v_e subit aussi des accroissements aussi bien pendant le mouvement relatif que le mouvement d'entraînement, par suite : $dv_e = (dv_e)_r + (dv_e)_e$. Mais par définition on appelle accélération d'entraînement du point la grandeur w_e caractérisant la variation de la vitesse d'entraînement *dans le mouvement d'entraînement seulement* (w_e est l'accélération du point lié invariablement aux axes mobiles, c'est-à-dire ne participant pas au mouvement relatif). Il en découle que :

$$w_e = \frac{(dv_e)_e}{dt}. \tag{76}$$

La variation subie par le vecteur v_e dans le mouvement relatif n'est pas prise en considération dans la grandeur w_e.

Ainsi, contrairement aux vitesses, les grandeurs qu'on détermine en cinématique comme des accélérations relative et d'entraînement ne donnent pas en s'additionnant l'accélération totale (absolue) du point. Toutefois, les définitions introduites sont commodes parce qu'elles permettent de calculer facilement les valeurs de w_r et de w_e. En effet, étant donné qu'il ne faut pas prendre en considération le mouvement des axes mobiles $Oxyz$ pour la détermination de w_r, on calculera w_r à l'aide des méthodes classiques de cinématique du point (voir §§ 67, 69). Ensuite, vu que pour le

calcul de w_e, il ne faut pas tenir compte du déplacement relatif du point, on calcule w_e comme l'accélération du point d'un corps solide quelconque lié invariablement aux axes $Oxyz$, c'est-à-dire par les méthodes de cinématique du corps solide (voir §§ 76, 84, etc.). Ainsi, en définissant les grandeurs w_r et w_e par les équations (75) et (76) on les calcule facilement à l'aide des formules cinématiques connues.

Pour bien mettre en évidence le fait que chacun des vecteurs v_r et v_e subit bien des accroissements dus aux mouvements relatif et d'entraînement, examinons un cas particulier. Soit un point qui se déplace en mouvement accéléré le

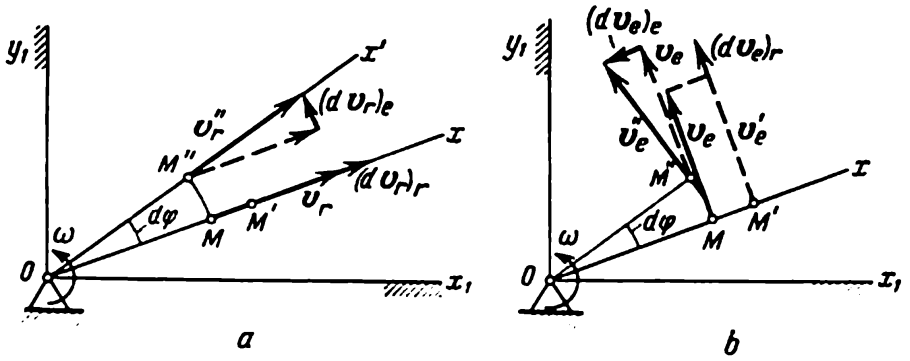


Fig. 214

long de la droite Ox tournant autour du centre O dans le plan Ox_1y_1 (voir le problème 81). Dans ce cas, au cours du déplacement relatif du point le long de Ox de M à M' (fig. 214,*a*), le vecteur v_r devient égal à v_r' (le vecteur v_r' n'est pas indiqué sur le dessin), et durant le temps dt il reçoit un accroissement $(dv_r)_r$ qui, divisé par dt, donne l'accélération relative w_r du point. Mais en même temps, pendant la rotation de la droite Ox le vecteur v_r vient dans la position v_r'' et au cours du mouvement d'entraînement il reçoit un accroissement $(dv_r)_e$ qui, divisé par dt, donne une accélération supplémentaire qui n'entre pas dans la grandeur w_r.

De même, dans le mouvement d'entraînement (pendant la rotation de la droite Ox) le point M de la droite pendant l'intervalle de temps dt vient en M'' (fig. 214,*b*) et le vecteur v_e devient égal à v_e'' et reçoit un accroissement $(dv_e)_e$ qui, divisé par dt, donne l'accélération d'entraînement w_e du point. Mais en même temps, pendant le déplacement relatif du point de la position M à la position M', le vecteur v_e subit un accroissement complémentaire $(dv_e)_r$, puisqu'au point M $v_e = \omega \cdot OM$, et au point M', $v_e' = \omega \cdot OM'$. Le rapport de cet accroissement à dt donne une accélération complémentaire qui n'entre pas dans la grandeur w_e.

Passons maintenant à la démonstration du théorème sur la composition des accélérations. L'accélération absolue du point est $w_a = \frac{dv_a}{dt}$. Etant donné que dans le mouvement composé $v_a = v_r + v_e$, il en découle que

$$w_a = \frac{dv_r}{dt} + \frac{dv_e}{dt}.$$

Les accroissements totaux dv_r et dv_e des vecteurs v_r et v_e sont composés, comme on l'a indiqué ci-dessus, de leurs accroissements dans les mouvements relatif et d'entraînement. En développant ces accroissements, on représente l'égalité précédente sous la forme:

$$w_a = \frac{(dv_r)_r}{dt} + \frac{(dv_r)_e}{dt} + \frac{(dv_e)_r}{dt} + \frac{(dv_e)_e}{dt}$$

ou, prenant en considération les formules (75), (76):

$$w_a = w_r + w_e + \frac{(dv_r)_e}{dt} + \frac{(dv_e)_r}{dt}. \qquad (77)$$

1. Cas où le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation. Les deux derniers termes de la somme de l'égalité (77) tiennent compte des

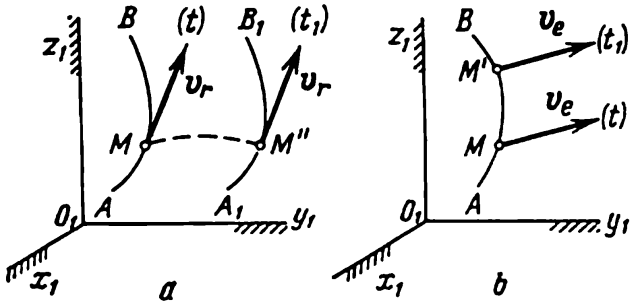


Fig. 215

variations de la vitesse relative v_r dans le mouvement d'entraînement et de la vitesse d'entraînement v_e dans le mouvement relatif. Cherchons d'abord à quoi sont égales ces composantes dans le cas où le mouvement des axes mobiles $Oxyz$ ainsi que de la courbe AB qui y est liée (voir fig. 208) est un mouvement de translation. Dans ce cas, dans le mouvement d'entraînement de la courbe AB à la position A_1B_1, le vecteur v_r reste parallèle à lui-même, c'est-à-dire qu'il ne reçoit aucun accroissement (fig. 215, *a*; les axes mobiles n'y sont pas figurés). Par conséquent, dans ce cas $(dv_r)_e = 0$. Puis, vu que la courbe AB est en mouvement de translation, la vitesse d entraînement (vitesse des points de la courbe AB) sera la même pour la position M et pour la position M' (fig. 215, *b*). C'est pourquoi, dans ce cas, durant le déplacement relatif du point de M à M', le vecteur v_e ne change pas et $(dv_e)_r = 0$. Il résulte de l'égalité (77) que:

$$w_a = w_r + w_e. \qquad (78)$$

Par conséquent, *quand le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation, l'accélération absolue du point est égale à la somme géométrique de l'accélération relative et de l'accélération d'entraînement.*

2. Cas où le mouvement d'entraînement n'est pas un mouvement de translation. Dans ce cas les grandeurs $(dv_r)_e$ et $(dv_e)_r$ seront différentes de zéro. Introduisons la notation

$$w_{cor} = \frac{(dv_r)_e}{dt} + \frac{(dv_e)_r}{dt}. \tag{79}$$

La grandeur w_{cor}, caractérisant la variation de la vitesse relative v_r dans le mouvement d'entraînement et la variation de la vitesse d'entraînement v_e dans le mouvement relatif, est appelée *accélération complémentaire* ou *de Coriolis du point*. Alors l'égalité (77) s'écrit:

$$w_a = w_r + w_e + w_{cor}. \tag{80}$$

La formule (80) exprime le théorème de Coriolis[1]: *pour un mouvement d'entraînement qui n'est pas un mouvement de translation, l'accélération absolue du point est égale à la somme de trois accélérations: l'accélération relative, caractérisant la variation de la vitesse relative dans le mouvement relatif, l'accélération d'entraînement, caractérisant la variation de la vitesse d'entraînement dans le mouvement d'entraînement et l'accélération de Coriolis, qui caractérise les variations de la vitesse relative dans le mouvement d'entraînement et de la vitesse d'entraînement dans le mouvement relatif.*

§ 92. Calcul de l'accélération de Coriolis. Dans le cas général, le mouvement d'entraînement, c'est-à-dire le mouvement des axes *Oxyz*, se compose d'un mouvement de translation avec pôle quelconque et d'un mouvement de rotation autour de ce pôle (§ 88); de plus, la composante du mouvement faisant intervenir la rotation ne dépend pas du choix du pôle. Afin de calculer l'accélération de Coriolis dans le cas général, nous chercherons les valeurs des termes situés dans le membre de droite de l'égalité (79).

a) Détermination de $(dv_r)_e$. Lors du mouvement d'entraînement des axes *Oxyz*, et donc de la courbe *AB* (fig. 216, *a*; les axes *Oxyz* n'y sont pas figurés), pendant l'intervalle de temps dt, le vecteur v_r, dirigé suivant la tangente à *AB*, effectue un mouvement de translation en même temps qu'une rotation autour du point M'' jusqu'à la position v_r''. Le vecteur v_r subira donc l'accroissement $(dv_r)_e$ qui peut être calculé d'après la formule $(dv_r)_e = v_b dt$, où v_b est la vitesse du déplacement du point b, c'est-à-dire de l'extrémité du vecteur $\overline{M''b} = v_r$, pendant sa rotation autour du centre M''. Mais cette rotation est réalisée avec une vitesse angulaire d'entraînement ω_e, c'est-à-dire avec la vitesse

[1] Coriolis, Gustave-Gaspard (1792-1843), savant français connu par ses travaux sur la mécanique théorique et appliquée.

angulaire de rotation des axes mobiles (fig. 216, *b*). Par conséquent, d'après la formule (67) $v_b = \omega_e \times \overline{M''b} = \omega_e \times v_r$ et $(dv_r)_e = v_b\,dt = (\omega_e \times v_r)\,dt$.

Il en découle que

$$\frac{(dv_r)_e}{dt} = \omega_e \times v_r. \tag{81}$$

b) Détermination de $(dv_e)_r$. La vitesse d'entraînement v_e est égale à la vitesse du point de la courbe AB, lié inva-

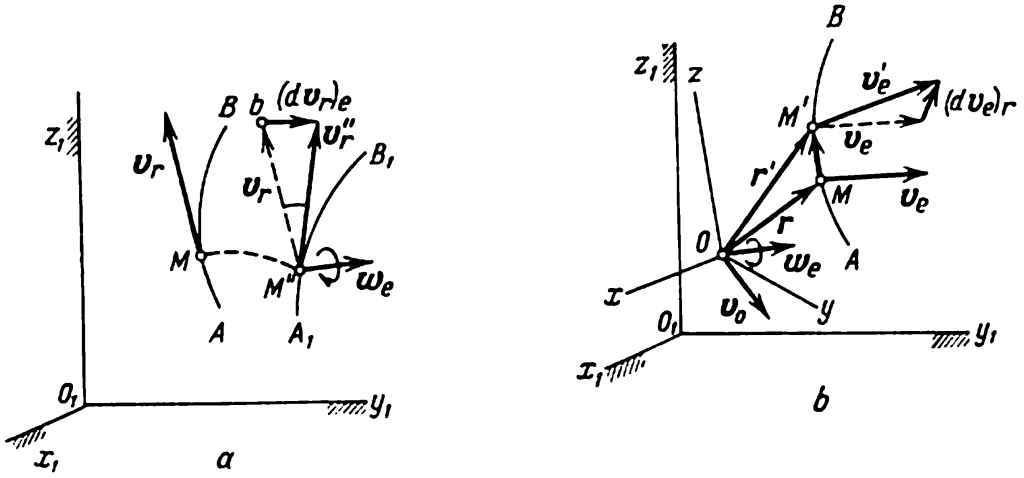


Fig. 216

riablement aux axes mobiles $Oxyz$ et qui coïncide à chaque instant avec le point M (fig. 216, *b*). Si on prend le centre O comme pôle, cette vitesse sera composée de la vitesse du pôle v_O et de la vitesse de la rotation des axes $Oxyz$ autour du pôle. Par conséquent, d'après les formules (69) et (67): $v_e = v_O + \omega_e \times r$, où $r = \overline{OM}$ et ω_e est la vitesse angulaire de rotation. Ayant effectué pendant l'intervalle de temps dt un déplacement relatif $\overline{MM'} = v_r\,dt$, le point arrive en une nouvelle position M', pour laquelle $v_e' = v_O + \omega_e \times r'$, où $r' = r + \overline{MM'}$. Ainsi, par suite du déplacement relatif du point de la position M à M', le vecteur v_e subit un accroissement:

$$(dv_e)_r = v_e' - v_e = \omega_e \times (r' - r) = \omega_e \times \overline{MM'} = \omega_e \times v_r\,dt,$$

d'où

$$\frac{(dv_e)_r}{dt} = \omega_e \times v_r. \tag{82}$$

Substituant les grandeurs trouvées (81) et (82) dans l'égalité (79) on a:

$$w_{cor} = 2\,(\omega_e \times v_r). \tag{83}$$

Ainsi, *l'accélération de Coriolis du point est égale au double produit vectoriel de la vitesse angulaire du mouvement d'entraînement par la vitesse relative du point.* Si on désigne par α l'angle entre les vecteurs v_r et ω_e, on a en module :

$$w_{cor} = 2\,|\omega_e v_r|\,\sin\alpha. \tag{84}$$

Le vecteur w_{cor} a le même sens que le vecteur $\omega_e \times v_r$, c'est-à-dire qu'il est perpendiculaire au plan passant par les vecteurs

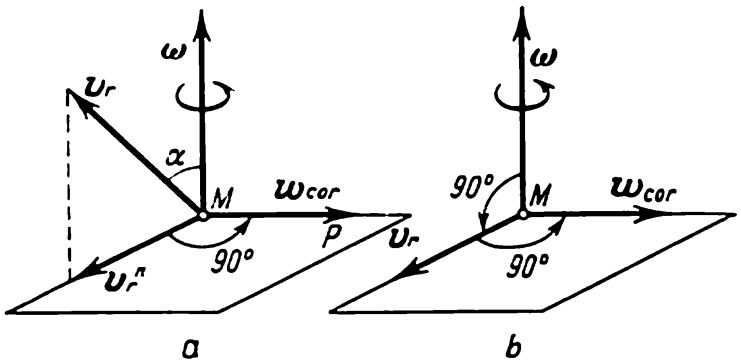


Fig. 217

ω_e et v_r, et est orienté de façon que depuis son extrémité on voit la superposition de ω_e sur v_r s'effectuer en sens inverse des aiguilles d'une montre (fig. 217, *a*).

On voit aussi sur la figure 217, *a* qu'on peut obtenir la direction du vecteur w_{cor} en projetant le vecteur v_r sur le plan P, perpendiculaire à ω_e et faisant tourner cette projection v_r^P de 90° dans le sens de la rotation d'entraînement.

Si le mouvement composé est *plan* (la trajectoire relative est une courbe plane et se déplace toujours dans son plan), l'angle $\alpha = 90°$ (fig. 217, *b*) et dans ce cas on a en module

$$w_{cor} = 2\,|\omega_e v_r|. \tag{85}$$

Comme on le voit sur la figure 217, *b* pour le *mouvement plan, on peut trouver la direction de* w_{cor} *en tournant le vecteur* v_r *de* 90° *dans le sens de la rotation d'entraînement* (c est-à-dire dans le sens horaire ou antihoraire, suivant le sens de rotation).

Pour illustrer les règles citées, on a montré à la figure 218 le sens de l'accélération de Coriolis de la bille M en mouvement le long du tube AB dans le cas où le tube tourne dans le plan du dessin (fig. 218, *a*) et dans le cas où, pendant la rotation, il décrit un cône (fig. 218, *b*).

La formule (84) montre que l'accélération de Coriolis peut s'annuler dans les cas suivants :

1) quand $\omega_e = 0$, c'est-à-dire *quand le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation* (formule 78) ou quand la vitesse angulaire de rotation d'entraînement à l'instant donné est nulle;

2) quand $v_r = 0$, c'est-à-dire quand le mouvement relatif est inexistant ou quand la vitesse relative à l'instant donné est nulle;

3) quand l'angle $\alpha = 0$ ou $\alpha = 180°$, c'est-à-dire quand le

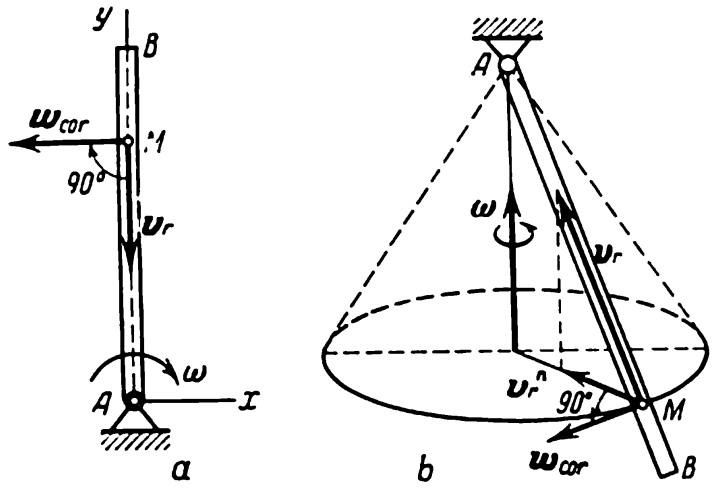


Fig. 218

mouvement relatif s'effectue dans la direction parallèle à l'axe de rotation d'entraînement ou si à l'instant donné, le vecteur v_r est parallèle à cet axe.

§ 93. Résolution des problèmes. A. Le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation. Dans le cas où le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation, les problèmes et les méthodes de leur résolution sont analogues aux problèmes sur la composition des vitesses (§ 90).

Problème 85. Le coin, qui se meut horizontalement avec une accélération w_1, déplace la tige AB le long d'une glissière verticale (fig. 219). Déterminer l'accélération de la tige, si l'angle du coin est égal à α.

Solution. L'accélération absolue w_A du point A de la tige est dirigée verticalement vers le haut. On peut la considérer comme composée de l'accélération relative w_r, dirigée suivant la pente du coin, et de l'accélération d'entraînement w_e, égale à l'accélération du coin w_1. Etant donné que le mouvement d'entraînement du coin est un mouvement de translation, en construisant sur la base de l'égalité (78) un parallélogramme des accélérations et en prenant en considération que $w_e = w_1$, on trouve:

$$w_A = w_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

La grandeur w_A définit l'accélération de la tige.

B. Le mouvement d'entraînement est un mouvement de rotation. Examinons le cas général de calcul de w_a, quand le mouvement d'entraînement est une rotation autour d'un axe immobile.

Admettons que le point M se meuve sur la courbe AMB (trajectoire relative) le long d'un corps (une sphère, par exemple) qui tourne avec retardement autour de l'axe BA (fig. 220). Pour trouver l'accélération absolue du point à un instant

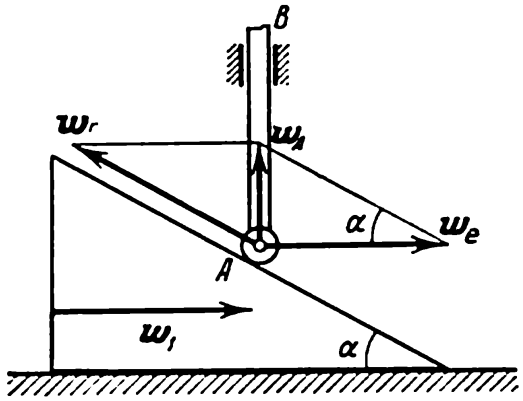


Fig. 219

quelconque t_1, il faut connaître pour ce moment: 1) la position du point en mouvement sur la courbe AB; 2) la vitesse relative v_r du point; 3) la vitesse angulaire ω et l'accélération angulaire ε du corps (c'est-à-dire ω et ε du mouvement d'entraînement). Si ces grandeurs ne sont pas connues, il convient de les trouver préalablement à partir des données du problème.

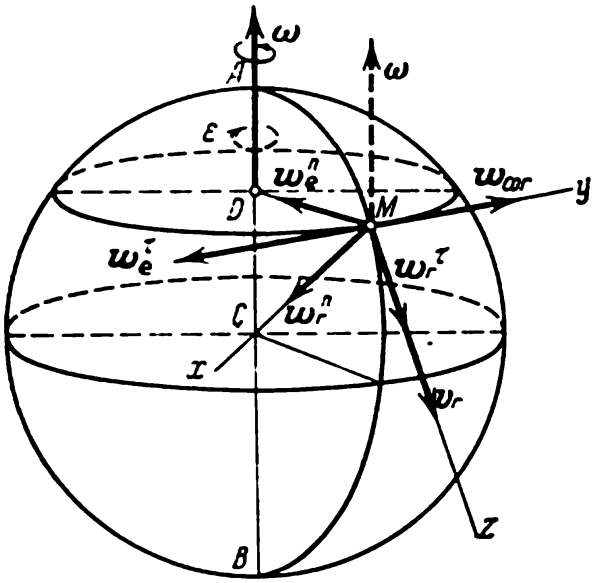


Fig. 220

Après cela, il est nécessaire de *représenter la position du point en mouvement à l'instant* t_1 et de tracer les vecteurs v_r et ω sur le dessin. Ensuite, le calcul revient aux opérations suivantes:

1) Détermination de w_r. Supposons la rotation du corps arrêtée et calculons l'accélération du point pendant son mouvement le long de AB, d'après les formules de cinématique du point. Dans le cas où la courbe AB est donnée (§ 69):

$$w_r^\tau = \frac{dv_r}{dt}, \quad w_r^n = \frac{v_r^2}{\rho_r},$$

où ρ_r est le rayon de courbure de la courbe AB au point M. Si le mouvement relatif est donné par les coordonnées, v_r et w_r sont calculées d'après les formules du § 67.

2) Détermination de w_e. Après avoir calculé l'accélération du point du corps qui à l'instant donné coïncide avec le point M, on trouve l'accélération d'entraînement d'après les formules de cinématique du corps solide (§ 76):

$$w_e^\tau = h\varepsilon, \quad w_e^n = h\omega^2,$$

où $h = MD$ est la distance du point M à l'axe de rotation à l'instant t_1.

3) Détermination de w_{cor}. On fait ces calculs en utilisant les formules du § 92.

4) Détermination de w_a. Représentons sur le dessin tous les vecteurs calculés (compte tenu de leurs directions), et en utilisant le théorème de Coriolis nous trouvons:

$$w_a = w_r^\tau + w_r^n + w_e^\tau + w_e^n + w_{cor}.$$

Dans le cas où il est difficile d'obtenir par construction la somme des vecteurs ci-dessus (voir fig. 220), on calcule, après avoir tracé les axes de coordonnées

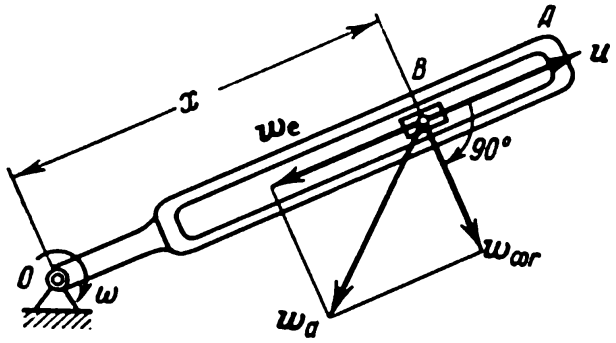


Fig. 221

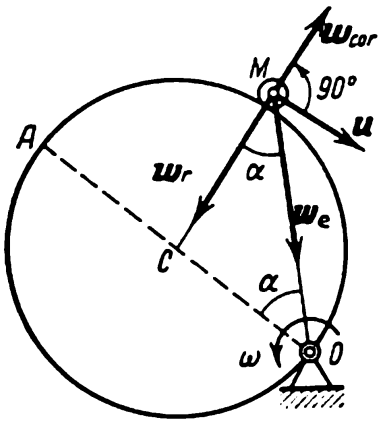


Fig. 222

quelconques $Mxyz$, les projections sur ces axes de tous les vecteurs additionnés. Puis, selon le théorème sur la projection de la somme de vecteurs sur un axe, on a:

$$w_{ax} = \sum w_{ix},\ w_{ay} = \sum w_{iy},\ w_{az} = \sum w_{iz}.$$

Puis on trouve:

$$w_a = \sqrt{w_{ax}^2 + w_{ay}^2 + w_{az}^2}.$$

Remarque. Lors du calcul de w_a *il ne faut pas écrire que*

$$w_a = \sqrt{w_r^2 + w_e^2 + w_{cor}^2}$$

(faute typique), car, en général, les vecteurs w_r, w_e, w_{cor} ne sont pas perpendiculaires entre eux.

Problème 86. Le coulisseau OA tourne à vitesse angulaire constante ω autour de l'axe O (fig. 221). La crosse B glisse à vitesse relative constante u dans la fente du coulisseau. Déterminer l'accélération absolue de la crosse en fonction de sa distance x à l'axe O.

Solution. Imaginant le coulisseau arrêté à l'instant quelconque t_1, on trouve que le mouvement relatif de la crosse le long du coulisseau est uniforme et rectiligne; par conséquent, $w_r = 0$.

Le mouvement du coulisseau OA est un mouvement d'entraînement pour la crosse B. Par conséquent, l'accélération d'entraînement w_e de la crosse est

égale à l'accélération du point du coulisseau qui à l'instant t coïncide avec la crosse. Vu que ce point du coulisseau se meut suivant la circonférence de rayon $OB = x$, et que $\omega = \text{const.}$, le vecteur $\boldsymbol{w}_e = \boldsymbol{w}_e^n$ et il est dirigé le long de BO, tandis qu'en module $w_e = w_e^n = \omega^2 x$.

L'accélération de Coriolis $w_{cor} = 2\omega u$, puisque le mouvement est plan. Ayant fait tourner le vecteur vitesse relative u autour du point B de 90° dans le sens de la rotation d'entraînement (c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre), on trouve la direction et le signe de $\boldsymbol{w}_{cor}$.

D'après le théorème de Coriolis:

$$\boldsymbol{w}_a = \boldsymbol{w}_r + \boldsymbol{w}_e + \boldsymbol{w}_{cor}.$$

Dans notre cas $w_r = 0$, et $\boldsymbol{w}_{cor}$ est perpendiculaire à $\boldsymbol{w}_e$. Par conséquent:

$$w_a = \sqrt{w_e^2 + w_{cor}^2} = \omega\sqrt{\omega^2 x^2 + 4u^2}.$$

Problème 87. L'excentrique, qui est un disque rond de rayon R, tourne à une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe O, passant par le bord du disque (fig. 222). La goupille M, qui commence son mouvement à partir du point A, glisse sur la circonférence du disque avec une vitesse relative constante u. Déterminer l'accélération absolue de la goupille à un instant quelconque t. Les directions des mouvements sont montrées sur le dessin.

Solution. A l'instant t, la goupille se trouve à la distance $s = \widehat{AM} = ut$ du point A. Par conséquent, à cet instant $\angle AOM = \alpha$ vaut

$$\alpha = \frac{s}{2R} = \frac{u}{2R}t \tag{a}$$

puisque l'angle α est égal à la moitié de l'angle au centre ACM.

Le mouvement relatif de la goupille M se réalise suivant la circonférence de rayon R. Etant donné que $v_r = u = \text{const.}$,

$$w_r^\tau = \frac{du}{dt} = 0; \quad w_r^n = \frac{u^2}{R}. \tag{b}$$

Le vecteur $\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{w}_r^n$ est dirigé suivant le rayon MC.

Pour la goupille M, le mouvement du disque sera un mouvement d'entraînement. Par conséquent, l'accélération d'entraînement de la goupille $\boldsymbol{w}_e$ est égale à l'accélération du point du disque qui à cet instant coïncide avec la goupille. Ce point du disque décrit une circonférence de rayon $OM = 2R\cos\alpha$. Etant donné que pour le disque $\omega = \text{const.}$, alors $\varepsilon = 0$ et

$$w_e^\tau = OM \cdot \varepsilon = 0; \quad w_e^n = OM \cdot \omega^2 = 2R\omega^2\cos\alpha. \tag{c}$$

Le vecteur $\boldsymbol{w}_e = \boldsymbol{w}_e^n$ est dirigé le long de la droite MO.

Attendu que le mouvement se réalise dans un même plan on a dans notre cas:

$$w_{cor} = 2\omega u. \tag{d}$$

On obtient la direction de $\boldsymbol{w}_{cor}$ après avoir fait tourner le vecteur $\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{u}$ autour du point M de 90° dans le sens du mouvement d'entraînement (c'est-à-dire en sens contraire des aiguilles d'une montre).

L'accélération absolue de la goupille M est égale à:

$$\boldsymbol{w}_a = \boldsymbol{w}_r + \boldsymbol{w}_e + \boldsymbol{w}_{cor}.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{w}_r$ et $\boldsymbol{w}_{cor}$ sont dirigés suivant un même support et ils peuvent être remplacés par un seul vecteur $\boldsymbol{w}_1$ aligné avec cette droite; en valeur numérique $w_1 = w_r - w_{cor}$.

Puis, en faisant l'addition des vecteurs $\boldsymbol{w}_1$ et $\boldsymbol{w}_e$ d'après la règle du parallélogramme, on trouve en définitive

$$w_a = \sqrt{w_e^2 + (w_r - w_{cor})^2 + 2w_e(w_r - w_{cor})\cos\alpha},$$

où les valeurs de α, w_r, w_e, w_{cor} sont définies par les égalités (a), (b), (c), (d).

Problème 88. Un corps se déplace en mouvement de translation dans l'hémisphère nord le long d'un méridien, du nord au sud (fig. 223) à une vitesse $v_r = u$ m/s. Trouver la grandeur et la direction de l'accélération de Coriolis du corps à la latitude λ.

Solution. Négligeant les dimensions du corps, considérons-le comme un point. La vitesse relative $\boldsymbol{u}$ du corps forme un angle λ avec l'axe terrestre. Par conséquent:

$$w_{cor} = 2\omega u \sin\lambda,$$

où ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre.

Le corps possède donc la plus grande accélération de Coriolis au pôle, quand $\lambda = 90°$. A mesure qu'on se rapproche de l'équateur, la grandeur w_{cor} décroît et à l'équateur, quand $\lambda = 0$, elle s'annule (à l'équateur, le vecteur $\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{u}$ est parallèle à l'axe de rotation de la Terre).

On trouve la direction de $\boldsymbol{w}_{cor}$ d'après la règle du produit vectoriel. Etant donné que $\boldsymbol{w}_{cor} = 2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u})$, on voit que le vecteur $\boldsymbol{w}_{cor}$ est perpendiculaire au plan passant par les vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{\omega}$, c'est-à-dire qu'il est perpendiculaire au plan de section méridienne et dirigé vers l'est, d'où on voit s'accomplir la superposition du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ sur le vecteur $\boldsymbol{u}$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

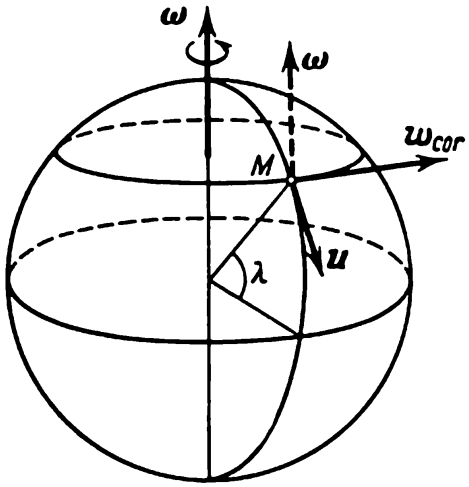


Fig. 223

Le problème de la variation du mouvement des corps à la surface terrestre par suite de l'existence de l'accélération de Coriolis est examiné en dynamique. Cependant, on voit par la formule obtenue que la grandeur w_{cor} est d'habitude petite, puisque la vitesse angulaire de rotation de la Terre est faible:

$$\omega \approx \frac{2\pi}{24 \cdot 3600}\ 1/\text{s}.$$

Il est donc évident que dans la pratique on peut négliger l'accélération de Coriolis pour les mouvements de petites vitesses u.

Problème 89. Un triangle rectangle ABC, dont l'hypoténuse vaut $AB = 2a = 20$ cm et dont $\angle CBA = \alpha = 60°$, tourne autour de l'axe Cz_1 (fig. 224) suivant la loi du mouvement $\varphi = 10t - 2t^2$. Un point M oscille le long de l'hypoténuse autour de son milieu O, suivant la loi donnée par l'équation $\xi = a\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ (l'axe $O\xi$ a pour support OA). Trouver l'accélération absolue du point M au moment $t_1 = 2$ s.

Solution: 1) Déterminons la position du point M sur sa trajectoire relative AB à l'instant t_1. Par l'équation du mouvement on trouve:

$$\xi_1 = a\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{a}{2}.$$

Il s'ensuit que le point M à l'instant t_1 se trouve au milieu du segment OB. Représentons cette position sur le dessin.

2) Détermination de v_r. Etant donné que le mouvement relatif est rectiligne:

$$v_r = \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\pi}{3} a \sin\left(\frac{\pi}{3} t\right).$$

A l'instant $t_1 = 2$ s

$$v_{r1} = -\frac{\pi}{6} a \sqrt{3};$$

$$|v_{r1}| = \frac{5}{3} \pi \sqrt{3} \text{ cm/s}.$$

Le signe moins indique que le vecteur v_r à l'instant t_1 est dirigé de M vers B.

3) Détermination de ω et de ε. En prenant les dérivées, on trouve:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 10 - 4t, \quad \omega_1 = 2 \text{ 1/s},$$

où ω_1 est la valeur de ω à l'instant $t_1 = 2$ s;

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = -4 \text{ 1/s}^2.$$

Les signes indiquent qu'à partir de l'instant t_1 la rotation est dirigée en sens contraire des aiguilles d'une montre (si on regarde du bout de l'axe Cz_1) et elle est retardée.

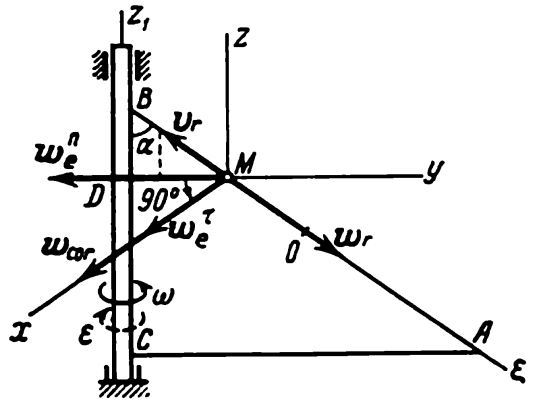


Fig. 224

4) Détermination de w_r. Vu que le mouvement relatif est rectiligne:

$$w_r = \frac{dv_r}{dt} = -\frac{\pi^2}{9} a \cos\left(\frac{\pi}{3} t\right).$$

A l'instant $t_1 = 2$ s

$$w_{r1} = \frac{\pi^2}{18} a = \frac{5}{9} \pi^2 \text{ cm/s}^2.$$

5) Détermination de w_e. Pour le point M, le mouvement du triangle est un mouvement d'entraînement. Par conséquent, l'accélération d'entraînement w_e du point M est égale à l'accélération du point du triangle qui, au moment donné, coïncide avec le point M. Ce point du triangle décrit la circonférence de rayon $MD = h$ et à l'instant $t_1 = 2$ s on a:

$$h = \frac{a}{2} \sin\alpha = 5\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ cm}.$$

Ainsi, à ce moment

$$w_e^\tau = \varepsilon h = -10\sqrt{3} \text{ cm/s}^2,$$

$$w_e^n = \omega^2 h = 10\sqrt{3} \text{ cm/s}^2.$$

Le vecteur w_e^τ est dirigé perpendiculairement au plan ABC dans le sens opposé à la rotation du triangle. Le vecteur w_e^n a pour support MD et est dirigé vers l'axe de rotation Cz_1.

6) Détermination de w_{cor}. En module, à l'instant $t_1 = 2$ s, w_{cor} vaut:

$$w_{cor} = 2\,|\,\omega v_r\,|\,\sin\alpha = 10\pi \text{ cm/s}^2,$$

puisque l'angle entre v_r et l'axe Cz_1 est égal à α.

Après avoir projeté le vecteur v_r sur le plan perpendiculaire à l'axe Cz_1 (la projection est dirigée le long de la ligne MD) et fait tourner cette projection de 90° dans le sens de la rotation d'entraînement, c'est-à-dire en sens inverse des aiguilles d'une montre, on trouve la direction de w_{cor} (dans notre cas, elle coïncide avec la direction de w_e^τ).

7) Détermination de w_a. A l'instant t_1, l'accélération absolue du point M est égale à:

$$w_a = w_r + w_e^\tau + w_e^n + w_{cor}.$$

Pour déterminer le module de w_a, on trace les axes $Mxyz$ (voir fig. 224) et on calcule les projections de tous les vecteurs sur ces axes. On obtient

$$w_{ax} = w_{cor} + |\,w_e^\tau\,| = 10\pi + 10\sqrt{3} \approx 48{,}7 \text{ cm/s}^2,$$

$$w_{ay} = w_r \sin\alpha - w_e^n = \frac{5\pi^2}{18}\sqrt{3} - 10\sqrt{3} \approx -12{,}6 \text{ cm/s}^2,$$

$$w_{az} = -w_r \cos\alpha = -\frac{5}{18}\pi^2 \approx -2{,}7 \text{ cm/s}^2.$$

Définitivement:

$$w_a = \sqrt{w_{ax}^2 + w_{ay}^2 + w_{az}^2} \approx 50{,}4 \text{ cm/s}^2.$$

On peut construire le vecteur w_a à partir de ses composantes le long des axes $Mxyz$.

Chapitre XV

MOUVEMENT COMPOSÉ DU CORPS SOLIDE

§ 94. Composition des mouvements de translation. Si le corps se meut par rapport aux axes mobiles $Oxyz$ (voir fig. 208) qui de leur côté effectuent un mouvement d'entraînement par rapport aux axes immobiles $Ox_1y_1z_1$, le mouvement résultant (absolu) est appelé mouvement composé (voir § 89).

Dans ce cas, la tâche de la cinématique consiste à trouver les relations entre les caractéristiques des mouvements relatif, d'entraînement et absolu. Comme on le sait, les caractéristiques cinématiques essentielles d'un corps sont ses vitesses et ses accélérations angulaires et de translation. Dans ce qui suit, on se bornera à la détermination des relations entre les vitesses angulaires et de translation.

Examinons d'abord le cas où le mouvement relatif du corps est un mouvement de translation à vitesse v_1, tandis que le mouvement d'entraînement est aussi un mouvement de translation à vitesse v_2. Dans ce cas, dans le mouvement relatif, tous les points du corps posséderont la vitesse v_1, tandis que dans le mouvement d'entraînement ils auront la vitesse v_2. Par conséquent, d'après le théorème de composition des vitesses, tous les points du corps dans le mouvement absolu posséderont une même vitesse $v = v_1 + v_2$, c'est-à-dire que le mouvement absolu sera un mouvement de translation.

Ainsi, *la composition de deux mouvements de translation à vitesses v_1 et v_2 donne aussi un mouvement de translation, à vitesse $v = v_1 + v_2$.*

Dans ce cas, le problème de la composition des vitesses est ramené au problème de la cinématique du point (§ 90).

§ 95. Composition des rotations autour de deux axes parallèles. Considérons le cas où le mouvement relatif du corps est une rotation à vitesse angulaire ω_1 autour de l'axe aa', fixé à la manivelle ba (fig. 225), et le mouvement d'entraînement, une rotation de la manivelle ba autour de l'axe bb' avec la vitesse angulaire ω_2.

Si les axes aa' et bb' sont parallèles, le mouvement du corps s'effectue dans un plan parallèle au plan perpendiculaire aux axes.

Examinons séparément quand les rotations sont de même sens et de sens opposés.

1) Les rotations sont de même sens. Représentons la section (S) du corps par un plan perpendiculaire aux axes (fig. 226).

On désigne les traces des axes dans la section (S) par les lettres A et B. Il est facile de voir qu'au point A, situé sur l'axe Aa', la vitesse n'est communiquée que par suite de la rotation autour de l'axe Bb' ; par conséquent, $v_A = \omega_2 \cdot AB$. De même, $v_B = \omega_1 \cdot AB$. Les vecteurs v_A et v_B sont parallèles entre eux (tous les deux sont perpendiculaires à AB) et dirigés dans des sens opposés. Le point

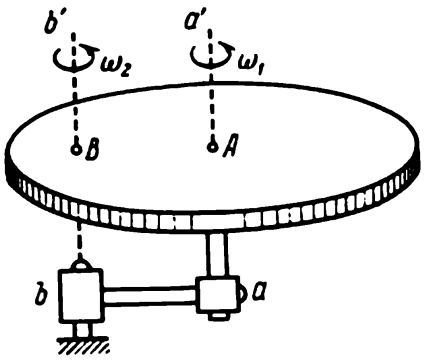


Fig. 225

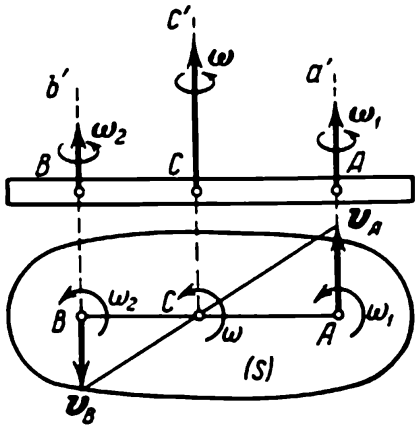


Fig. 226

C (voir § 81, fig. 182) est alors le centre instantané des vitesses ($v_C = 0$) et par suite, l'axe Cc', parallèle aux axes Aa' et Bb', est l'*axe instantané de rotation* du corps.

Pour déterminer la vitesse angulaire ω de la rotation absolue du corps autour de l'axe Cc' et la position de l'axe lui-même, c'est-à-dire du point C, on utilise les égalités (§ 81, formule 55)

$$\omega = \frac{v_B}{BC} = \frac{v_A}{AC}.$$

En appliquant les propriétés des proportions, on obtient :

$$\omega = \frac{v_A + v_B}{AC + BC} = \frac{v_A + v_B}{AB}.$$

En portant les valeurs $v_A = \omega_2 \cdot AB$, $v_B = \omega_1 \cdot AB$ dans les égalités précédentes, on obtient :

$$\omega = \omega_1 + \omega_2, \tag{86}$$

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB}. \tag{87}$$

Ainsi donc, *si un corps subit en même temps deux rotations de même sens autour des axes parallèles, son mouvement résultant sera une rotation instantanée à vitesse angulaire absolue* $\omega = \omega_1 + \omega_2$ *autour de l'axe instantané parallèle aux axes donnés*; la position de cet axe est déterminée par la proportion (87).

Au cours du temps, l'axe instantané de rotation Cc' change de position et décrit une surface cylindrique.

2) Les rotations sont de sens opposés. Représentons de nouveau la section (S) du corps (fig. 227) et admettons pour fixer les idées que $\omega_1 > \omega_2$. Alors, par un raisonnement analogue au précédent, on trouve que les vitesses des points A et B sont numériquement égales à: $v_A = \omega_2 \cdot AB$, $v_B = \omega_1 \cdot AB$; de

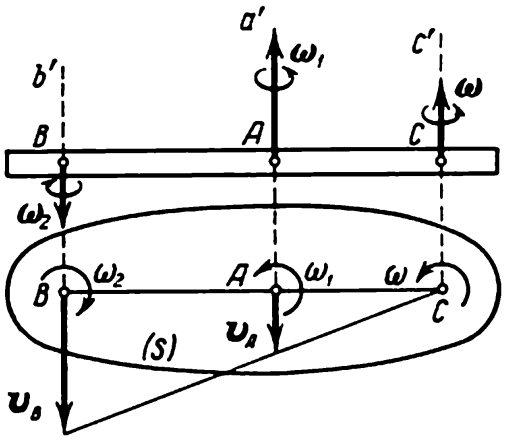


Fig. 227

plus, les vitesses v_A et v_B sont parallèles entre elles et dirigées dans le même sens. Dans ce cas, l'axe instantané de rotation passe par le point C (fig. 227), et on a:

$$\omega = \frac{v_B}{BC} = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_B - v_A}{BC - AC}$$

ou

$$\omega = \frac{v_B - v_A}{AB}.$$

Portant les valeurs de v_A et v_B dans ces égalités, on trouve définitivement:

$$\omega = \omega_1 - \omega_2, \tag{88}$$

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB}. \tag{89}$$

Ainsi donc, le mouvement résultant est encore une rotation instantanée à vitesse angulaire absolue $\omega = \omega_1 - \omega_2$ autour de l'axe Cc', dont la position est déterminée par la proportion (89).

Les résultats obtenus montrent que pendant la rotation autour des axes parallèles, les vecteurs des vitesses angulaires se composent de la même façon que les vecteurs des forces parallèles (§ 17).

3) Couple de rotations. Examinons le cas particulier de rotations de sens opposés autour des axes parallèles (fig. 228), quand en module $\omega_1 = \omega_2$. Ce cas est appelé *couple de rotations*

et les vecteurs ω_1 et ω_2 forment le *couple de vitesses angulaires.* Dans ce cas, $v_A = v_B = \omega_1 \cdot AB$. Le centre instantané des vitesses se trouve alors (voir § 81, fig. 181) à l'infini et tous les points du corps au moment donné possèdent la même vitesse $v = \omega_1 \cdot AB$.

Par conséquent, le mouvement résultant du corps sera un *mouvement de translation* (ou *mouvement instantané de translation*) à vitesse v, dont la valeur numérique est égale à $\omega_1 \cdot AB$ et qui est perpendiculaire au plan passant par les vecteurs ω_1 et ω_2; la direction du vecteur v est déterminée de la même façon que celle du

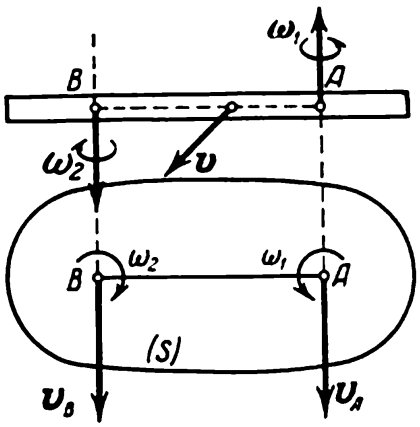


Fig. 228

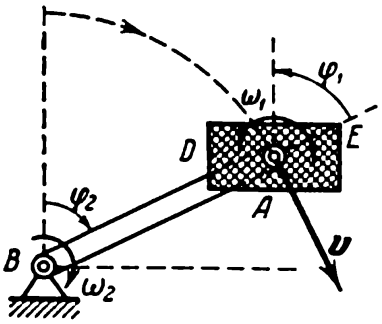


Fig. 229

moment m d'un couple de forces en statique (§ 44). Autrement dit, *le couple de rotations est équivalent à un mouvement de translation (ou à un mouvement instantané de translation) dont la vitesse v est égale au moment des vitesses angulaires du couple.*

Comme exemple d'un tel mouvement, on peut prendre le mouvement de translation d'une pédale de bicyclette DE par rapport au cadre de la bicyclette (fig. 229). Ce mouvement est le résultat de la rotation relative de la pédale autour de l'axe A, fixé à la manivelle BA, et de la rotation d'entraînement de la manivelle BA autour de l'axe B. Les vitesses angulaires ω_1 et ω_2 de ces mouvements sont égales en module, puisqu'à tout instant l'angle de rotation φ_1 de la pédale par rapport à la manivelle BA est égal à l'angle de rotation φ_2 de la manivelle. La vitesse du mouvement de translation de la pédale est $v = \omega_2 \cdot AB$.

§ 96. Transmissions par engrenages cylindriques. Les résultats obtenus au paragraphe précédent peuvent être utilisés pour le calcul cinématique des transmissions par engrenages, constituées de roues dentées cylindriques (pignons).

Examinons les types essentiels de ces transmissions.

1) On appelle *transmission normale* une transmission dont tous les axes de pignons en engrenage sont immobiles. Un des pignons (par exemple, le pignon *1* aux figures 230, 231) est le pignon menant, et tous les autres sont des pignons menés. Dans les cas d'un engrenage extérieur (fig. 230, *a*) ou intérieur (fig. 230, *b*) de deux pignons, on voit que $|\omega_1| r_1 = |\omega_2| r_2$, puisque la vitesse du point

d'engrenage A est la même pour les deux pignons. En tenant compte que le nombre z de dents des pignons engrenés est proportionnel à leurs rayons et que pour le cas d'un engrenage intérieur les pignons tournent dans le même sens tandis que pour un engrenage extérieur les sens de rotation des pignons sont opposés, on obtient [1]:

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)_{\text{ext}} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)_{\text{int}} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Dans le cas où trois pignons sont en engrenage extérieur (fig. 231), on trouve que

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1}; \quad \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{r_3}{r_2},$$

d'où

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_1} = \frac{z_3}{z_1}.$$

Par conséquent, le rapport des vitesses angulaires des pignons extrêmes d'un engrenage normal est en raison inverse de leurs rayons (du nombre de dents) et ne dépend pas des rayons des pignons intermédiaires.

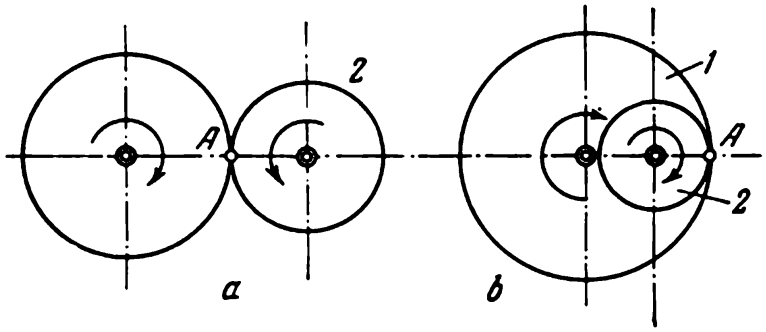


Fig. 230

Il découle des résultats obtenus que pour un engrenage normal de n pignons on aura:

$$\frac{\omega_1}{\omega_n} = (-1)^k \frac{r_n}{r_1} = (-1)^k \frac{z_n}{z_1}, \tag{90}$$

où k est le nombre d'engrenages *extérieurs* (au cas représenté à la figure 230, *a* il y a un seul engrenage extérieur; à la figure 231, deux engrenages extérieurs, à la figure 230, *b* il n'y a pas d'engrenage extérieur).

On appelle *rapport de transmission* d'un engrenage la valeur i_{1n} qui donne le rapport de la vitesse angulaire du pignon menant à la vitesse angulaire du pignon mené:

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n}. \tag{91}$$

Pour une transmission à engrenages normaux la valeur de i_{1n} est donnée par le membre droit de la formule (90).

---

[1] Dans toutes les formules de ce paragraphe ω représente la valeur algébrique (numérique) de la vitesse angulaire qui est affectée du signe plus en cas de rotation contraire à celle des aiguilles d'une montre, et du signe moins quand la rotation est celle des aiguilles d'une montre.

2) On appelle *planétaire* l'engrenage (voir fig. 232) où le pignon *1* est immobile, tandis que les axes des autres pignons du train sont portés par la manivelle AB qui tourne autour de l'axe du pignon immobile.

3) L'engrenage de la figure 232 est appelé *différentiel* dans le cas particulier, où le pignon *1* tourne aussi autour de son axe indépendamment du bras AB.

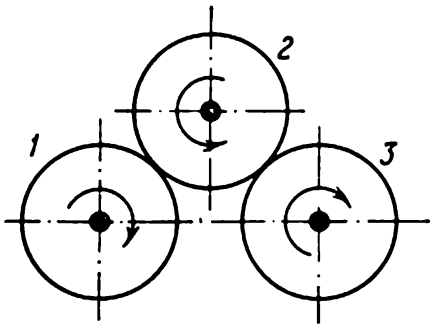


Fig. 231

On peut faire le calcul des engrenages planétaires et différentiels en supposant que tout le plan immobile Ax_1y_1 est animé d'un mouvement de rotation à vitesse angulaire ω_{AB} égale en module à la vitesse angulaire de la manivelle AB et de sens opposé à cette vitesse (*méthode d'arrêt* ou *de Willis*). Conformément aux résultats du paragraphe 95, pendant ce mouvement composé la manivelle reste

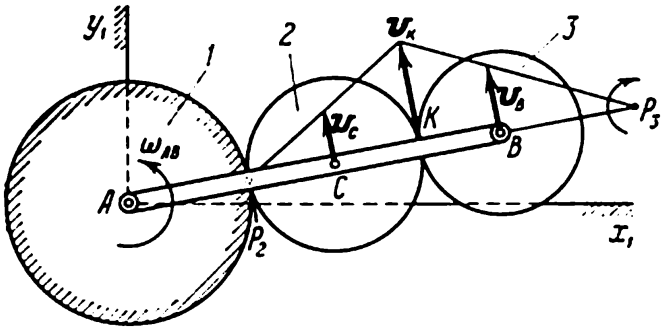


Fig. 232

immobile tandis que tout pignon de rayon r_k possède une vitesse angulaire $\tilde{\omega}_k = \omega_k - \omega_{AB}$, où ω_k est la vitesse angulaire absolue de ce pignon par rapport aux axes Ax_1y_1. Les axes de tous les pignons étant immobiles, on peut déterminer les relations entre les ω_k soit en égalant les vitesses des points d'engrenage, soit directement par la formule (90).

On peut aussi faire le calcul des engrenages planétaires ou différentiels à l'aide des centres instantanés des vitesses (§ 81).

Problème 90. Dans une transmission planétaire (fig. 232), le pignon *1* de rayon r_1 est immobile, tandis que la manivelle AB tourne avec une vitesse angulaire ω_{AB}. Déterminer la vitesse angulaire du pignon *3* de rayon r_3.

Solution. Désignons par ω_1 ($\omega_1 = 0$), ω_2 et ω_3 les vitesses angulaires absolues des pignons par rapport aux axes Ax_1y_1. Ayant communiqué une rotation de vitesse angulaire $-\omega_{AB}$ à tout le plan Ax_1y_1, on obtient dans ce mouve-

ment :

$$\tilde{\omega}_1 = 0 - \omega_{AB}, \quad \tilde{\omega}_2 = \omega_2 - \omega_{AB},$$
$$\tilde{\omega}_3 = \omega_3 - \omega_{AB}, \quad \tilde{\omega}_{AB} = 0.$$

Dans la transmission normale obtenue le nombre d'engrenages extérieurs est $k = 2$. Alors, conformément à la formule (90)

$$\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_3} = \frac{r_3}{r_1} \quad \text{ou} \quad \frac{-\omega_{AB}}{\omega_3 - \omega_{AB}} = \frac{r_3}{r_1}.$$

De là on déduit la vitesse angulaire absolue du pignon *3* :

$$\omega_3 = \left(1 - \frac{r_1}{r_3}\right) \omega_{AB}.$$

Si $r_3 > r_1$, le sens de rotation du pignon *3* coïncide avec le sens de rotation de la manivelle et quand $r_3 < r_1$, ils sont opposés. Au cas où $r_1 = r_3$, on obtient $\omega_3 = 0$. Dans ce cas le pignon *3* est en mouvement de translation.

La vitesse angulaire relative (par rapport à la manivelle AB) du pignon *3* peut être déterminée par la formule (86). Vu que la vitesse absolue $\omega_3 = \omega_{r3} + \omega_{AB}$ (pour le pignon *3* la vitesse angulaire ω_{AB} de la manivelle est une vitesse d'entraînement),

$$\omega_{r3} = \omega_3 - \omega_{AB} = -\frac{r_3}{r_1} \omega_{AB}.$$

Pour $r_3 = r_1$, on obtient $\omega_{r3} = -\omega_{AB}$. La vitesse angulaire relative ω_{r3} et la vitesse angulaire d'entraînement ω_{AB} forment un couple et on arrive ainsi par un autre raisonnement à la conclusion que le mouvement résultant du pignon *3* est, dans ce cas, un mouvement de translation avec la vitesse $v = \omega_{AB} \cdot AB$.

Autre solution[1]. La vitesse du point B du pignon *3* est égale à $v_B = (r_1 + 2r_2 + r_3)\, \omega_{AB}$. Déterminons aussi pour ce pignon la vitesse du point K qui est le point d'engrenage des pignons *2* et *3*. Pour le pignon *2*, la vitesse $v_C = (r_1 + r_2)\, \omega_{AB}$.

Le centre instantané des vitesses de ce pignon se trouve au point P_2 de contact avec le pignon *1*. Par conséquent, $v_K = 2v_C = 2\,(r_1 + r_2)\, \omega_{AB}$.

Dans ce cas, d'après la formule (56) (voir § 81),

$$\omega_3 = \frac{|v_B - v_K|}{BK} = \frac{r_3 - r_1}{r_3} \omega_{AB}.$$

On peut obtenir le même résultat en construisant le centre des vitesses P_3 du pignon *3*.

Problème 91. Le réducteur de vitesses (fig. 233) comprend : a) le pignon immobile *1* ; b) deux pignons jumelés *2* et *3* montés sur la manivelle liée à l'arbre menant AC (les pignons *2* et *1* sont en engrenage intérieur) ; c) le pignon *4*, porté par l'arbre mené B. Les nombres de dents des pignons sont égaux à : $z_1 = 120$; $z_2 = 40$; $z_3 = 30$; $z_4 = 50$. L'arbre menant fait $n_A = 1\,500$ tr/mn. Déterminer le nombre de tours par minute de l'arbre mené B.

Solution. Désignons les vitesses angulaires absolues : de l'arbre AC avec la manivelle par ω_A ; du pignon *4* avec l'arbre B par ω_B ; des pignons *2* et *3*

[1] Cette seconde solution est donnée pour montrer la possibilité d'utiliser dans ce cas les méthodes du § 81. On peut de la même façon résoudre les problèmes 91, 92. Ces solutions seront en général un peu plus compliquées (notamment pour le problème 92).

par ω_{23} (ces pignons tournent ensemble comme un seul corps). Le pignon *1* possède la vitesse angulaire $\omega_1 = 0$. Après avoir communiqué au plan x_1y_1, parallèlement auquel se déplace le mécanisme, une rotation de vitesse angulaire $-\omega_A$, on trouve que durant ce mouvement la manivelle est immobile ($\tilde{\omega}_A = 0$), tandis que les pignons possèdent les vitesses suivantes :

$$\tilde{\omega}_1 = 0 - \omega_A, \quad \tilde{\omega}_{23} = \omega_{23} - \omega_A, \quad \tilde{\omega}_4 = \omega_B - \omega_A.$$

En établissant maintenant les relations (90) pour les pignons *1* et *2* et pour les pignons *3* et *4*, on obtient :

$$\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_{23}} = \frac{z_2}{z_1}; \quad \frac{\tilde{\omega}_{23}}{\tilde{\omega}_4} = -\frac{z_4}{z_3}.$$

En multipliant ces égalités, on obtient :

$$\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_4} = -\frac{z_2z_4}{z_1z_3} \quad \text{ou} \quad \frac{-\omega_A}{\omega_B - \omega_A} = -\frac{z_2z_4}{z_1z_3}.$$

Il en découle, compte tenu que la grandeur n tr/mn est proportionnelle à ω, que

$$n_B = \left(1 + \frac{z_1z_3}{z_2z_4}\right) n_A = 4\,200 \text{ tr/mn}.$$

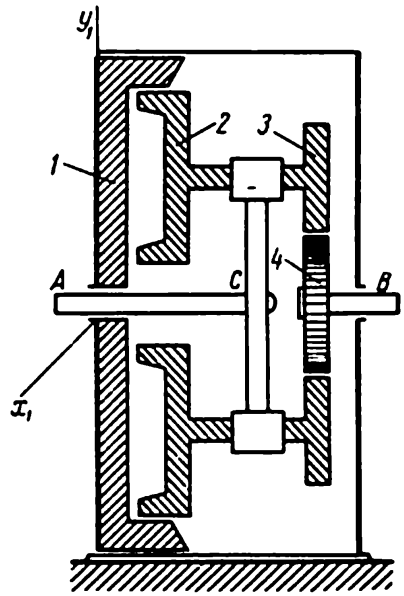


Fig. 233

Problème 92. Résoudre le problème précédent en supposant que le pignon *1* tourne dans le même sens que l'arbre menant AC, tout en développant $n_1 = 1\,100$ tr/mn (réducteur avec différentiel).

Solution. La solution reste la même que pour le problème 91 avec la seule différence qu'à présent $\omega_1 \neq 0$ (de plus, d'après les conditions du problème les signes de ω_1 et de ω_A coïncident) et, par suite, $\tilde{\omega}_1 = \omega_1 - \omega_A$.

Il en résulte que la proportion obtenue au problème 91

$$\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_4} = -\frac{z_2z_4}{z_1z_3} \quad \text{donne} \quad \frac{\omega_1 - \omega_A}{\omega_B - \omega_A} = -\frac{z_2z_4}{z_1z_3}.$$

En passant aux tours par minute on trouve que

$$n_B = n_A + \frac{z_1z_3}{z_2z_3}(n_A - n_1) = 2\,220 \text{ tr/mn}.$$

Si le pignon *1* tourne dans le sens opposé au sens de rotation de l'arbre AC, il faut changer le signe de n_1 dans le résultat obtenu.

§ 97. Composition des rotations autour de deux axes concourants. On peut se représenter le cas examiné si on suppose l'axe aa' de la figure 225 non parallèle à l'axe bb', mais le coupant en point O.

Si le mouvement absolu du corps est une composition des rotations relative et d'entraînement avec des vitesses angulaires ω_1 et ω_2 autour des axes Oa et Ob (fig. 234), la vitesse du point O, situé à la fois sur les deux axes, est évidemment égale à zéro.

Par conséquent, le mouvement résultant du corps est un mouvement autour du point fixe O et pour chaque intervalle de temps élémentaire il représente une rotation élémentaire de vitesse angulaire ω autour de l'axe instantané passant par le point O (§ 86).

Pour déterminer le vecteur ω on calcule la vitesse d'un point quelconque M du corps, qui a pour rayon-vecteur $\overline{OM} = \boldsymbol{r}$. Durant le mouvement relatif autour de l'axe Oa le point M, conformément à la formule (67), a la vitesse $\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}$; durant le mouvement d'entraînement autour de l'axe Ob le point a la vitesse $\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r}$. Par conséquent, la vitesse absolue du point M est égale à :

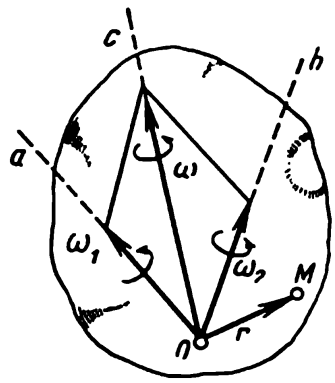


Fig. 234

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \boldsymbol{r}.$$

D'autre part, vu que le mouvement résultant du corps est une rotation instantanée de vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$, on a

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}.$$

Des résultats analogues seront obtenus pour tous les points du corps (c'est-à-dire pour n'importe quel $\boldsymbol{r}$). Il s'ensuit que

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2. \qquad (92)$$

Par conséquent, *lors de la composition des rotations autour de deux axes qui se coupent au point O, le mouvement résultant du corps sera une rotation instantanée autour de l'axe Oc passant par le point O et la vitesse angulaire* $\boldsymbol{\omega}$ *de cette rotation est égale à la somme géométrique des vitesses angulaires relative et d'entraînement.* L'axe instantané de rotation Oc est dirigé le long du vecteur $\boldsymbol{\omega}$, c'est-à-dire suivant la diagonale du parallélogramme construit avec les vecteurs $\boldsymbol{\omega}_1$ et $\boldsymbol{\omega}_2$.

Au cours du temps, l'axe Oc change sa position tout en décrivant une surface conique dont le sommet est en O.

Problème 93. Déterminer la vitesse angulaire absolue ω de la roue conique (voir le problème 80, § 87) si on a : rayon de la roue $AC = R$, distance $OA = l$ et si la vitesse v_A du point A est connue (fig. 235).

Solution. Le mouvement absolu de la roue résulte de sa rotation relative autour de l'axe OA à une vitesse angulaire ω_1 et de la rotation d'entraînement de la manivelle OA autour de l'axe OB à une vitesse angulaire ω_2; on a

$$\omega_2 = \frac{v_A}{l}.$$

L'axe instantané de rotation et le vecteur vitesse angulaire absolue $\boldsymbol{\omega}$ sont dirigés le long de OC, parce que la vitesse du point C est égale à zéro (voir le problème 80). Construisant le parallélogramme correspondant, on trouve que

$$\omega = \frac{\omega_2}{\sin \alpha}.$$

Etant donné que $\sin\alpha = \frac{R}{\sqrt{l^2+R^2}}$, on obtient en définitive:

$$\omega = \frac{v_A}{R}\sqrt{1+\frac{R^2}{l^2}}.$$

On peut obtenir ce résultat d'une autre façon (compte tenu que OC est l'axe instantané de rotation), à partir de l'égalité $v_A = \omega h$, où $h = l \sin\alpha$.

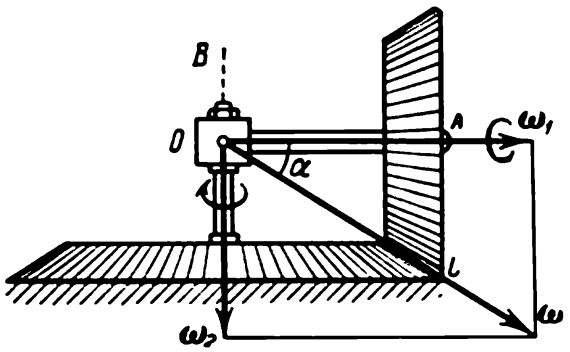


Fig. 235

Le mouvement de la roue se compose d'une série de rotations élémentaires à vitesse angulaire ω autour de l'axe OC qui change constamment de position et décrit un cône circulaire avec le sommet au point O.

§ 98. Composition d'une translation et d'une rotation. Mouvement hélicoïdal. Examinons le mouvement d'un corps solide composé d'un mouvement de translation et d'une rotation. Trois cas peuvent avoir lieu.

1) La vitesse de translation est perpendiculaire à l'axe de rotation ($v \perp \omega$). Admettons que le mouvement composé comprend la rotation autour de l'axe Aa avec la vitesse angulaire ω et la translation avec la vitesse v, perpendiculaire à ω (fig. 236). Il est clair que ce mouvement est (par rapport au plan Π perpendiculaire à l'axe Aa) un mouvement plan, étudié en détail au chapitre XII. Si on considère le point A comme pôle, le mouvement examiné, comme tout mouvement plan, comprendra en effet un mouvement de translation avec la vitesse $v_A = v$, c'est-à-dire avec la vitesse du pôle, et une rotation autour de l'axe Aa qui passe par le pôle.

On peut remplacer le vecteur v par le couple des vitesses angulaires ω', ω'' (§ 95), considérant que $\omega' = \omega$ et $\omega'' = -\omega$; la distance AP est donnée par l'égalité $v = \omega' \cdot AP$, d'où (compte tenu de ce que $\omega' = \omega$)

$$AP = \frac{v}{\omega}. \tag{93}$$

L'addition des vecteurs ω et ω'' donne zéro et on trouve que dans ce cas le mouvement du corps peut être considéré comme une

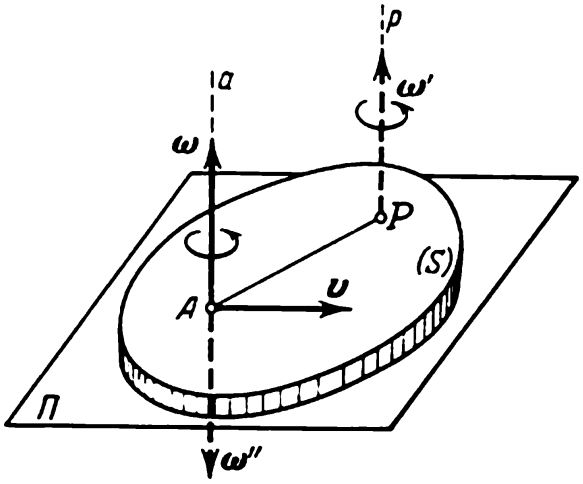


Fig. 236

rotation instantanée autour de l'axe Pp avec une vitesse angulaire $\omega' = \omega$. Ce résultat a déjà été obtenu par une autre voie (§ 81). De la comparaison des égalités (53) et (93) il est clair que pour la section (S) du corps le point P est le centre instantané des vitesses ($v_P = 0$). On est une fois de plus convaincu que la rotation du corps autour des axes Aa et Pp s'effectue avec la même vitesse angulaire ω, c'est-à-dire que la composante de rotation du mouvement composé ne dépend pas du choix du pôle (§ 77).

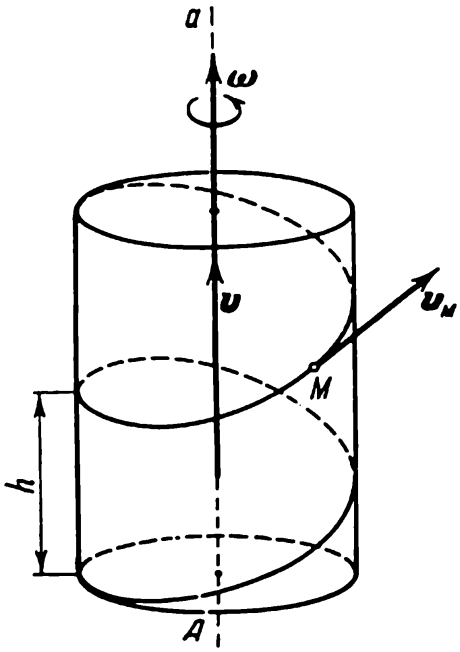


Fig. 237

2) Mouvement hélicoïdal ($v \parallel \omega$). Si le mouvement composé du corps comprend une rotation autour de l'axe Aa à une vitesse angulaire ω et une translation à une vitesse v, parallèle à l'axe Aa (fig. 237), on appelle ce mouvement du corps *mouvement hélicoïdal*. L'axe Aa est appelé *axe hélicoïdal*. Quand les vecteurs v et ω sont dirigés dans le même sens, selon la règle de représentation adoptée, la vis est à droite et elle sera à gauche si les vecteurs sont dirigés dans des sens opposés.

La distance parcourue pendant un tour de rotation par n'importe quel point du corps, situé sur l'axe de la vis, est appelée *pas* h de la vis. Si les grandeurs v et ω sont constantes, le pas de la vis est aussi constant. Désignant le temps d'un tour par T, on obtient que $vT = h$ et $\omega T = 2\pi$, d'où

$$h = 2\pi \frac{v}{\omega}.$$

Un point quelconque M d'une vis à pas constant décrit une courbe hélicoïdale. La vitesse du point M, situé à la distance r de

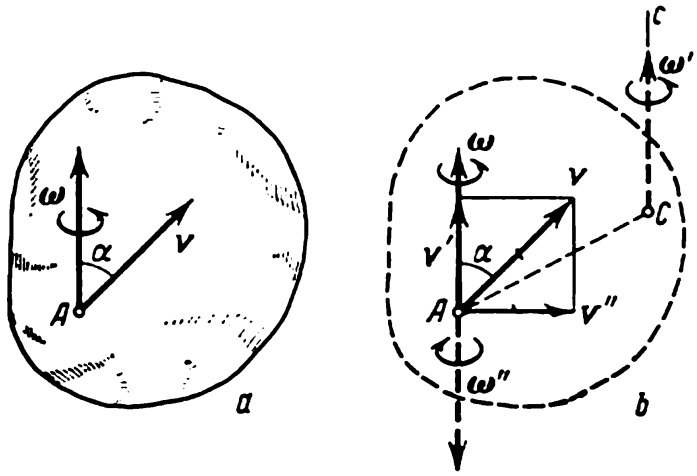


Fig. 238

l'axe de la vis, est composée de la vitesse de translation v et de la vitesse ωr, perpendiculaire à elle, provenant de la rotation. Il s'ensuit que

$$v_M = \sqrt{v^2 + \omega^2 r^2}.$$

La vitesse v_M est dirigée suivant la tangente à la courbe hélicoïdale. Si on coupe la surface cylindrique, sur laquelle se déplace le point M, suivant une génératrice et si on déploie cette surface, il est évident que les courbes hélicoïdales se transforment en lignes droites inclinées sur la base du cylindre d'un angle α ($tg\,\alpha = h/2\pi r$).

3) La vitesse du mouvement de translation forme un angle arbitraire avec l'axe de rotation. Le mouvement composé, réalisé par le corps dans ce cas-là (fig. 238, *a*), est un mouvement examiné au paragraphe 88 (cas général du mouvement du corps solide libre).

Décomposons le vecteur v (fig. 238, *b*) en ses composantes: 1) v', dirigée le long de ω ($v' = v \cos \alpha$), et 2) v'', perpendiculaire à ω ($v'' = v \sin \alpha$). La vitesse v'' peut être remplacée par le couple des vitesses angulaires $\omega' = \omega$ et $\omega'' = -\omega$ (comme à la figure 236), après quoi on peut ne pas tenir compte des vecteurs ω et

ω''. On trouve la distance AC à partir de la formule (93):

$$AC = \frac{v''}{\omega} = \frac{v \sin \alpha}{\omega}.$$

Le mouvement du corps n'est alors qu'une rotation à vitesse angulaire ω' et une translation à vitesse v'. Par conséquent, la distribution des vitesses des points du corps à l'instant donné sera la même que dans le cas du mouvement hélicoïdal autour de l'axe Cc avec la vitesse angulaire $\omega' = \omega$ et avec la vitesse de translation $v' = v \cos \alpha$. La position de l'axe Cc change pendant le mouvement du corps. C'est pourquoi cet axe est appelé *axe instantané hélicoïdal.*

Par transformations réalisées (fig. 238, *b*) on est passé du pôle A au pôle C. Il en résulte que dans le cas général du mouvement la vitesse angulaire ne change pas pour un changement de pôle ($\omega' = \omega$) et que c'est seulement la vitesse de translation ($v' \neq v$) qui change.

Troisième partie

Dynamique du point

Chapitre XVI

INTRODUCTION À LA DYNAMIQUE. LES LOIS DE LA DYNAMIQUE

§ 99. Notions et définitions principales. *On appelle dynamique la partie de la mécanique qui étudie les lois du mouvement des corps matériels soumis à l'action des forces.*

Le mouvement des corps a été étudié en cinématique du point de vue purement géométrique. Contrairement à la cinématique, pendant l'étude du mouvement des corps on tient compte en dynamique aussi bien des forces agissantes que de l'inertie des corps matériels.

La notion de force en tant que grandeur donnant la mesure de l'interaction mécanique des corps matériels a été introduite en statique. Toutefois, en statique on a supposé que toutes les forces sont constantes et on n'a pas abordé la question des variations éventuelles de ces forces en fonction du temps. Or, un corps en mouvement subit très souvent de pair avec l'influence de certaines forces constantes (on peut estimer constante la force de la pesanteur) l'action de certaines forces variables, dont les modules et les directions varient pendant le mouvement de ce corps. En même temps, cette variabilité peut affecter non seulement les forces données (actives), mais aussi les forces de réactions des liaisons.

L'expérience a établi que les forces variables peuvent dépendre d'une façon déterminée *du temps*, *de la position du corps* et *de sa vitesse*. La force de traction d'une locomotive électrique dépendra, en particulier, du temps dans les intervalles où s'opèrent le branchement ou le débranchement graduels du rhéostat ; la force qui provoque la vibration du bâti d'un moteur dont l'arbre est mal centré est aussi fonction du temps ; la force newtonienne de la pesanteur de même que la force élastique d'un ressort dépendent de la position du corps ; les forces de résistance d'un milieu (l'eau, l'air) à l'avancement dépendent de la vitesse du mouvement. Ce sont surtout ces forces qui constituent avec les forces constantes l'objet de l'étude de la dynamique. Les lois de composition des forces constantes sont valables également pour les forces variables.

La comparaison des résultats de l'action d'une même force sur différents corps matériels conduit à la notion d'inertie des corps. L'expérience a établi qu'en général si l'on applique une même force à deux corps différents, non soumis à d'autres actions et se trouvant au repos, en un même laps de temps ces corps auront parcouru des distances inégales et acquis des vitesses différentes.

L'*inertie* caractérise la *propriété des corps matériels de changer plus ou moins rapidement la vitesse de leur mouvement sous l'impulsion de forces qui leur sont appliquées.* Si, par exemple, sous l'impulsion de forces égales la vitesse d'un corps varie plus lentement que celle d'un autre, on dit que le premier corps est plus inerte que le second et inversement. Le degré plus ou moins grand d'inertie d'un corps donné dépend de la quantité de substance (de matière) qu'il contient.

La grandeur dépendant de la quantité de substance d'un corps donné et déterminant la mesure de son inertie est appelée masse du corps. En mécanique on considère que la masse m est une grandeur scalaire, positive et constante pour chacun des corps donnés. Les variations de la masse seront étudiées au paragraphe suivant.

Dans le cas général, le mouvement du corps ne dépend pas seulement de la masse totale et des forces appliquées; le caractère du mouvement peut être également lié aux dimensions géométriques du corps et à la disposition relative des particules qui le constituent (c'est-à-dire à la distribution des masses).

Afin de ne pas tenir compte, dans une étude préliminaire, de l'influence des dimensions des corps et de la distribution des masses, on introduit la notion de point matériel.

On appelle point matériel un corps matériel (corps possédant une masse) dont on peut négliger les dimensions lorsqu'on étudie son mouvement.

En pratique, on peut estimer qu'un corps donné est un point matériel, si les distances parcourues par les points de ce corps pendant son mouvement sont très grandes par rapport aux dimensions du corps lui-même [1]. En outre, nous verrons en dynamique des systèmes que l'on peut toujours considérer un corps en *mouvement de translation* comme un point matériel dont la masse est égale à la masse totale du corps considéré.

Enfin, on peut assimiler les différentes parties du corps, en lesquelles on le divise mentalement dans le but de déterminer telle ou telle de ses caractéristiques dynamiques, à des points matériels.

---

[1] Par exemple, on peut assimiler une planète à un point matériel lorsqu'on étudie son mouvement autour du Soleil et, de même, un obus peut être pris pour un point matériel quand on étudie la portée de sa trajectoire.

Il est naturel que l'étude du mouvement d'un point matériel précède celle du mouvement d'un système de points et notamment celle du corps solide. C'est pourquoi on subdivise habituellement le cours de dynamique en dynamique du point et en dynamique des systèmes de points matériels.

§ 100. Lois de la dynamique. La dynamique se fonde sur les lois où sont généralisés les résultats de nombreuses expériences et observations sur le mouvement des corps et qu'a justifiées la pratique sociale et historique de l'humanité.

Pour la première fois ces lois furent systématisées par I. Newton dans son ouvrage classique *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, édité en 1687.

La première loi (loi de l'inertie), découverte par Galilée (1638), s'énonce: *un point matériel, libre de toute contrainte extérieure, conserve son état de repos ou de mouvement rectiligne et uniforme tant que les forces appliquées ne l'obligent à changer cet état.* Le mouvement accompli par le point en l'absence des forces est appelé mouvement *par inertie.*

La loi de l'inertie traduit une des propriétés fondamentales de la matière, celle d'être toujours en mouvement, et établit pour les corps matériels l'équivalence entre les états de repos et de mouvement par inertie. Il en découle que si $\boldsymbol{F} = 0$, le point est soit au repos soit en mouvement à une vitesse constante (en module et en direction $\boldsymbol{v} = \text{const.}$); l'accélération du point est dans ce cas nulle ($\boldsymbol{w} = 0$).

Le système de référence, par rapport auquel la loi de l'inertie est vérifiée, est appelé *système d'inertie* (parfois on l'appelle conventionnellement système immobile). D'après les données d'expériences, dans le système solaire le système d'inertie est un système de référence ayant pour origine le centre du Soleil et pour axes des demi-droites orientées vers trois étoiles considérées comme immobiles. Pour résoudre la majorité des problèmes techniques avec une précision suffisante pour la pratique, on peut choisir pour système d'inertie un système de référence lié rigidement à la Terre. La justesse de cette affirmation sera établie au chapitre XX.

La deuxième loi (loi fondamentale de la dynamique) établit comment varie la vitesse du point sous l'action d'une force quelconque. Elle s'énonce ainsi: *le produit de la masse du point par l'accélération que lui imprime une force donnée est égal à cette force en module, la direction de l'accélération coïncidant avec celle de la force.*

L'expression mathématique de cette loi est fournie par l'égalité vectorielle

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}. \tag{1}$$

On peut écrire également la relation suivante entre les modules de l'accélération et de la force:

$$mw = F. \tag{2}$$

La deuxième loi de la dynamique, ainsi que la première, se rapporte uniquement à un système d'inertie ou de Galilée. Il découle immédiatement de cette loi que la mesure de l'inertie d'un point matériel est représentée par sa masse, car sous l'impulsion d'une même force deux points matériels différents ne reçoivent une même accélération que dans les cas de masses égales; si les masses sont différentes, le point de masse plus grande (c'est-à-dire de plus grande inertie) acquiert une accélération plus petite et inversement.

Si le point est soumis simultanément à plusieurs forces, on peut les remplacer par leur résultante $\boldsymbol{R}$, égale à la somme géométrique de ces forces. L'équation qui exprime la loi fondamentale de la dynamique devient alors:

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{R} \quad \text{ou} \quad m\boldsymbol{w} = \Sigma \boldsymbol{F}_k. \tag{3}$$

Mesure de la masse. L'égalité (2) permet de déterminer la masse du corps si on connaît l'accélération du mouvement de translation et la force agissante. On sait par expérience que sous l'action de la force de la pesanteur $\boldsymbol{P}$ tous les corps ont pendant la chute libre (d'une petite hauteur dans le vide) la même accélération g, appelée *accélération de la pesanteur* ou *accélération de la chute libre* [1]. En vertu de l'égalité (2), nous aurons donc pour ce mouvement $mg = P$, d'où

$$m = \frac{P}{g}. \tag{4}$$

Ainsi, *la masse du corps est égale à son poids divisé par l'accélération de la pesanteur g.*

La troisième loi (loi de l'égalité de l'action et de la réaction) établit le caractère de l'interaction mécanique entre les corps matériels. Elle s'énonce ainsi pour deux points matériels: *deux points matériels agissent l'un sur l'autre avec des forces égales en module et dirigées le long de la droite qui relie ces points dans les sens opposés.*

Notons que les forces de l'interaction entre les points matériels libres (ou entre les corps) ne constituent pas un système en équilibre, puisque ces forces sont appliquées à des objets différents. Par exemple, si on place sur une surface lisse et horizontale à une cer-

[1] La loi de la chute libre des corps fut découverte par Galilée. La grandeur de g est différente en divers lieux de la surface de la Terre; elle dépend de la latitude géographique du lieu considéré et de sa position au-dessus du niveau de la mer. A la latitude de Moscou (à l'altitude correspondant au niveau de la mer) $g = 9{,}8157$ m/s^2.

taine distance l'un de l'autre un morceau de fer et un aimant, ils se rapprocheront progressivement (au lieu de conserver leur état de repos). En même temps, puisque les forces agissant sur chacun des corps sont égales en module, les accélérations des corps, en vertu de la deuxième loi de la dynamique, seront inversement proportionnelles à leurs masses.

La troisième loi de la dynamique, qui établit le caractère de l'interaction des particules matérielles, joue un grand rôle dans la dynamique des systèmes.

§ 101. Systèmes d'unités. Les unités de mesure de longueurs et du temps ont été introduites en cinématique. Pour mesurer les grandeurs dynamiques il faut en outre définir une unité de mesure pour la masse m ou pour la force F ; on ne peut pas choisir arbitrairement ces deux unités, car elles doivent être liées entre elles par l'égalité (2). De cette considération découle la possibilité de définir en dynamique deux types différents de systèmes d'unités.

Systèmes d'unités du premier type. Dans ces systèmes on prend pour grandeurs fondamentales : 1) l'unité de longueur (centimètre ou mètre, par exemple) ; 2) l'unité de temps (la seconde, par exemple) ; 3) l'unité de masse (le gramme, le kilogramme ou la tonne de masse, par exemple).

Dans ces systèmes, la force est une unité dérivée. Par exemple, dans le système CGS (le centimètre, le gramme, la seconde) l'unité de force est la dyne $\left(1 \text{ dyne} = 1 \frac{\text{g}\cdot\text{cm}}{\text{s}^2}\right)$.

Systèmes d'unités du deuxième type. Dans de tels systèmes, on prend pour grandeurs fondamentales : 1) l'unité de longueur (le mètre, par exemple) ; 2) l'unité de temps (la seconde, par exemple ; 3) l'unité de force (le kilogramme ou la tonne de force, par exemple). Dans ces systèmes la masse est une unité dérivée $\left(\text{par exemple, } 1 \frac{\text{kg}\cdot\text{s}^2}{\text{m}}\right)$.

La différence de principe entre ces deux types de systèmes d'unités réside dans le fait que pour les premiers l'unité dynamique de base est l'unité de masse, et pour les seconds, l'unité de force.

En technique, le système actuellement le plus répandu est le système des unités pratiques pour lequel les unités de base sont le mètre, le kilogramme-force et la seconde. Nous l'utiliserons fréquemment dans la suite de ce manuel.

§ 102. Problèmes de la dynamique du point matériel libre et gêné. Dans le cas du point matériel libre les problèmes qui forment l'objet de la dynamique sont les suivants : 1) sachant la loi du mouvement du point, déterminer la force qui agit sur lui (*premier problème de la dynamique*) ; 2) sachant les forces qui agissent sur le

point matériel, déterminer la loi de son mouvement (*deuxième problème* ou *problème fondamental de la dynamique*).

La résolution de ces problèmes est fournie par les équations (1) ou (3), qui expriment la loi fondamentale de la dynamique; en effet, elles établissent la liaison entre l'accélération w, c'est-à-dire la grandeur caractérisant le mouvement du point, et les forces agissant sur lui.

Les problèmes techniques impliquent très souvent l'étude du mouvement *gêné* du point lequel est assujetti à des liaisons qui l'obligent à se mouvoir sur une surface ou sur une courbe immobile donnée.

En pareils cas, on se fondera, comme lors de la solution des problèmes en statique, sur l'axiome des liaisons selon lequel *on peut considérer tout point matériel gêné comme un point libre et rejeter la liaison en la remplaçant par une force de réaction de liaison* N. Dans ce cas, la loi fondamentale de la dynamique pour le mouvement gêné du point se mettra sous la forme

$$mw = \sum F_k^a + N, \tag{5}$$

où F_k^a désigne les forces actives agissant sur le point.

Dans le cas du mouvement gêné, le premier problème de la dynamique se ramène à déterminer la réaction de liaison si l'on connaît le mouvement du point et les forces actives qui agissent sur lui. Le deuxième problème (fondamental) de la dynamique du mouvement gêné se subdivise en deux problèmes et consiste à déterminer: a) la loi de mouvement du point, b) la réaction de la liaison appliquée, connaissant les forces actives qui agissent sur le point.

§ 103. Solution du premier problème de la dynamique (détermination des forces d'après la loi du mouvement). Quand l'accélération du point en mouvement est donnée, la force agissante et la réaction de liaison dérivent toutes les deux des équations (1) ou (5). En outre, pour calculer la réaction, il faut connaître également les forces actives. Quand l'accélération n'est pas directement donnée, mais la loi du mouvement du point est connue, pour déterminer la force (ou la réaction), il faut au préalable calculer l'accélération en se servant des formules adéquates de la cinématique (voir les paragraphes 59, 67, 69).

Problème 94. Un aérostat dont le poids est égal à P descend avec une accélération w. Quelle charge Q (lest) faut-il jeter pour que ce mouvement descendant devienne un mouvement ascendant de même accélération.

Solution. L'aérostat descendant est soumis à l'action de la force de pesanteur P et à l'action de la force ascensionnelle F (fig. 239, *a*). Par conséquent, d'après l'équation (3)

$$\frac{P}{g} w = P - F.$$

Quand on jettera le lest (fig. 239, *b*), le poids de l'aérostat sera égal à $P - Q$, tandis que la force ascensionnelle reste la même. Dans ce cas, si l'on tient compte du fait que l'aérostat se déplace vers le haut, on aura :

$$\frac{P-Q}{g} w = F - (P-Q).$$

Eliminons la force inconnue F de ces équations, on trouve :

$$Q = \frac{2P}{1 + \frac{g}{w}}.$$

Problème 95. Un ascenseur d'un poids P (fig. 240) s'élève avec une accélération w. Déterminer la tension du câble.

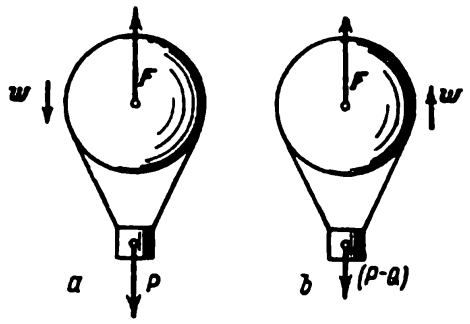


Fig. 239

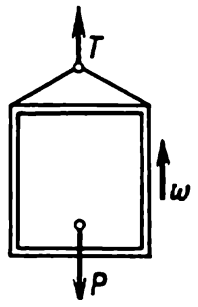


Fig. 240

Solution. En considérant l'ascenseur comme un corps libre, on remplace l'action de liaison (du câble) par la force de réaction T et, écrivant l'équation (5), on obtient :

$$\frac{P}{g} w = T - P.$$

Il en découle que :

$$T = P\left(1 + \frac{w}{g}\right).$$

Si l'ascenseur descendait avec la même accélération, la tension du câble serait égale à

$$T_1 = P\left(1 - \frac{w}{g}\right).$$

Problème 96. Le rayon de courbure d'un point est égal à R au point A (fig. 241). Trouver quelle pression exerce sur le pont au point A une automobile d'un poids P, se déplaçant à la vitesse v.

Solution. Au point A l'automobile possède l'accélération normale $w_n = \frac{v^2}{R}$. En même temps elle subit l'action de la force de pesanteur P et de la réaction N. Il vient alors de l'équation (5)

$$\frac{P}{g}\frac{v^2}{R} = P - N.$$

Il en résulte que

$$N = P\left(1 - \frac{v^2}{gR}\right).$$

La pression sur le pont est égale en module à N, mais elle est dirigée vers le bas.

Problème 97. Une manivelle OA de longueur l tourne uniformément à la vitesse angulaire ω et déplace la coulisse K qui accomplit un mouvement de translation le long des glissières *1*, *1* (fig. 242). En négligeant la friction, déterminer la force de pression Q du patin A sur la coulisse, si le poids de la coulisse est égal à P.

Solution. La position de la coulisse est déterminée par la coordonnée $x = l \cos \varphi$. Vu que $\varphi = \omega t$, la loi de mouvement de la coulisse est

$$x = l \cos \omega t.$$

Formons l'équation (5) pour la coulisse en projetant les forces agissant sur l'axe Ox. On obtient que $mw_x = Q_x$. Mais $w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -l\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x$.

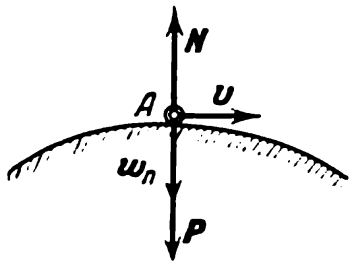


Fig. 241

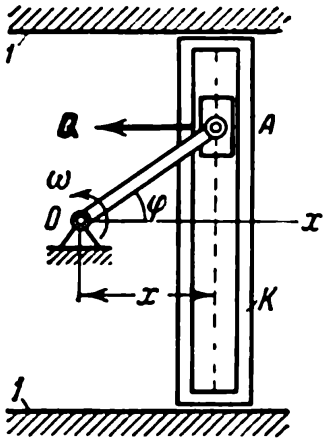


Fig. 242

Etant donné que $Q_x = -Q$, il en découle que:

$$-\frac{P}{g}\omega^2 x = -Q, \quad Q = \frac{P}{g}\omega^2 x.$$

Par conséquent, la force de pression du patin sur la coulisse varie proportionnellement à sa distance x du centre O.

Les exemples considérés montrent que la solution du premier problème de la dynamique est assez simple et qu'en outre, si l'accélération du point en mouvement n'est pas directement donnée, on la trouve par simples calculs cinématiques. C'est pourquoi, et étant donné également son importance pratique, la solution du deuxième problème, que l'on considère comme le problème fondamental de la dynamique, occupe en dynamique une place importante.

Chapitre XVII

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT DU POINT ET LEUR INTÉGRATION

§ 104. Mouvement rectiligne du point. On a vu en cinématique que dans un mouvement rectiligne la vitesse et l'accélération du point sont toujours dirigées le long d'une même droite. Etant donné que la direction de l'accélération coïncide avec celle de la force,

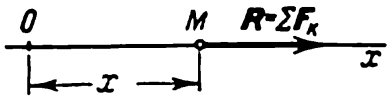


Fig. 243

il en résulte qu'un point matériel libre sera animé d'un mouvement rectiligne quand la force qui agit sur lui possède une direction constante et si la vitesse du point au moment initial est égale à zéro ou est dirigée suivant la direction de la force.

Examinons un point matériel qui est en mouvement rectiligne sous l'action de la force appliquée $\boldsymbol{R} = \Sigma \boldsymbol{F}_k$. La position du point sur la trajectoire est déterminée par sa coordonnée x (fig. 243). En ce cas le problème fondamental de la dynamique consiste à trouver la loi du mouvement de ce point, c'est-à-dire à déterminer $x = f(t)$, à partir de $\boldsymbol{R}$. L'équation (3) exprime la liaison entre x et $\boldsymbol{R}$. En projetant ses deux membres sur l'axe Ox, on obtient:

$$mw_x = R_x \equiv \sum F_{kx}$$

ou, vu que $w_x = \frac{d^2x}{dt^2}$,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}. \tag{6}$$

L'équation (6) est appelée *équation différentielle du mouvement rectiligne du point* [1].

Très souvent il est plus commode de remplacer l'équation (6) par deux équations différentielles, contenant les dérivées premières:

$$m\frac{dv_x}{dt} = \sum F_{kx}, \tag{7}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x. \tag{7'}$$

[1] C'est une équation différentielle car elle exprime la dépendance entre la variable x et ses dérivées. L'équation (6) permet aussi de résoudre le premire problème de la dynamique, c'est-à-dire, en connaissant la loi du mouvement du point $x = f(t)$, de trouver la force agissante F_x.

Quand la résolution des problèmes de la mécanique nécessite la recherche de la vitesse en fonction de la coordonnée x et non pas du temps t (ou quand les forces elles-mêmes dépendent de x), on exprime l'équation (7) par rapport à la variable x. Etant donné que $\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv_x}{dx}v_x$, on obtient au lieu de l'équation (7)

$$mv_x\frac{dv_x}{dx} = \sum F_{kx}. \tag{8}$$

La solution du problème fondamental de la dynamique se ramène alors à déterminer, connaissant les forces, la loi du mouvement du point à partir des équations données, c'est-à-dire à trouver $x = f(t)$ si les forces agissantes sont connues. Pour cela il faut intégrer l'équation différentielle correspondante. Pour avoir une idée nette de ce problème mathématique il faut se souvenir que les forces qui entrent dans le membre droit de l'équation (6) peuvent dépendre du temps t, de la position du point, c'est-à-dire de x, et de sa vitesse, ou autrement dit de $v_x = \frac{dx}{dt}$ (voir § 99). Par conséquent, dans le cas général, l'équation (6) représente du point de vue mathématique une équation différentielle du deuxième ordre, de la forme:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \Phi\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right). \tag{9}$$

On résout cette équation pour chaque problème particulier après avoir établi l'expression concrète du membre droit. En intégrant l'équation (9) on trouvera deux constantes d'intégration C_1 et C_2 et la solution générale sera ainsi de la forme

$$x = f(t,\ C_1,\ C_2). \tag{10}$$

Pour obtenir la solution définitive de chaque problème particulier, il faut déterminer les valeurs concrètes des constantes C_1 et C_2. On utilise pour cela les *conditions initiales.*

On entreprend l'étude de tout mouvement à partir d'un certain moment du temps que l'on nomme *moment initial.* A partir de ce moment-là, on calcule le temps écoulé pendant le mouvement en considérant qu'au moment initial $t = 0$. On prend habituellement pour moment initial l'instant où débute le mouvement sous l'action des forces données. La position occupée par le point au moment initial est appelée position initiale et sa vitesse — *vitesse initiale* (le point possède une vitesse initiale si avant l'instant $t = 0$ il était en mouvement soit par inertie, soit sous l'effet de forces quelconques). Ainsi, pour résoudre le problème fondamental de la dynamique, il faut connaître, outre les forces agissantes, les *conditions initiales*, c'est-à-dire la position et la vitesse de ce point au moment initial.

Dans le cas du mouvement rectiligne les conditions initiales ont l'expression suivante:

$$\text{pour} \quad t = 0, \quad x = x_0, \quad v_x = v_0. \tag{11}$$

On peut déterminer à partir des conditions initiales les valeurs concrètes des constantes C_1 et C_2 et trouver l'expression définitive de la loi du mouvement du point sous la forme

$$x = f(t, x_0, v_0). \tag{12}$$

Expliquons ce qui a été dit sur un exemple concret très simple. Supposons que le point subit l'action d'une force Q *constante en module et en direction*. L'équation (7) prend alors la forme suivante

$$m\frac{dv_x}{dt} = Q_x.$$

Etant donné que $Q_x = \text{const}$, on obtient en multipliant les deux membres de l'équation par dt et en intégrant [1]:

$$v_x = \frac{Q_x}{m}t + C_1. \tag{13}$$

En substituant la valeur trouvée de v_x dans l'équation (7') on aura:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Q_x}{m}t + C_1.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par dt et en intégrant de nouveau, on trouve:

$$x = \frac{1}{2}\frac{Q_x}{m}t^2 + C_1t + C_2. \tag{14}$$

Le résultat obtenu représente justement pour le problème donné la solution de l'équation (9) sous la forme correspondant à l'égalité (10).

Déterminons maintenant les constantes d'intégration C_1 et C_2, pour les conditions initiales (11). Les solutions (13) et (14) doivent être vérifiées pour chaque instant de temps, y compris $t = 0$. C'est pourquoi en posant $t = 0$ dans les équations (13) et (14), nous devons obtenir v_0 et x_0 au lieu de v_x et de x, c'est-à-dire:

$$v_0 = C_1, \quad x_0 = C_2.$$

Les égalités ainsi obtenues définissent les valeurs des constantes C_1 et C_2 qui satisfont aux conditions initiales du problème donné. En substituant ces valeurs dans l'équation (14), on trouve en définitive la loi du mouvement sous la forme correspondant à l'éga-

[1] On n'écrit pas la constante d'intégration du membre gauche en supposant qu'elle a été transférée à droite et incluse dans C_1.

lité (12):

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\frac{Q_x}{m} t^2. \tag{15}$$

Il apparaît de l'équation (15) que sous l'action d'une force constante le point effectue un mouvement uniformément varié, ce que l'on pouvait prédire à l'avance, car si Q = const., w est aussi constante. En particulier, un tel mouvement est celui d'un point matériel soumis à l'action de la pesanteur. Dans ce cas l'équation (15) donne $\frac{Q_x}{m} = g$, et l'axe Ox doit être dirigé suivant la verticale vers le bas.

§ 105. **Résolution des problèmes.** La méthode d'intégration des équations différentielles du mouvement permet de résoudre les problèmes de la dynamique dans les cas où le point matériel est soumis à l'action de forces quelconques (voir § 99).

La résolution se ramène alors aux opérations suivantes:

1. Formation de l'équation différentielle du mouvement. Pour former les équations du mouvement il faut:

a) choisir l'origine des coordonnées (d'habitude, en position initiale du point) et tracer l'axe des coordonnées suivant la trajectoire du mouvement en l'orientant en règle générale dans le sens du mouvement; si sous l'action des forces appliquées le point peut occuper une position d'équilibre, il est commode de situer l'origine dans cette position d'équilibre statique;

b) représenter une position arbitraire du point en mouvement (toutefois de manière que $x > 0$ et $v_x > 0$; cette dernière condition est importante si parmi les forces certaines dépendent de la vitesse) et indiquer toutes les forces agissant sur le point;

c) calculer la somme des projections de toutes les forces sur l'axe de coordonnée et substituer cette somme dans le membre droit de l'équation différentielle du mouvement. *On doit nécessairement exprimer toutes les forces variables en fonction des grandeurs* (t, x ou v) *dont elles dépendent.*

2. Intégration de l'équation différentielle du mouvement. L'intégration est réalisée par les procédés étudiés dans un cours de mathématique supérieure et leur choix dépend de la forme concrète de l'équation obtenue, c'est-à-dire de l'expression correspondante de la partie droite de l'équation (9). Dans le cas où en dehors des forces constantes le point ne subit que l'action d'une *seule* force variable, on peut intégrer l'équation du mouvement rectiligne par la méthode de la séparation des variables (voir les problèmes 98—100). Si on doit déterminer uniquement la vitesse du mouvement, la résolu-

tion peut être ramenée à l'intégration de l'une des équations (7) ou (8).

3. Détermination des constantes d'intégration. Pour déterminer les constantes d'intégration il faut en se servant des données du problème établir les conditions initiales sous la forme (11). Les valeurs des constantes sont alors trouvées à partir des conditions initiales de la manière indiquée au paragraphe 104. On peut déterminer les constantes directement après chaque intégration.

4. Détermination des valeurs inconnues du problème et étude des résultats obtenus. Pour être en état d'étudier la solution et de procéder également à la vérification indirecte des résultats par l'équation aux dimensions, il faut poursuivre la résolution jusqu'au bout sous sa forme générale (en lettres), et ne substituer les données numériques que dans les résultats définitifs.

Les indications générales données ici se rapportent aussi au cas du mouvement curviligne.

Examinons trois problèmes concrets où la force dépend du temps, de la distance et de la vitesse du mouvement du point.

1. La force dépend du temps

Problème 98. Un corps de poids P se met en mouvement le long d'un plan horizontal à partir de l'état de repos sous l'action d'une force R, dont la valeur s'accroît proportionnellement au temps selon la loi $R = kt$. Trouver la loi du mouvement de ce corps.

Solution. Choisissons comme origine des coordonnées O la position initiale du corps et orientons l'axe Ox dans le sens du mouvement (voir fig. 243). Dans ce cas, les conditions initiales seront : pour $t = 0$, $x = 0$, $v_x = 0$. Représentons le corps et les forces qui agissent sur lui en une position arbitraire. Dans le cas présent $R_x = R = kt$ et l'équation (7) a la forme suivante :

$$\frac{P}{g}\frac{dv_x}{dt} = kt.$$

En multipliant les deux membres de l'égalité par dt, on sépare simultanément les variables et en intégrant on obtient :

$$v_x = \frac{kg}{P}\frac{t^2}{2} + C_1.$$

En substituant les données initiales dans cette équation, on trouve $C_1 = 0$. Alors en remplaçant dans le résultat obtenu v_x par $\frac{dx}{dt}$, on aura :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{kg}{2P}t^2.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par dt, on sépare de nouveau les variables et en intégrant on trouve

$$x = \frac{kg}{2P}\frac{t^3}{3} + C_2.$$

La substitution des données initiales montre que $C_2 = 0$ et on obtient définitivement la loi de mouvement du corps sous la forme

$$x = \frac{kg}{6P} t^3.$$

Ainsi, le chemin parcouru par le corps s'accroît proportionnellement au cube du temps.

2. La force dépend de la distance

Problème 99. En négligeant le frottement et la résistance de l'air, déterminer le temps qu'il faudra à un corps pour traverser un tunnel creusé à travers la Terre suivant la corde AB de l'entrée A à la sortie B (fig. 244). Pour le calcul, prendre le rayon de la Terre R égal à 6 370 kilomètres.

Indication. Selon la théorie de l'attraction, tout corps situé à l'intérieur de la Terre est attiré vers son centre avec une force F, proportionnelle à

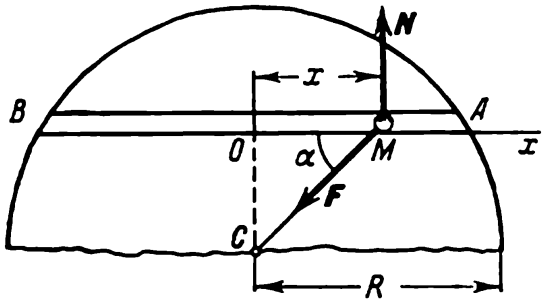


Fig. 244

la distance r qui le sépare de ce centre. En prenant en considération qu'à la distance $r = R$ (c'est-à-dire à la surface de la Terre), la force F s'identifie au poids des corps ($F = mg$), on obtient pour l'intérieur de la Terre

$$F = \frac{mg}{R} r,$$

où r est égal à MC et désigne la distance du point M au centre de la Terre.

Solution. Plaçons l'origine O au milieu de la corde AB (en ce point le corps se trouvant dans le tunnel serait en équilibre) et dirigeons l'axe Ox suivant la droite OA. Si on désigne la longueur de la corde AB par $2a$, les conditions initiales du problème seront : à $t = 0$, $x = a$, $v_x = 0$.

Dans la position arbitraire M le corps est soumis à l'action des forces F et N. Par conséquent,

$$\sum F_{kx} = -F\cos\alpha = -\frac{mg}{R} r\cos\alpha = -\frac{mg}{R} x,$$

car on voit sur le dessin que $r\cos\alpha = x$.

La force agissante dépend par conséquent de la coordonnée x du point M. Pour séparer les variables de l'équation différentielle, composons-la sous la forme (8). Ensuite, en divisant par m et en adoptant la notation

$$\frac{g}{R} = k^2,$$

on obtient

$$v_x \frac{dv_x}{dx} = -k^2 x.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par dx, on sépare aussitôt les variables et on trouve en intégrant

$$\frac{v_x^2}{2} = -k^2 \frac{x^2}{2} + C_1.$$

D'après les conditions initiales $v_x = 0$, quand $x = a$; il s'ensuit que $C_1 = \frac{1}{2} k^2 a^2$. En substituant cette valeur de C_1 on trouve que

$$v_x = \pm k \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Etant donné que dans la position examinée le vecteur vitesse est orienté de M à O, $v_x < 0$ et il faut affecter du signe moins la racine. On aura alors, en remplaçant v_x par $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = -k \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Pour séparer les variables, mettons cette équation sous la forme

$$k\,dt = -\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

en intégrant on obtient:

$$kt = \arccos \frac{x}{a} + C_2.$$

Après y avoir substitué les valeurs initiales (quand $t = 0$ $x = a$), on trouve que $C_2 = 0$. La loi du mouvement du corps dans le tunnel sera donc en définitive

$$x = a \cos kt.$$

Par conséquent, le corps effectuera dans le tunnel AB des oscillations harmoniques d'amplitude a.

Trouvons maintenant le temps t que met le corps pour parcourir tout le tunnel. Au point B la coordonnée $x = -a$. En substituant cette valeur dans l'équation du mouvement on obtient: $\cos kt_1 = -1$, d'où $kt_1 = \pi$ et $t_1 = \frac{\pi}{k}$. Mais en vertu de la notation adoptée $k = \sqrt{\frac{g}{R}}$. Ayant effectué le calcul on constate que le temps que met le corps à parcourir le tunnel AB ne dépend pas de sa longueur et qu'il est toujours égal à

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 42 \text{ mn } 11 \text{ s}.$$

Ce résultat très intéressant a engendré une série de projets (pour le moment chimériques) de creusement de tel tunnel.

Trouvons de même la vitesse maximum du corps pendant le mouvement. On tire de l'expression de v_x que $v = v_{max}$ quand $x = 0$, c'est-à-dire au point O. La valeur de v en ce point est alors

$$v_{max} = ka = a \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Si, par exemple, $2a = 0{,}1$, $R = 637$ km (à peu près la distance de Moscou à Léningrad), $v_{max} \approx 395$ m/s $= 1\,422$ km/h.

Les oscillations du point matériel sous l'action d'une force proportionnelle à la distance seront étudiées avec plus de détails au chapitre XXI. On y examinera une autre méthode d'intégration des équations différentielles du mouvement que l'on obtient dans ce cas.

3. La force dépend de la vitesse

Problème 100. On communique à un canot pesant $P = 40$ kg une vitesse initiale $v_0 = 0{,}5$ m/s. Supposant que la force de la résistance de l'eau à l'avancement est pour des petites vitesses proportionnelle à la première puissance de la

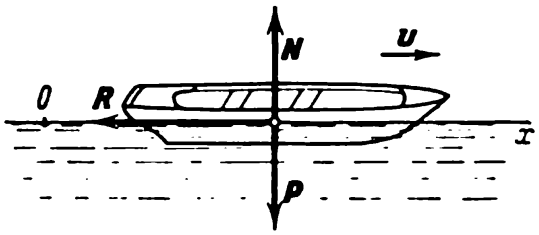


Fig. 245

vitesse et qu'elle varie suivant la loi $R = \mu v$ (où le coefficient $\mu = 0{,}93$ kg·s/m), déterminer dans combien de temps la vitesse du canot diminuera de moitié et quel chemin aura alors parcouru le canot. Trouver aussi la distance qu'aura parcourue le canot avant de s'arrêter.

Solution. Faisons coïncider l'origine O avec la position initiale du canot et dirigeons l'axe Ox dans le sens du mouvement (fig. 245). Les conditions initiales pour $t = 0$ seront alors $x = 0$, $v_x = v_0$.

Représentons le canot et les forces $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{N}$ et $\boldsymbol{R}$, agissant sur lui pour une position arbitraire.

Remarque. Le canot ne subit l'action d'aucune autre force. La force ayant communiqué l'impulsion au canot n'avait agi que jusqu'à l'instant $t = 0$. Le résultat de cette action est pris en compte par l'introduction de la vitesse initiale v_0 (voir § 104).

Pour déterminer correctement les forces qui agissent effectivement sur un corps au cours de son mouvement, il faut tenir compte du fait que toute force résulte de l'interaction du corps donné avec d'autres corps. Dans le cas présent, la force $\boldsymbol{P}$ traduit l'action exercée sur le canot par la Terre, et les forces $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{N}$, l'action de l'eau sur le canot. Pendant le mouvement, le canot ne subit l'action d'aucun autre corps matériel ; il n'y a donc aucune autre force en jeu. Nous attirons particulièrement l'attention sur cette question car elle est très souvent l'occasion de nombreuses erreurs durant la résolution des problèmes.

En calculant les projections des forces agissantes, on trouve que

$$\sum F_{kx} = -R = -\mu v.$$

Pour déterminer le temps de ce mouvement, on forme l'équation différentielle (7). En remarquant que dans ce cas $v_x = v$, on aura :

$$\frac{P}{g}\frac{dv}{dt} = -\mu v.$$

Séparons les variables dans cette équation, on obtient :

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\mu g}{P}\,dt,$$

et en intégrant

$$\operatorname{Log} v = -\frac{\mu g}{P} t + C_1.$$

La substitution des données initiales donne $C_1 = \operatorname{Log} v_0$ et en définitive:

$$t = \frac{P}{\mu g} \operatorname{Log} \frac{v_0}{v}. \qquad \text{(a)}$$

On détermine ainsi le temps écoulé t_1 en supposant que $v = 0{,}5v_0$.

On constate que dans ce cas le temps écoulé ne dépend pas de la valeur de v_0. Etant donné que $\operatorname{Log} 2 = 0{,}69$,

$$t_1 = \frac{P}{\mu g} \operatorname{Log} 2 \approx 3 \text{ s}.$$

Pour déterminer le chemin parcouru il est plus rationnel de reprendre l'équation différentielle du mouvement sous sa forme (8), puisque cette équation permet d'établir directement la dépendance entre x et v[1]. On obtient alors:

$$\frac{P}{g} v \frac{dv}{dx} = -\mu v.$$

D'où en divisant par v et en séparant les variables, on trouve que

$$dv = -\frac{\mu g}{P} dx.$$

Par conséquent,

$$v = -\frac{\mu g}{P} x + C_1.$$

Etant donné que pour $x = 0$ la vitesse $v = v_0$, $C_1 = v_0$ et finalement

$$x = \frac{P}{\mu g} (v_0 - v). \qquad \text{(b)}$$

En supposant que $v = 0{,}5v_0$, on trouve pour le chemin parcouru: $x_1 = \frac{Pv_0}{2\mu g} \approx$ $\approx 1{,}1$ m.

Pour trouver le chemin parcouru par le canot jusqu'à l'arrêt il suffit de prendre dans l'équation (b) $v = 0$. On obtient alors que $x_2 = \frac{Pv_0}{\mu g} = 2{,}2$ m.

En déterminant le laps de temps qui s'écoulera jusqu'à l'arrêt complet du canot, on déduit de l'égalité (a) que pour $v = 0$ le temps $t_2 = \infty$. Cela signifie que pour la loi de résistance à l'avancement adoptée ($R = \mu v$), le canot se rapprochera asymptotiquement vers sa position finale (déterminée par la coordonnée x_2). En fait, ce temps est une grandeur finie, car avec la diminution de la vitesse, la loi de résistance devient autre et, par conséquent, l'expression de la dépendance entre v et t se modifie.

---

[1] On peut trouver également le chemin parcouru en exprimant dans l'égalité (a) la vitesse v en fonction du temps t, en remplaçant ensuite v par $\frac{dx}{dt}$ et en intégrant l'équation obtenue; cependant, ce mode de résolution semble plus complexe.

Un autre exemple important du mouvement accompli sous l'impulsion d'une force dépendant de la vitesse sera examiné au paragraphe suivant.

§ 106. Chute d'un corps dans un milieu offrant une résistance (dans l'air). Quand un corps se meut dans un milieu quelconque, il éprouve une résistance dont la grandeur dépend de la forme et des dimensions du corps, de sa vitesse ainsi que des propriétés intrinsèques du milieu.

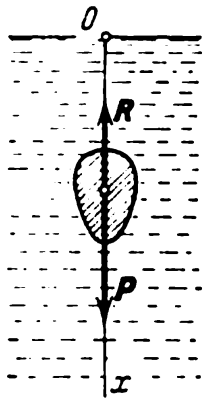


Fig. 246

L'expérience a établi pour les vitesses du mouvement, qui ne sont ni très petites ni très proches de la vitesse du son, que la force de résistance à l'avancement est proportionnelle au carré de la vitesse v et peut être déterminée d'après la formule[1]

$$R = \frac{1}{2} c_x \rho S v^2, \tag{16}$$

où ρ est la densité du milieu $\left[\text{à la température de } 15\,^\circ\text{C et la pression de } 760 \text{ mm pour l'air, } \rho = \frac{1}{8}\,\frac{\text{kg}\cdot\text{s}^2}{\text{m}^4}\right]$; S (m²) est la surface de la projection du corps sur le plan perpendiculaire à la direction du mouvement; c_x est un coefficient de résistance sans dimension qui est déterminé par la forme du corps. Par exemple, pour le parachute $c_x = 1{,}4$; pour le ballon $c_x = 0{,}5$; pour certains corps fusiformes aux bonnes qualités aérodynamiques c_x est inférieur à 0,03.

Examinons le problème de la chute du corps dans l'air dans le cas où la hauteur n'est pas très grande par rapport au rayon de la Terre (la hauteur étant à ce point petite que l'on peut estimer constantes la force de la pesanteur **P** et la densité de l'air ρ).

En dirigeant l'axe des coordonnées Ox verticalement vers le bas (fig. 246), cherchons de quelle façon varie la vitesse de la chute en fonction du chemin parcouru x, en supposant que $v_0 = 0$.

Le corps en chute est soumis à l'action des forces $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{R}$, par conséquent:

$$\sum F_{kx} = P - R = P - \frac{1}{2} c_x \rho S v^2.$$

Pour obtenir directement la dépendance entre v et x, on forme l'équation différentielle du mouvement sous la forme (8). Dans ce cas en tenant compte du fait que $v_x = v$, on obtient:

$$\frac{P}{g} v \frac{dv}{dx} = P - \frac{1}{2} c_x \rho S v^2.$$

[1] Quand on étudie la chute des corps dans l'air, on peut considérer la formule (16) comme valable pour les vitesses inférieures à 300 m/s.

Si l'on adopte la notation:

$$\frac{2P}{c_x \rho S} = a^2, \tag{17}$$

l'équation précédente prendra la forme suivante:

$$v \frac{dv}{dx} = g\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)$$

ou, après la séparation des variables,

$$-\frac{v\,dv}{a^2 - v^2} = -\frac{g}{a^2}\,dx\ .$$

Intégrant les deux membres de l'égalité, on aura:

$$\operatorname{Log}(a^2 - v^2) = -2\frac{g}{a^2}x + C_1.$$

D'après les données initiales, la vitesse $v = 0$ quand $x = 0$, par conséquent, $C_1 = \operatorname{Log} a^2$. Substituant cette valeur de C_1, on aura:

$$\operatorname{Log}\frac{a^2 - v^2}{a^2} = -2\frac{g}{a^2}x$$

ou

$$\frac{a^2 - v^2}{a^2} = e^{-2\frac{g}{a^2}x}.$$

On déduit finalement que

$$v = a\sqrt{(1 - e^{2\frac{g}{a^2}x})}. \tag{18}$$

La formule (18) donne la loi de variation de la vitesse d'un corps qui tombe dans l'air, en fonction du chemin parcouru.

La quantité $e^{-2\frac{g}{a^2}x}$ décroît quand x croît et tend vers zéro quand $x \to \infty$. Il en résulte que la vitesse de la chute v augmente avec x, tendant à la limite vers une valeur constante a. Cette valeur est appelée *vitesse limite de la chute* $v_{\lim}$.

On déduit de l'égalité (17) que

$$v_{\lim} = \sqrt{\frac{2P}{c_x \rho S}}. \tag{19}$$

Par conséquent, *si* $v_0 = 0$ *un corps qui tombe dans l'air ne peut pas atteindre une vitesse supérieure à* $v_{\lim}$. La vitesse limite de chute croît avec l'augmentation du poids du corps et la diminution des grandeurs c_x, ρ et S.

Trouvons la rapidité avec laquelle la vitesse d'un corps en chute tend vers sa vitesse limite. Pour cela reportons-nous au tableau 1

qui donne la valeur du rapport $\frac{v}{v_{\text{lim}}}$ en fonction de $\frac{g}{v_{\text{lim}}^2}x$, calculée d'après la formule (18).

On voit que:

$$\left.\begin{aligned} &\text{quand } \frac{g}{v_{\text{lim}}^2}x = 1{,}2 \quad v = 0{,}95\, v_{\text{lim}}, \\ &\text{quand } \frac{g}{v_{\text{lim}}^2}x = 2{,}0 \quad v = 0{,}99\, v_{\text{lim}}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Par conséquent, la vitesse de chute tend rapidement vers la vitesse limite, si les valeurs de c_x et S ne sont pas très petites (voir le problème 101).

Tableau 1

$\frac{g}{v_{\text{lim}}^2}x$	$\frac{v}{v_{\text{lim}}}$	$\frac{g}{v_{\text{lim}}^2}x$	$\frac{v}{v_{\text{lim}}}$
0	0	1,2	0,95
0,5	0,80	1,5	0,97
1,0	0,93	2,0	0,99

L'existence d'une vitesse limite de chute peut être établie à l'appui de simples raisonnements suivants. Durant la chute dans l'air la vitesse du corps augmente, par conséquent, la force R augmente aussi.

Si l'on postule que la force R ne peut surpasser le poids du corps P (voir la figure 246), $R_{\text{lim}} = P$. En exprimant R_{lim} à l'aide de la formule (16), on obtient $\frac{1}{2}c_x \rho S v_{\text{lim}}^2 = P$, d'où on trouve la valeur de v_{lim} de la formule (19). Cependant, ces raisonnements ne permettent pas de juger de la rapidité avec laquelle la vitesse de la chute v tend vers v_{lim}. On ne peut obtenir ce résultat d'une grande importance pratique qu'à l'aide de la formule (18).

Problème 101. Déterminer la vitesse limite de la chute d'un parachutiste dont le poids, le parachute compris, est égal à $P = 75$ kg: a) dans un saut à ouverture retardée, en supposant dans ce cas que $S = 0{,}4$ m², $c_x = 1{,}0$; b) dans un saut avec le parachute ouvert, en supposant dans ce cas que $S = 36$ m², $c_x = 1{,}4$.

Trouver dans les deux cas la distance H_1 à partir de laquelle la vitesse du parachutiste est égale à $v_1 = 0{,}95\, v_{\text{lim}}$ (c'est-à-dire que la vitesse diffère de 5 % de la vitesse limite), et la distance H_2 à partir de laquelle la vitesse de la chute est égale à $v_2 = 0{,}99\, v_{\text{lim}}$.

S o l u t i o n. On détermine la vitesse limite de la chute d'après la formule (19), en estimant que pour l'air $\rho = \frac{1}{8}\frac{\text{kg s}^2}{\text{m}^4}$. On calcule les distances H_1 et H_2

à partir des égalités (20). Etant donné que $v = 0{,}95\, v_{\lim}$ quand $\frac{g}{v_{\lim}^2} x = 1{,}2$, la distance cherchée $H_1 = 1{,}2 \frac{v_{\lim}^2}{g}$. On trouve d'une manière analogue que $H_2 = 2 \frac{v_{\lim}^2}{g}$.

Il résulte des calculs effectués que:

a) dans le saut à ouverture retardée $v_{\lim} \approx 55$ m/s; $H_1 \approx 370$ m, $H_2 \approx \approx 610$ m.

b) dans le saut avec le parachute ouvert $v_{\lim} \approx 5$ m/s; $H_1 \approx 3$ m, $H_2 \approx \approx 5$ m.

On s'aperçoit que pour les grandes résistances la vitesse limite est très vite atteinte.

§ 107. Mouvement curviligne du point. Examinons un point matériel libre qui se meut sous l'action des forces $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

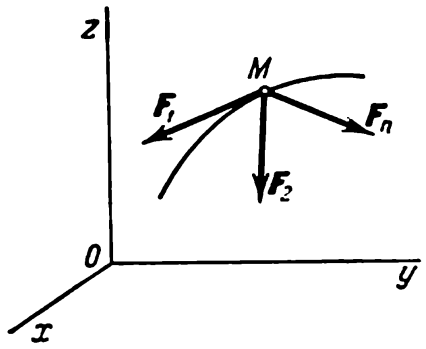


Fig. 247

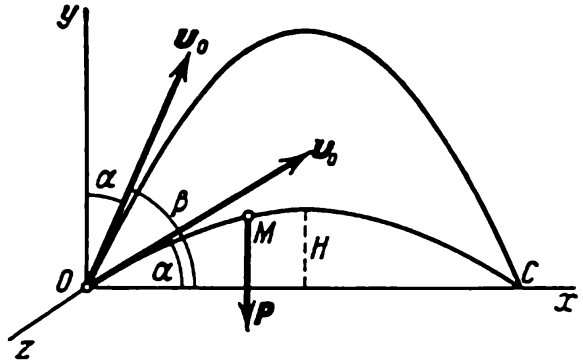


Fig. 248

Traçons les axes de coordonnées immobiles *Oxyz* (fig. 247). En projetant les deux membres de l'égalité $mw = \Sigma F_k$ sur ces axes et en prenant en considération que $w_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ et ainsi de suite, on obtient les *équations différentielles du mouvement curviligne du point* en projections sur les axes cartésiens:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{kx}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{ky}, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{kz}. \qquad (21)$$

Etant donné que les forces agissant sur le point peuvent être fonction du temps, de la position du point et de sa vitesse, les membres droits des équations (21), de même que de l'équation (9) § 104, peuvent dépendre du temps, des coordonnées du point x, y, z et des projections de sa vitesse $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. En même temps, le membre droit de chacune de ces équations peut comporter toutes ces varia-

bles, c'est-à-dire que le système d'équations (21) est compatible pour le cas général.

Les équations (21) permettent de résoudre aussi bien le premier que le deuxième problème (fondamental) de la dynamique. Pour résoudre le problème fondamental à l'aide de ces équations, il faut également connaître, outre les forces agissantes, les conditions initiales, c'est-à-dire la position et la vitesse du point au moment initial. Pour le système de coordonnées $Oxyz$, les conditions initiales s'expriment sous la forme :

quand $t = 0$

$$\left.\begin{array}{lll} x = x_0 & y = y_0, & z = z_0\,; \\ v_x = v_{x_0}, & v_y = v_{y_0}, & v_z = v_{z_0}. \end{array}\right\} \tag{22}$$

Si l'on connaît les forces du système, en intégrant les équations (21), on trouve l'expression des coordonnées x, y, z du point en mouvement en fonction du temps t, c'est-à-dire la loi de mouvement du point. Les solutions ainsi obtenues comportent six constantes d'intégration C_1, C_2, . . ., C_6, dont les valeurs doivent être déterminées d'après les conditions initiales (22). Un exemple concret d'intégration des équations (21) est donné au paragraphe 108.

On peut aussi former les équations différentielles du mouvement en utilisant les projections sur d'autres systèmes d'axes de coordonnées, comme il est fait notamment au paragraphe 117.

§ 108. Mouvement du point lancé sous un certain angle au niveau dans un champ de pesanteur uniforme. Etudions le mouvement d'un corps, lancé avec une vitesse initiale v_0, sous un angle α au niveau en le considérant comme un point matériel affecté d'une masse m. On négligera la résistance de l'air en admettant que la portée de la trajectoire est petite par rapport au rayon de la Terre et que par conséquent le champ de pesanteur est uniforme ($P =$ $=$ const).

Plaçons l'origine des coordonnées O à la position initiale du point. Dirigeons l'axe Oy verticalement vers le haut ; disposons l'axe horizontal Ox dans un plan passant par Oy et par le vecteur $\boldsymbol{v}_0$ et traçons l'axe Oz perpendiculairement aux deux premiers axes (fig. 248). En ce cas l'angle compris entre le vecteur $\boldsymbol{v}_0$ et l'axe Ox sera égal à α.

Représentons le point M en mouvement dans une position quelconque sur la trajectoire. Le point est soumis uniquement à l'action de la pesanteur $\boldsymbol{P}$ (voir la remarque formulée au problème 100), dont les projections sur les axes de coordonnées sont respectivement égales à

$$P_x = 0, \quad P_y = -P = -mg, \quad P_z = 0.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (21) et en notant que $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv_x}{dt}$ et ainsi de suite, on obtient après division par m:

$$\frac{dv_x}{dt}=0,\quad \frac{dv_y}{dt}=-g,\quad \frac{dv_z}{dt}=0.$$

En multipliant les deux membres de ces équations par dt et en intégrant, on trouve:

$$v_x = C_1,\quad v_y = -gt + C_2,\quad v_z = C_3.$$

Les conditions initiales de ce problème prennent la forme suivante:

$$\text{à } t = 0 \quad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0;$$
$$v_x = v_0 \cos\alpha,\quad v_y = v_0 \sin\alpha,\quad v_z = 0.$$

Avec ces conditions initiales:

$$C_1 = v_0 \cos\alpha,\quad C_2 = v_0 \sin\alpha,\quad C_3 = 0.$$

Substituant ces valeurs de C_1, C_2 et C_3 dans les solutions trouvées ci-dessus et en remplaçant v_x, v_y, v_z par $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, on est amené aux équations suivantes:

$$\frac{dx}{dt}=v_0\cos\alpha,\quad \frac{dy}{dt}=v_0\sin\alpha-gt,\quad \frac{dz}{dt}=0.$$

En intégrant ces équations, on obtient:

$$x=v_0t\cos\alpha+C_4,\quad y=v_0t\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}+C_5,\quad z=C_6.$$

La substitution des données initiales donne $C_4 = C_5 = C_6 = 0$ et on trouve en définitive les équations du mouvement du point M sous la forme:

$$x=v_0t\cos\alpha,\quad y=v_0t\sin\alpha-\frac{gt^2}{2},\quad z=0. \tag{23}$$

Il résulte de la dernière équation que le mouvement a lieu dans le plan Oxy.

Quand on dispose des équations du mouvement du point, on peut à l'aide des méthodes cinématiques déterminer toutes les caractéristiques du mouvement donné.

1. Trajectoire du point. En éliminant le temps t entre les deux premières équations (23), on obtient l'équation de la trajectoire du point:

$$y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \tag{24}$$

C'est l'équation d'une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe Oy. Ainsi, *un point pesant, lancé sous un certain angle au niveau, se meut dans le vide suivant une parabole* (Galilée).

2. Amplitude ou portée. Déterminons la portée, c'est-à-dire la distance $OC = X$, mesurée le long de l'axe Ox. En posant dans l'égalité (24) $y = 0$, on trouve les points d'intersection de la trajectoire avec l'axe Ox. En résolvant l'équation

$$x\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{gx}{2v_0^2\cos^2\alpha}\right) = 0$$

on trouve

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2v_0^2\cos^2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{g}.$$

La première solution donne le point O, la deuxième — le point C. Par conséquent, $X = x_2$ et en définitive

$$X = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha. \tag{25}$$

On établit à l'appui de la formule (25) que la même portée X sera obtenue pour un angle β, tel que $2\beta = 180° - 2\alpha$, c'est-à-dire $\sin\beta = 90° - \alpha$. Par conséquent, pour une vitesse initiale donnée v_0, deux trajectoires mènent au point C : une trajectoire plongeante ($\alpha < 45°$) et une trajectoire verticale ($\beta = 90° - \alpha > 45°$).

Pour une vitesse initiale donnée v_0, la portée maximale dans le vide est obtenue quand $\sin 2\alpha = 1$, c'est-à-dire pour un angle $\alpha = 45°$.

3. Hauteur de la trajectoire. Si l'on pose dans l'équation (24) $x = \frac{1}{2}X = \frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$, on peut calculer la hauteur de la trajectoire H :

$$H = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha. \tag{26}$$

4. Temps de vol. Il vient de l'équation (23) que la durée du mouvement T est déterminée par l'égalité $X = v_0T\cos\alpha$. Substituant à X sa valeur, on obtient :

$$T = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha. \tag{27}$$

Pour l'angle correspondant à la portée maximale $\alpha^* = 45°$, ces diverses grandeurs sont respectivement égales à :

$$X^* = \frac{v_0^2}{g}, \quad H^* = \frac{v_0^2}{4g} = \frac{1}{4}X^*, \quad T^* = \frac{v_0}{g}\sqrt{2}. \tag{28}$$

Les résultats obtenus peuvent être appliqués à la détermination approximative des caractéristiques du vol des engins (fusées) dont la portée atteint 200 ÷ 600 km, car pour de telles portées (et pour

$\alpha \approx 45°$) l'engin effectue la grande partie de son vol dans la stratosphère où la résistance de l'air peut être négligée. Pour des portées plus petites, le résultat sera fortement influencé par la résistance de l'air ; de même, avec une portée dépassant 600 km on ne peut plus négliger la force de pesanteur.

E x e m p l e. On sait [1] que l'engin allemand V-2 lancé verticalement avait à la hauteur de 20 km une vitesse $v_0 \approx 1\,700$ m/s, un angle au niveau $\alpha \approx 45°$ (la rotation de l'engin avait été effectuée au moyen d'appareils spéciaux et de gouvernails). Le vol ultérieur de l'engin s'identifiait pratiquement à celui d'un corps lancé dans le vide. Dans ce cas, d'après les formules (28), on devait avoir :

$$X^* \approx 300 \text{ km}, \quad H^* \approx 75 \text{ km}, \quad T^* \approx 245 \text{ s}.$$

Ces résultats sont très proches des données techniques connues pour ces engins-là.

---

[1] Kooy J. and Uytenbogaart J., Ballistics of the future, 1946, McGraw.

Chapitre XVIII

THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA DYNAMIQUE DU POINT

Pour résoudre certains problèmes de la dynamique, il s'avère plus rationnel d'utiliser ce que l'on nomme les *théorèmes généraux*, découlant de la loi fondamentale de la dynamique, au lieu de l'intégration des équations différentielles.

L'importance des théorèmes généraux consiste en ce qu'ils établissent les dépendances concrètes entre les caractéristiques dynamiques essentielles du mouvement des corps matériels et offrent de ce fait de nouvelles possibilités d'étude de mouvements mécaniques largement utilisés dans les applications techniques. En outre, les théorèmes généraux permettent d'étudier séparément certains aspects particuliers d'un phénomène donné, présentant une importante pratique, sans l'étudier en entier. Enfin, l'utilisation des théorèmes généraux nous dispense de la nécessité d'effectuer pour chaque problème particulier les opérations d'intégration qui sont accomplies une fois pour toutes au cours de la démonstration de ces théorèmes ; cela simplifie par conséquent le processus de résolution.

§ 109. Quantité de mouvement et énergie cinétique du point. Les caractéristiques dynamiques essentielles du mouvement d'un point sont la *quantité de mouvement* et l'*énergie cinétique*.

On appelle quantité de mouvement du point la grandeur vectorielle $m\boldsymbol{v}$ égale au produit de la masse du point par le vecteur vitesse. Le vecteur $m\boldsymbol{v}$ est aligné avec la vitesse du point, c'est-à-dire qu'il est dirigé suivant une tangente à sa trajectoire.

On appelle énergie cinétique (ou force vive) du point la grandeur scalaire $\frac{mv^2}{2}$ égale au demi-produit de la masse du point par le carré de sa vitesse.

Les équations de dimensions de ces grandeurs dans le système d'unités pratique sont :

$$[mv] = \frac{\text{kg s}^2}{\text{m}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{kg s} ; \quad \left[\frac{mv^2}{2}\right] = \frac{\text{kg s}^2}{\text{m}} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{kgm}.$$

La nécessité d'introduire deux caractéristiques dynamiques s'explique par le fait qu'une seule caractéristique est incapable d'englober les multiples particularités du mouvement du point.

Par exemple, si l'on connaît la quantité de mouvement d'une automobile (c'est-à-dire la valeur de $q = mv$, mais non les valeurs

de m et v séparément) et la force qui agit sur elle durant le freinage, on peut déterminer le temps en secondes qu'elle mettra pour s'arrêter, mais on ne peut déterminer d'après ces données le chemin parcouru pendant le freinage. Inversement, si l'on connaît la force cinétique initiale de l'automobile et la force de freinage, on peut déterminer le chemin de freinage, mais ces données sont insuffisantes pour permettre de trouver le temps de freinage [1].

§ 110. Impulsion d'une force. Pour caractériser l'action exercée sur un corps par une force durant un laps de temps donné, on introduit la notion d'impulsion d'une force. Introduisons tout d'abord la notion d'impulsion élémentaire, c'est-à-dire d'une impulsion relative à un laps de temps dt infiniment petit. *On appelle impulsion élémentaire d'une force une grandeur vectorielle $d\boldsymbol{S}$ égale au produit du vecteur force $\boldsymbol{F}$ par l'intervalle de temps élémentaire dt:*

$$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}\, dt. \tag{29}$$

L'impulsion élémentaire est alignée avec la direction d'action de la force.

On calcule l'impulsion $\boldsymbol{S}$ de n'importe quelle force $\boldsymbol{F}$ durant un intervalle de temps fini t_1 en prenant l'intégrale des impulsions élémentaires correspondantes:

$$\boldsymbol{S} = \int_0^{t_1} \boldsymbol{F}\, dt. \tag{30}$$

Par conséquent, *l'impulsion d'une force correspondant à l'intervalle de temps t_1 est égale à l'intégrale définie de l'impulsion élémentaire calculée entre les limites zéro et t_1.*

Dans le cas particulier où la force $\boldsymbol{F}$ est constante en module et en direction ($\boldsymbol{F}$ = const.), on aura $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}t_1$.

Dans ce cas le module S est aussi égal à Ft_1. Dans le cas général le module d'une impulsion peut être calculé d'après ses projections.

On trouvera les projections de l'impulsion sur les axes de coordonnées, en tenant compte du fait que l'intégrale représente la limite d'une somme, et que la projection de la somme de vecteurs sur l'axe est égale à la somme des projections de ces vecteurs sur cet axe. Par conséquent,

$$S_x = \int_0^{t_1} F_x\, dt, \quad S_y = \int_0^{t_1} F_y\, dt, \quad S_z = \int_0^{t_1} F_z\, dt. \tag{31}$$

On peut construire d'après ces projections le vecteur $\boldsymbol{S}$ et calculer son module ainsi que les angles qu'il forme avec les axes.

[1] Voir le problème 103 (§ 115).

L'équation aux dimensions dans le système d'unités pratique sera $[S] = \text{kg s}$.

Pour résoudre le problème fondamental de la dynamique, il est important d'indiquer les forces dont les impulsions peuvent être calculées à l'avance *sans connaître la loi du mouvement* effectué par le point sous l'action de ces forces. On voit de l'égalité (31) que seules les *forces constantes* et les *forces qui ne dépendent que du temps* entrent dans cette catégorie.

Pour calculer les impulsions des forces dépendant des coordonnées ou de la vitesse du mouvement du point il est nécessaire de connaître en outre la loi de son mouvement, c'est-à-dire les équations $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$. Dans ce cas, après avoir exprimé x, y, z ou v_x, v_y, v_z en fonction de t, on peut calculer les intégrales (31). Sans connaître la loi du mouvement du point, c'est-à-dire sans avoir préalablement résolu le problème fondamental de la dynamique, il est impossible de calculer les impulsions de telles forces.

§ 111. Théorème de la variation de la quantité de mouvement du point. Etant donné que la masse du point est constante et que son accélération $w = \frac{dv}{dt}$, on peut mettre l'équation (3) qui exprime la loi fondamentale de la dynamique sous la forme

$$\frac{d(mv)}{dt} = \sum F_k. \tag{32}$$

Soit un point de masse m qui se meut sous l'action d'une force $R = \Sigma F_k$ (fig. 249, *a*) possédant la vitesse v_0 à l'instant $t = 0$ et la vitesse v_1 à l'instant t_1. Multiplions alors les deux membres de l'égalité (32) par dt et passons aux intégrales définies. On intègre le membre droit par rapport au temps, et les limites de l'intégrale sont 0 et t_1, tandis que dans le membre gauche où on intègre par rapport à la vitesse, les limites de l'intégrale sont les valeurs correspondantes de la vitesse v_0 et v_1. Etant donné que l'intégrale de $d(mv)$ est égale à mv, il en résulte que :

$$mv_1 - mv_0 = \sum \int_0^{t_1} F_k\, dt.$$

Il vient de la formule (30) que les intégrales du membre droit représentent les impulsions des forces agissantes. C'est pourquoi on aura en définitive :

$$mv_1 - mv_0 = \sum S_k. \tag{33}$$

L'équation (33) exprime le théorème de la variation de la quantité de mouvement du

point: *la variation de la quantité de mouvement du point au cours d'un certain intervalle de temps est égale à la somme géométrique des impulsions de toutes les forces qui agissent sur le point, durant ce même intervalle de temps* (fig. 249, *b*).

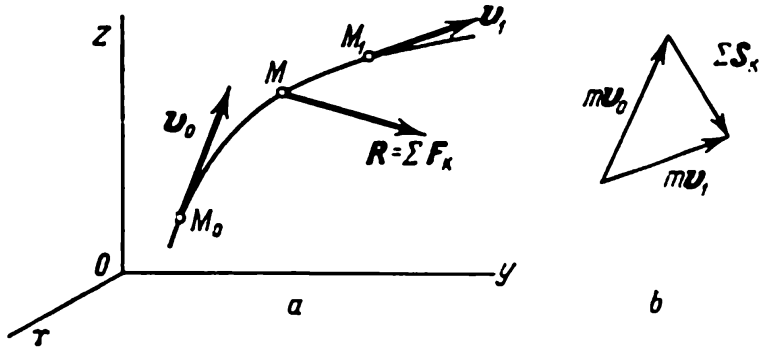


Fig. 249

Dans la résolution des problèmes au lieu de l'équation vectorielle (33) on utilise souvent les équations des projections. En projetant les deux membres de l'égalité (33) sur les axes de coordonnées, on obtient:

$$\left.\begin{aligned} mv_{1x} - mv_{0x} &= \sum S_{kx}, \\ mv_{1y} - mv_{0y} &= \sum S_{ky}, \\ mv_{1z} - mv_{0z} &= \sum S_{kz}. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Dans le cas d'un mouvement rectiligne, effectué le long de l'axe Ox, le théorème s'identifie à la première de ces équations.

§ 112. Travail d'une force. Puissance. Pour caractériser l'action exercée par une force sur le corps pendant un déplacement quelconque, on introduit la notion de travail accompli par la force. Le travail caractérise cette action de la force qui engendre une variation du *module* de la vitesse du point en mouvement.

Introduisons d'abord la notion de travail élémentaire d'une force pendant un déplacement ds infiniment petit. On appelle travail élémentaire de la force F (fig. 250) la grandeur scalaire

$$dA = F_\tau ds, \tag{35}$$

où F_τ est la projection de la force F sur la tangente à la trajectoire orientée dans le sens du déplacement du point et ds, un déplacement infiniment petit du point dirigé le long de cette tangente.

Cette définition est conforme à la notion du travail, en tant que caractéristique de l'action de la force provoquant la variation du module de la vitesse du point. En effet, si on décompose la force

F en ses composantes F_τ et F_n, on voit que seule la composante F_τ communique une accélération tangentielle au point, provoquant ainsi la variation du module de sa vitesse. Quant à la composante F_n, elle modifie soit la direction du vecteur vitesse v (en communiquant au point une accélération normale), soit (pendant un mouvement gêné) la pression exercée sur la liaison. La composante F_n n'a pas d'influence sur le module de la vitesse, autrement dit, la force F_n n'effectue pas de travail.

En remarquant que $F_\tau = F \cos \alpha$, on obtient de l'égalité (35)

$$dA = F\, ds \cos \alpha. \tag{36}$$

Ainsi, *le travail élémentaire d'une force est égal au produit de la projection de cette force sur la direction du déplacement du point*

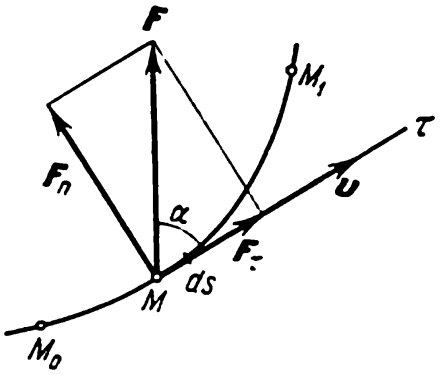


Fig. 250

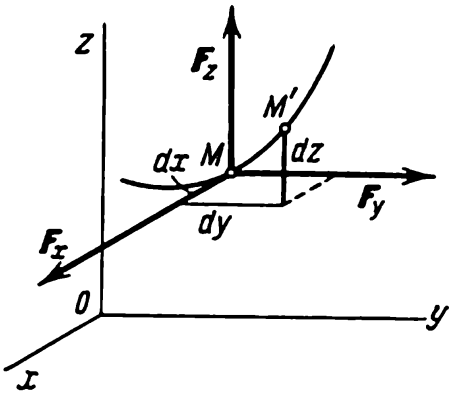


Fig. 251

par le déplacement élémentaire ds (formule 35) ou bien, *le travail élémentaire d'une force est égal au produit du module de la force par le déplacement élémentaire ds et par le cosinus de l'angle compris entre la direction de la force et la direction du déplacement* (formule 36).

Si l'angle α est aigu, le travail est positif. En particulier, si $\alpha = 0$, le travail élémentaire $dA = F\, ds$.

Si l'angle α est obtus, le travail est négatif. En particulier, si $\alpha = 180°$, le travail élémentaire $dA = -F\, ds$.

Si l'angle $\alpha = 90°$, c'est-à-dire *si la force est dirigée perpendiculairement au déplacement, le travail élémentaire de la force est égal à zéro.*

Le signe dont on affecte le travail a la signification suivante: le travail est positif quand la composante tangentielle de la force est dirigée dans le sens du mouvement, c'est-à-dire quand la force accélère le mouvement; le travail est négatif, quand la composante tangentielle est dirigée dans le sens opposé au mouvement, autrement dit, quand la force ralentit le mouvement.

Recherchons l'expression analytique du travail élémentaire. Décomposons à cette fin la force F en ses composantes F_x, F_y et

F_z suivant les directions des axes de coordonnées (fig. 251 ; la force F elle-même n'est pas représentée sur le dessin). Le déplacement élémentaire $MM' = ds$ est composé de déplacements dx, dy, dz le long des axes de coordonnées, x, y, z étant les coordonnées du point M. En ce cas, on peut calculer le travail de la force F sur le déplacement ds comme étant la somme des travaux respectifs de ses composantes F_x, F_y, F_z sur les déplacements dx, dy, dz. Mais seule la composante

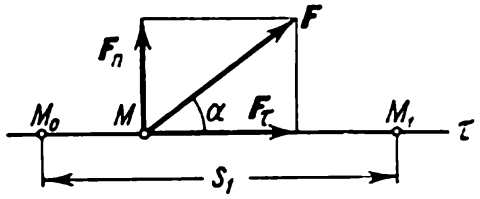


Fig. 252

F_x effectue un travail sur le déplacement dx ; ce travail est égal à $F_x dx$. Le travail relatif aux déplacements dy et dz est calculé de manière analogue. On trouve finalement

$$dA = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz. \tag{37}$$

La formule (37) donne *l'expression analytique du travail élémentaire de la force.*

Le travail de la force pour un déplacement fini M_0M_1 quelconque (voir fig. 250) est calculé comme l'intégrale des travaux élémentaires correspondants :

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau\,ds, \tag{38}$$

ou

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz). \tag{38'}$$

Par conséquent, *le travail de la force pour un déplacement quelconque M_0M_1 est égal à l'intégrale du travail élémentaire calculée le long de ce déplacement.* Les limites de l'intégrale correspondent aux valeurs des variables d'intégration aux points M_0 et M_1 (plus précisément, l'intégrale est prise le long de la courbe M_0M_1, c'est-à-dire qu'elle est curviligne).

Si la grandeur F_τ est constante, en désignant le déplacement $\widehat{M_0M_1}$ par s_1, on obtient de la formule (38) :

$$A_{(M_0M_1)} = F_\tau s_1. \tag{38''}$$

Un tel cas peut se présenter notamment si la force agissante est constante en module et en direction (F = const.) et si le point auquel la force est appliquée est en mouvement de translation (fig. 252). Dans ce cas $F_\tau = F \cos \alpha$ = const., et le travail de la force $A_{(M_0M_1)} = Fs_1 \cos \alpha$.

Pour résoudre le problème fondamental de la dynamique il est important d'indiquer les forces dont on peut calculer directement le travail, *sans connaître* la loi de mouvement du point sous l'action de la force (comparez avec le paragraphe 110). On établit à l'appui de la formule (38') que ce ne peut être que *des forces constantes ou des forces qui dépendent uniquement de la position (des coordonnées) du point en mouvement.*

Pour calculer le travail des forces dépendant du temps et de la vitesse du mouvement du point, il faut connaître aussi la loi de ce mouvement, c'est-à-dire l'expression des coordonnées x, y, z en fonction du temps. En pareil cas, on peut exprimer toutes les variables en fonction du temps t et calculer l'intégrale (38'). Sans connaître la loi du mouvement du point, c'est-à-dire sans avoir résolu préalablement le problème fondamental de la dynamique, il est impossible de déterminer le travail accompli par de telles forces.

Procédé graphique de calcul du travail. Si la force dépend de la distance s et si l'on connaît le graphique de la dépendance entre F_τ et s (fig. 253), on peut calculer graphiquement le travail de la force F. Supposons qu'à la position M_0 le point se trouve à une distance s_0 de l'origine et qu'à la position M_1, à une distance s_1. En se fondant sur la formule (38) et en tenant compte du sens géométrique de l'intégrale, on obtient:

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{s_0}^{s_1} F_\tau \, ds = \sigma,$$

où σ est la grandeur de la surface hachurée sur la figure 253, multipliée par un coefficient d'échelle.

Puissance. On appelle *puissance* une grandeur qui détermine le travail, effectué par une force en unité de temps. Si le travail est effectué uniformément, la puissance s'exprime comme

$$W = \frac{A}{t_1},$$

où t_1 est l'intervalle de temps durant lequel le travail A a été produit. Dans le cas général

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{F_\tau \, ds}{dt} = F_\tau v.$$

Par conséquent, la puissance est égale au produit de la composante tangentielle de la force par la vitesse du mouvement. L'équa-

tion aux dimensions dans le système d'unités pratique est : $[W] = \text{kgm/s}$.

Dans la pratique industrielle, on prend souvent pour unité de puissance un cheval-vapeur égal à 75 kgm/s. Dans le système d'unités physique, la puissance est mesurée en kilowatts ; un cheval-vapeur est égal à 0,736 kilowatt.

Le travail d'une machine est mesuré par le produit de sa puissance par le temps de travail. C'est pourquoi très souvent dans la pratique industrielle on prend pour unité de travail le kilowatt-heure (1 kWh $\approx$ 367 100 kgm).

De l'égalité $W = F_\tau v$ on déduit que pour un moteur dont la puissance est égale à W, la force de traction F_τ est d'autant plus

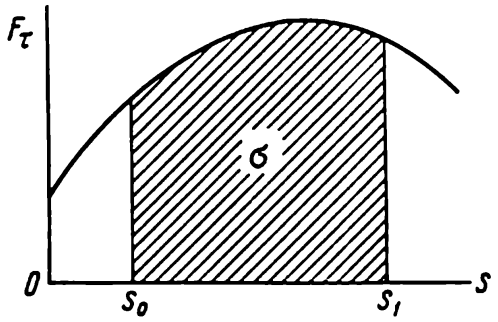


Fig. 253

grande que la vitesse du mouvement v est plus petite. C'est pourquoi, par exemple, sur les pentes raides ou sur les secteurs de routes en mauvais état, on ralentit, ce qui permet à l'automobile, alors que le moteur tourne en pleine puissance, de se mouvoir à des petites vitesses et de développer une force de traction plus grande.

§ 113. Exemples de calcul du travail. Les résultats des exemples que l'on examinera ci-après peuvent être directement utilisés pendant la résolution des problèmes.

1. Travail de la force de pesanteur. Soit un point M, qui sous l'action de la force de pesanteur P, se déplace de la position M_0 (x_0, y_0, z_0) à la position M_1 (x_1, y_1, z_1). Choisissons les axes de coordonnées de façon que l'axe Oz soit dirigé vers le haut suivant la verticale (fig. 254). Dans ce cas $P_x = 0$, $P_y = 0$, $P_z = -P$. Substituant ces valeurs dans la formule (38'), on obtient, étant donné que z est la variable d'intégration :

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (-P\,dz) = -P \int_{z_0}^{z_1} dz = P(z_0 - z_1).$$

Si le point M_0 est situé au-dessus du point M_1, $z_0 - z_1 = h$, où h désigne le déplacement vertical du point ; quand, au contraire,

le point M_0 est au-dessous du point M_1, $z_0 - z_1 = -(z_1 - z_0) = -h$.

On obtient finalement :

$$A_{(M_0M_1)} = \pm Ph. \tag{39}$$

Par conséquent, le *travail de la pesanteur est égal au produit, affecté du signe plus ou du signe moins, du module de cette force par le déplacement vertical de son point d'application.* Le travail est positif

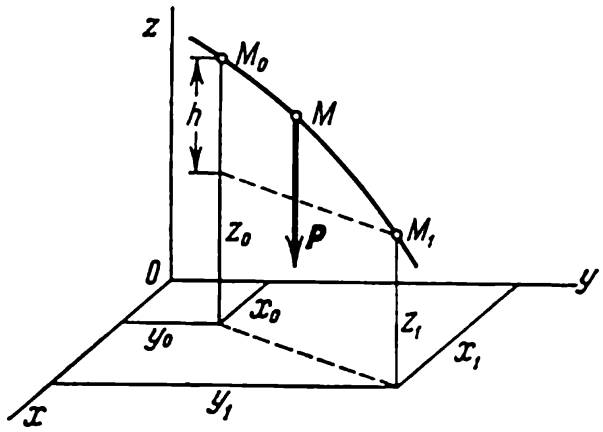


Fig. 254

quand le point initial se trouve plus haut que le point final et, au contraire, le travail est négatif quand le point initial se trouve plus bas que le point final.

Il découle du résultat obtenu que le travail de la force de la pesanteur ne dépend pas de la forme de la trajectoire sur laquelle se déplace le point d'application de la force. Les forces qui possèdent de telles propriétés sont appelées *potentielles.*

2. Travail d'une force élastique. Examinons un corps pesant M, posé sur une surface horizontale et fixé à l'extrémité libre d'un ressort (fig. 255, *a*). Désignons par O la position occupée par l'extrémité du ressort sur la surface quand il n'est pas tendu ($AO = l_0$, longueur du ressort non tendu) et choisissons ce point pour origine des coordonnées. Si maintenant on écarte le corps de la position d'équilibre O en allongeant le ressort jusqu'à ce qu'il atteigne la longueur l, le corps se trouvera soumis à l'action de la force élastique F du ressort, dirigée vers le point O. D'après la loi de Hooke, cette force est proportionnelle à l'allongement du ressort $\Delta l = l - l_0$. Etant donné que dans le cas présent $\Delta l = x$, on a

$$F = c \mid \Delta l \mid = c \mid x \mid.$$

Le coefficient c est appelé *coefficient de rigidité* du ressort. Son équation aux dimensions est $[c]$ = kg/cm. Le coefficient est numé-

riquement égal à la force qu'il faut appliquer au ressort pour l'allonger de 1 cm.

Trouvons le travail produit par une force élastique pendant le déplacement du corps de la position M_0 (x_0) à la position M_1 (x_1). Etant donné que dans ce cas $F_x = -F = -cx$, $F_y = F_z = 0$, on obtient en substituant ces valeurs dans la formule (38′) :

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (-cx)\,dx = -c\int_{x_0}^{x_1} x\,dx = \frac{c}{2}(x_0^2 - x_1^2).$$

(On peut parvenir au même résultat à l'aide du graphique des variations de F en fonction de x (fig. 255, *b*), en calculant la surface σ du

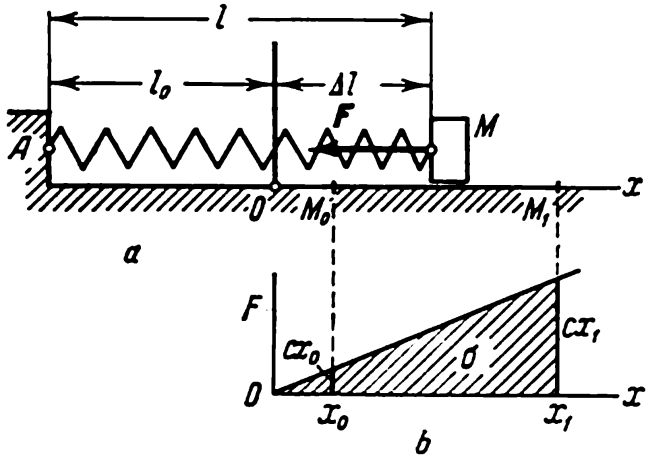


Fig. 255

trapèze hachuré sur le dessin et en tenant compte du signe du travail.) Dans la formule obtenue x_0 représente l'allongement initial du ressort Δl_{init} et x_1, l'allongement final Δl_{fin} du ressort. Par conséquent,

$$A_{(M_0M_1)} = \frac{c}{2}\left[(\Delta l_{\text{init}})^2 - (\Delta l_{\text{fin}})^2\right], \tag{40}$$

c'est-à-dire *le travail de la force élastique est égal au demi-produit du coefficient de rigidité par la différence des carrés des allongements* (*ou des contractions*) *initial et final du ressort.*

Le travail est positif quand $|\Delta l_{\text{init}}| > |\Delta l_{\text{fin}}|$, c'est-à-dire quand l'extrémité du ressort revient à la position d'équilibre, et il est négatif quand $|\Delta l_{\text{init}}| < |\Delta l_{\text{fin}}|$, c'est-à-dire quand l'extrémité du ressort s'éloigne de la position d'équilibre. On peut démontrer que la formule (40) reste aussi valable dans le cas où le déplacement du point M n'est pas rectiligne.

Ainsi, il se trouve que le travail de la force F ne dépend que des valeurs de Δl_{init} et de Δl_{fin} et ne dépend pas de la forme de la tra-

jectoire du point M. Il s'ensuit que la force élastique est aussi une *force potentielle.*

3. Travail d'une force de frottement. Examinons un point qui se déplace sur une surface rugueuse (fig. 256) ou sur une ligne courbe. La force de frottement agissant sur le point est égale en module à fN, où f désigne le coefficient de frottement, et N, la réaction normale de la surface. La force de frottement est dirigée dans le sens opposé au déplacement du point. Par conséquent, $F_{fr\tau} = -fN$ et d'après la formule (38)

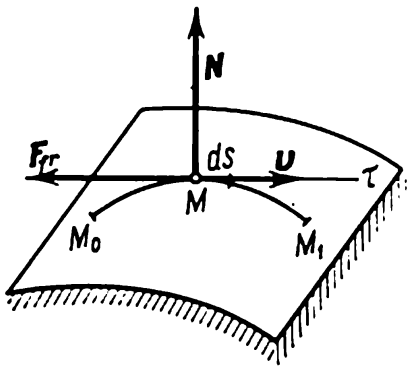


Fig. 256

$$A_{(M_0M_1)} = -\int_{(M_0)}^{(M_1)} F_{fr}\,ds = -\int_{(M_0)}^{(M_1)} fN\,ds.$$

Si la force de frottement a une valeur constante, $A_{(M_0M_1)} = -F_{fr}s$, où s est la longueur de l'arc de la courbe M_0M_1 suivant lequel le point se déplace.

Ainsi, *le travail de la force de frottement pendant le glissement est toujours négatif.* La grandeur de ce travail dépend de la longueur de l'arc M_0M_1; par conséquent, la force de frottement est une force *non potentielle.*

§ 114. Théorème de la variation de l'énergie cinétique du point. Examinons un point de masse m qui se déplace, sous l'action des forces appliquées, de la position M_0, où il possède une vitesse v_0, à la position M_1, où sa vitesse est égale à v_1.

Pour obtenir la relation recherchée, nous aurons recours à l'équation $m\boldsymbol{w} = \Sigma \boldsymbol{F}_k$, qui exprime la loi fondamentale de la dynamique. En projetant les deux membres de cette égalité sur la tangente $M\tau$ à la trajectoire du point M, orientée dans le sens du mouvement, on obtient:

$$mw_\tau = \sum F_{k\tau}.$$

L'accélération tangentielle w peut être écrite sous la forme

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v.$$

Dans ce cas on aura:

$$mv\frac{dv}{ds} = \sum F_{k\tau}.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par ds et transposons m sous le signe de la différentielle. Alors, en prenant en considération que $F_{k\tau}\,ds = dA_k$, où dA_k désigne le travail élémen-

taire de la force F_k, on obtient l'expression du théorème de la variation de l'énergie cinétique sous la forme différentielle

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum dA_k. \tag{41}$$

Après avoir intégré les deux membres de l'égalité (41) dans les limites qui sont les valeurs des variables aux points M_0 et M_1, on trouve finalement

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}. \tag{42}$$

L'équation (42) exprime le théorème de la variation de l'énergie cinétique du point sous sa forme définitive: *pendant un déplacement quelconque du point, la variation de son énergie cinétique est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces qui agissent sur le point pendant ce déplacement.*

Cas du mouvement gêné. Il vient de l'équation (5) que dans le cas du mouvement gêné du point le second membre de l'égalité (42) comprendra le travail des forces données (actives) F_k^a et le travail de la force de la réaction de liaison. Nous n'étudions que le mouvement du point sur une surface plane immobile (sans frottement) ou sur une ligne courbe. Dans ce cas la réaction N (voir la figure 256) sera dirigée suivant la normale à la trajectoire du point et $N_\tau = 0$. Alors, en vertu de la formule (38), *le travail de la force de réaction d'une surface plane immobile (ou d'une ligne courbe) sera égal à zéro pour tout déplacement du point* et on obtiendra de l'équation (42):

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A^a_{(M_0M_1)}. \tag{42'}$$

Par conséquent, *durant le déplacement sur une surface plane immobile (ou sur une ligne courbe) la variation de l'énergie cinétique du point est égale à la somme de travaux des forces actives appliquées au point pendant ce déplacement.*

Si la surface (la ligne courbe) n'est pas lisse, au travail des forces actives s'ajoutera le travail de la force de frottement (voir le paragraphe 113). Si la surface (la ligne courbe) est en mouvement le déplacement absolu du point M peut ne pas être perpendiculaire à N et dans ce cas le travail de la réaction N n'est pas égal à zéro (par exemple, le travail de la réaction d'une plate-forme d'ascenseur).

§ 115. Résolution des problèmes. Avant d'entreprendre la résolution d'un problème, il convient tout d'abord de déterminer si l'un des théorèmes démontrés plus haut est appliquable directement à la solution du problème donné. Il est également nécessaire d'avoir en vue les considérations suivantes.

A l'aide du théorème de la variation de la quantité de mouvement du point on résout facilement les problèmes où :

a) les forces agissantes sont *constantes*, ou bien ne dépendent que du *temps* ;

b) parmi les grandeurs données ou cherchées figurent : les forces agissantes, le *temps du mouvement*, les vitesses initiale et finale du point (c'est-à-dire les grandeurs F, t, v_0 et v_1).

A l'aide du théorème de la variation de l'énergie cinétique du point on résout facilement les problèmes où :

a) les forces agissantes sont *constantes* ou bien ne dépendent que du *chemin parcouru* ;

b) parmi les grandeurs données ou cherchées figurent : les forces agissantes, le *déplacement du point*, les vitesses au début et à la fin du déplacement (c'est-à-dire les grandeurs F, s, v_0, v_1).

En utilisant simultanément les deux théorèmes, on peut résoudre certains problèmes où parmi les grandeurs données (ou cherchées) figurent le temps de mouvement et le déplacement du point.

Si parmi les diverses forces agissantes une au moins dépend de la vitesse du mouvement, il est impossible de résoudre le problème fondamental de la dynamique en utilisant l'un des théorèmes généraux (car il est impossible de calculer d'avance le travail ou l'impulsion d'une force). Dans ce cas il faut utiliser la méthode d'intégration des équations différentielles du mouvement (chapitre XVII).

L'ordre de solution peut être le suivant.

1. D'après les données du problème, déterminer le théorème à employer pour sa solution.

2. Représenter sur le dessin le point en mouvement dans une position arbitraire et montrer toutes les forces actives et les forces de la réaction de liaison agissant sur lui (dans le cas du mouvement gêné).

3. D'après les formules correspondantes, calculer les impulsions ou le travail de toutes les forces durant le mouvement.

4. En utilisant les égalités (34) ou (42), composer les équations correspondantes et déterminer les valeurs cherchées.

Pendant les calculs numériques il faut attacher une attention particulière à ce que toutes les grandeurs soient exprimées dans le même système d'unités.

Les théorèmes démontrés permettent aussi de déterminer l'impulsion ou le travail des forces agissant sur le point (le premier problème de la dynamique) en connaissant la variation de la quantité de mouvement ou de l'énergie cinétique du point.

Problème 102. Un corps pesant $p = 0{,}1$ kgf effectue un mouvement uniforme à la vitesse de $v = 2$ m/s sur une circonférence. Déterminer l'impulsion et le travail de la force qui agit sur le corps durant l'intervalle de temps que met le corps à parcourir un quart de circonférence.

S o l u t i o n. D'après le théorème de la variation de la quantité de mouvement

$$S = mv_1 - mv_0.$$

En construisant géométriquement la différence de ces quantités de mouvement (fig. 257), on trouve à partir du triangle rectangle obtenu :

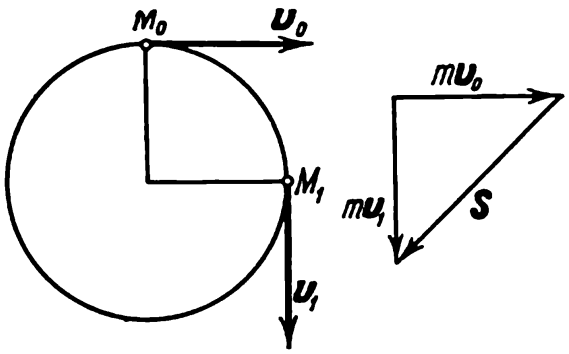
$$S = m\sqrt{v_1^2 + v_0^2}.$$

Mais d'après les conditions du problème $v_1 = v_0 = v$, par conséquent,

$$S = \frac{p}{g} v \sqrt{2} = 0{,}029 \text{ kgf s}.$$

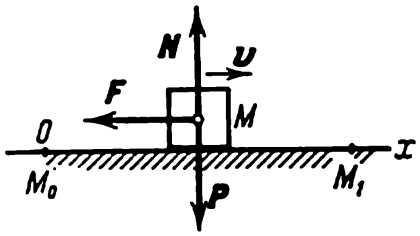
Pour le travail, on déduit de l'équation (42)

$$A_{(M_0M_1)} = \frac{m}{2}(v_1^2 - v_0^2) = 0.$$



F i g. 257

Problème 103. On communique (par un choc) une vitesse initiale v_0 à un corps de masse m situé sur un plan horizontal. Le mouvement ultérieur du corps est freiné par une force constante F. Déterminer le temps écoulé jusqu'à l'arrêt du corps et le chemin parcouru.



F i g. 258

S o l u t i o n. Les données du problème montrent que pour déterminer le temps de mouvement on peut utiliser le premier des théorèmes démontrés et pour déterminer le chemin parcouru, le deuxième.

Représentons le corps (fig. 258) dans une position arbitraire M (M_0 et M_1 sont ses positions initiale et finale). Le corps se trouve sous l'action des forces suivantes : P, poids du corps ; N, réaction du plan et F, force de freinage. En orientant l'axe Ox dans le sens du mouvement, on forme l'équation (34)

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum S_x.$$

Dans le cas présent $v_{1x} = 0$ (v_1 est la vitesse au moment d'arrêt) et $v_{0x} = v_0$. Seule la force $\boldsymbol{F}$ a une projection non nulle sur l'axe Ox. Etant donné qu'elle est constante, $S_x = F_x t_1 = -Ft_1$, où t_1 désigne le temps de freinage. Substituant ces données dans notre équation, on obtient $-mv_0 = -Ft_1$, d'où le temps cherché

$$t_1 = \frac{mv_0}{F}. \qquad \text{(a)}$$

Pour trouver le chemin parcouru durant le freinage on utilise le théorème de la variation de l'énergie cinétique

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}.$$

Ici de nouveau $v_1 = 0$, et c'est encore seule la force $\boldsymbol{F}$ qui produit un travail; en outre, $A(\boldsymbol{F}) = -Fs$, où s désigne le chemin parcouru durant le freinage. Le

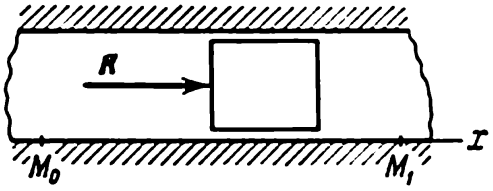


Fig. 259

travail des forces $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{N}$ est égal à zéro, car ces forces sont perpendiculaires au déplacement. Il en résulte: $-\frac{mv_0^2}{2} = -Fs_1$ et le chemin cherché

$$s_1 = \frac{mv_0^2}{2F}. \qquad \text{(b)}$$

On voit des formules (a) et (b) que pour une force donnée F, le temps de freinage s'accroît proportionnellement à la vitesse initiale v_0, tandis que le chemin parcouru durant le freinage augmente proportionnellement au carré de la vitesse initiale.

Si la force de freinage est représentée par la force de frottement et si en outre le coefficient de frottement f est connu, $F = fP = fmg$ et les égalités (a) et (b) donnent:

$$t_1 = \frac{v_0}{fg}, \quad s_1 = \frac{v_0^2}{2fg}.$$

Remarquons que si c'est la quantité initiale de mouvement du corps $q_0 = mv_0$ (par exemple, $q_0 = 2$ kgf s) qui était donnée au lieu de la masse m du corps et de sa vitesse initiale v_0, on pourrait en connaissant F trouver de l'égalité (a) le temps de freinage; mais ces données seraient insuffisantes pour déterminer le chemin s_1 parcouru durant le freinage.

Et inversement, en connaissant l'énergie cinétique initiale du corps $T_0 = \frac{mv_0^2}{2}$ et la force F, on pourrait déterminer à partir de l'égalité (b) le chemin s_1 parcouru durant le freinage, mais on ne pourrait pas trouver le temps de freinage t_1. Ces particularités ont déjà été soulignées au paragraphe 109.

Problème 104. En considérant que la résultante $\boldsymbol{R}$ de toutes les forces agissant sur le piston (fig. 259) varie durant un certain intervalle de temps suivant la loi $R = 0{,}4P(1 - kt)$, où P désigne le poids du piston, t, le temps en secondes et k est un coefficient égal à 1,6 1/s, déterminer la vitesse du piston à l'i· $t_1 = 0{,}5$ s, si à l'instant $t_0 = 0$ sa vitesse $v_0 = 0{,}2$ m/s.

S o l u t i o n. Etant donné que la force agissant sur le piston dépend du temps et que les grandeurs données et cherchées sont t_1, v_0 et v_1, appliquons l'équation (34) à la résolution de ce problème:

$$mv_{1x} - mv_{0x} = S_x.$$

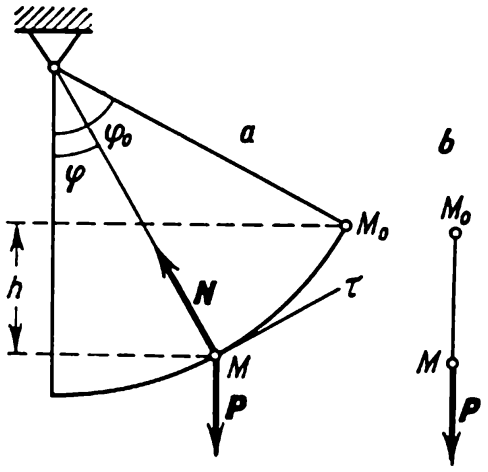
Dans le cas donné

$$S_x = \int_0^{t_1} R_x\, dt = 0{,}4P \int_0^{t_1} (1 - kt)\, dt = 0{,}4Pt_1 \left(1 - \frac{k}{2} t_1\right).$$

D'autre part, $v_{0x} = v_0$, $v_{1x} = v_1$, $P = mg$. Substituant ces diverses valeurs dans l'équation (33) et en tenant compte que $k = 1{,}6$ 1/s et $t_1 = 0{,}5$ s, on obtient:

$$v_1 = v_0 + 0{,}4gt_1 \left(1 - \frac{k}{2} t_1\right) \approx 1{,}4 \text{ m/s}.$$

Problème 105. Un corps suspendu à un fil de longueur l (fig. 260, *a*) est écarté de la verticale d'un angle φ_0 puis lâché sans qu'on lui imprime une vitesse initia-



F i g. 260

le. Trouver la vitesse du corps au moment où le fil forme un angle φ avec la verticale.

S o l u t i o n. Les conditions du problème comprenant le *déplacement* du corps, déterminé par l'angle d'écartement du fil, et les vitesses v_0 et v_1, utilisons, pour résoudre le problème, le théorème de la variation de l'énergie cinétique:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_{(M_0M_1)}.$$

Le corps est soumis à l'action de la force P et de la réaction N du fil. Le travail de la force N est égal à zéro, car $N_\tau = 0$. On déduit de la formule (39) pour la force P que $A(P) = Ph = mgh$. En définitive, vu que $v_0 = 0$, on obtient $\frac{mv_1^2}{2} = mgh$, d'où

$$v_1 = \sqrt{2gh}.$$

C'est la formule bien connue de Galilée. Il est évident qu'on obtiendra le même résultat pour la vitesse v d'un corps en chute libre (fig. 260, *b*).

Dans le problème examiné $h = l\cos\varphi - l\cos\varphi_0$, et finalement

$$v_1 = \sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}.$$

Problème 106. Un ressort de soupape détendu a une longueur $l_0 = 6$ cm. Quand la soupape est entièrement ouverte, la longueur du ressort est $l = 4$ cm, la course de la soupape est $s = 0{,}6$ cm (fig. 261). La rigidité du ressort est $c = 0{,}1$ kg/cm, le poids de la soupape $p = 0{,}4$ kgf. En négligeant l'action de la force de pesanteur et des forces de résistance, déterminer la vitesse de la soupape au moment de la fermeture.

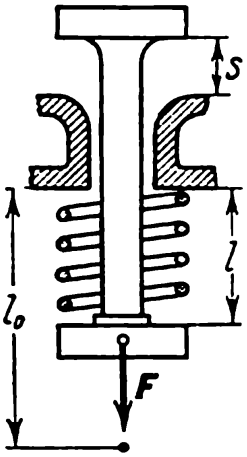


Fig. 261

Solution. La force élastique F, qui agit sur la soupape, dépend de la distance; on donne en outre le déplacement s de la soupape. C'est pourquoi, pour résoudre le problème, nous utilisons l'équation (42)

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{(M_0M_1)}.$$

Il découle des conditions du problème que seule la force élastique du ressort fournit un travail. On aura donc d'après la formule (40):

$$A_{(M_0M_1)} = \frac{c}{2}[(\Delta l_{\text{init}})^2 - (\Delta l_{\text{fin}})^2].$$

Dans le cas donné

$$\Delta l_{\text{init}} = l_0 - l = 2 \text{ cm}, \quad \Delta l_{\text{fin}} = l_0 - l - s = 1{,}4 \text{ cm}.$$

Mais on a aussi $v_0 = 0$ et $m = \frac{p}{g}$. Substituant ces diverses valeurs dans l'équation (42) on obtient:

$$v_1 = \sqrt{\frac{cg}{p}[(\Delta l_{\text{init}})^2 - (\Delta l_{\text{fin}})^2]} \approx 0{,}22 \text{ m/s}.$$

Pendant le calcul il faut attacher une attention particulière aux dimensions (Δl étant calculée en centimètres, il faut prendre pour $g = 980$ cm/s^2).

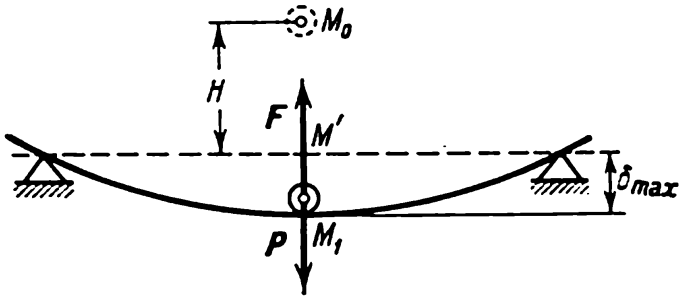


Fig. 262

Problème 107. Un corps pesant posé au milieu d'une poutre élastique (fig. 262) la fléchit d'une grandeur δ_{st} (flexion statique de la poutre). En négligeant le poids de la poutre, déterminer la valeur de la flexion maximum δ_{max} si le corps tombe sur la poutre d'une hauteur H.

Solution. De même que pour le problème précédent, utilisons l'équation (42). Dans le cas donné la vitesse initiale v_0 du corps et sa vitesse finale v_1 (au

moment de la flexion maximum de la poutre) sont égales à zéro, et l'équation (42) prend la forme suivante :

$$\sum A_k = 0. \qquad \text{(a)}$$

Le travail est ici produit par la force de pesanteur P durant le déplacement M_0M_1 et par la force élastique F de la poutre durant le déplacement $M'M_1$. On a ici $A(P) = P(H + \delta_{max})$, $A(F) = -\frac{c}{2}\delta_{max}^2$, car pour la poutre $\Delta l_{init} = 0$, $\Delta l_{fin} = \delta_{max}$. Substituant ces valeurs dans l'égalité (a), on obtient :

$$P(H+\delta_{max}) - \frac{c}{2}\delta_{max}^2 = 0.$$

Mais quand l'équilibre du corps sur la poutre est atteint, la force de pesanteur est équilibrée par la force élastique ; par conséquent, $P = c\delta_{st}$, et on peut mettre l'égalité précédente sous la forme :

$$\delta_{max}^2 - 2\delta_{st}\delta_{max} - 2\delta_{st}H = 0.$$

En résolvant cette équation du second degré sous les conditions du problème impliquant que δ_{max} est positif, on trouve

$$\delta_{max} = \delta_{st} + \sqrt{\delta_{st}^2 + 2H\delta_{st}}.$$

Il est intéressant de noter que pour $H = 0$ on aura $\delta_{max} = 2\delta_{st}$. Par conséquent, si on pose le corps au milieu d'une poutre horizontale, sa flexion maximum pendant la descente du corps sera égale au double de la flexion statique. Ensuite la poutre et le corps effectueront des oscillations autour de la position d'équilibre. Sous l'influence des résistances, ces oscillations s'amortiront graduellement et le système sera en équilibre dans la position pour laquelle la flexion de la poutre sera égale à δ_{st}.

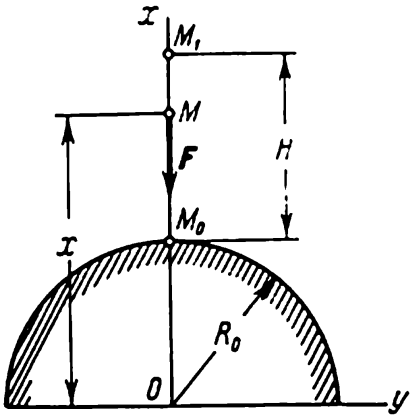


Fig. 263

Problème 108. Déterminer quelle vitesse initiale v_0, dirigée verticalement vers le haut, faut-il communiquer à un corps pour qu'il s'élève de la surface de la Terre à une hauteur donnée H. Pendant les calculs on suppose que la force de pesanteur varie en raison inverse du carré de la distance au centre de la Terre. Négliger la résistance de l'air.

Solution. Pour résoudre le problème utilisons le théorème de la variation de l'énergie cinétique ; considérons le corps comme un point matériel. Plaçons l'origine des coordonnées au centre de la Terre (centre de la pesanteur) et orientons l'axe Ox dans le sens du mouvement (fig. 263). Représentons un point quelconque M en mouvement sous l'action de la force F.

D'après les conditions du problème

$$F = \frac{km}{x^2},$$

où m désigne la masse du point et k, un coefficient numérique.

Pour déterminer k, notons que quand le point se trouve à la surface de la Terre ($x = R_0$, où R_0 est le rayon de la Terre), la force de pesanteur est égale à mg_0, où g_0 désigne l'accélération de la force de pesanteur à la surface de la Terre.

Il en découle que

$$mg_0 = \frac{km}{R_0^2} \quad \text{et} \quad k = R_0^2 g_0.$$

D'après le théorème de la variation de l'énergie cinétique :

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{(M_0M_1)}. \tag{a}$$

Au moment où le point atteint la position la plus élevée $v_1 = 0$. Pour calculer le travail appliquons la formule (38'). Dans le cas donné

$$F_x = -F = -\frac{mk}{x^2}, \quad F_y = F_z = 0.$$

Alors

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} \left(-\frac{km}{x^2}\right) dx = -km \int_{R_0}^{R_0+H} \frac{dx}{x^2}.$$

En calculant l'intégrale, on trouve que

$$A_{(M_0M_1)} = km\left(\frac{1}{R_0+H} - \frac{1}{R_0}\right) = -\frac{km\,H}{R_0(R_0+H)}.$$

Substituant la valeur trouvée pour le travail dans l'équation (a) et en remplaçant k par sa valeur, on obtient finalement :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2g_0R_0H}{R_0+H}}.$$

Examinons les cas particuliers.

a) Admettons que H est très petit par rapport à R_0. Alors H/R_0 a une valeur très proche du zéro. En divisant le numérateur et le dénominateur par R_0, on obtient :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2g_0H}{1+\frac{H}{R_0}}} \approx \sqrt{2g_0H}.$$

Ainsi, pour des H très petits, on retrouve la formule de Galilée.

b) Trouvons la vitesse initiale qu'on doit communiquer à un corps pour qu'il s'éloigne à l'infini. En divisant le numérateur et le dénominateur par H, on obtient :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2g_0R_0}{1+\frac{R_0}{H}}}.$$

Si $H = \infty$, en prenant le rayon moyen de la Terre $R_0 \approx 6\,370$ km, on obtient

$$v_0 = \sqrt{2g_0R_0} \approx 11{,}2 \text{ km/s}.$$

Par conséquent, un corps, lancé de la surface de la Terre à la vitesse de 11,2 km/s, se libère du champ d'attraction de la Terre. Les calculs donnent que pour des vitesses initiales comprises entre les limites 8 km/s $\leqslant v_0 \leqslant$ 11 km/s, un corps, lancé suivant une tangente à la Terre, ne retombera plus à sa surface et deviendra un satellite de notre planète. Si les vitesses initiales sont inférieures à 8 km/s, ou si le lancement n'est pas horizontal, le corps, après avoir décrit une trajectoire elliptique, retombera sur la Terre. Tous ces résultats se rapportent au cas du mouvement dans le vide (voir le chapitre XXII).

§ 116. Théorème de la variation du moment de la quantité de mouvement du point (théorème des moments). Des deux caractéristiques dynamiques fondamentales introduites au paragraphe 109, l'une, mv, est une grandeur vectorielle. Parfois, au cours de l'étude du mouvement du point, au lieu de la variation du vecteur mv il se trouve nécessaire d'examiner la variation de son moment. Le moment du vecteur mv par rapport à un centre donné O ou à un axe z est désigné par $m_O(mv)$ ou $m_z(mv)$ et est appelé en conséquence *moment de la quantité de mouvement* ou *moment cinétique* du point par rapport à ce centre (axe). On calcule le moment du vecteur mv de la même façon que le moment d'une force. On considère dans ce cas que le vecteur mv est appliqué au point en mouvement. En module, $|m_O(mv)| = mvh$, où h désigne la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre O sur la direction du vecteur mv (voir fig. 264).

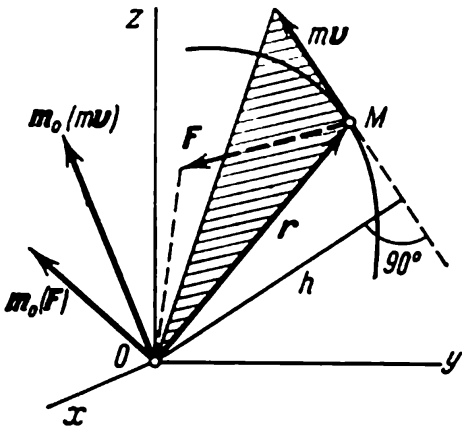


Fig. 264

1. Théorème des moments par rapport à un axe[1].

Examinons un point matériel de masse m qui se meut sous l'action d'une force F. Trouvons pour ce point la relation entre les moments des vecteurs mv et F par rapport à un axe immobile z.

En vertu des formules du § 42

$$m_z(F) = xF_y - yF_x. \tag{43}$$

Par analogie, pour la grandeur $m_z(mv)$, si l'on met m en facteur, on aura

$$m_z(mv) = m(xv_y - yv_x). \tag{43'}$$

En dérivant les deux membres de cette égalité par rapport au temps, on trouve :

$$\frac{d}{dt}[m_z(mv)] = m\left(\frac{dx}{dt}v_y - \frac{dy}{dt}v_x\right) + \left(xm\frac{dv_y}{dt} - ym\frac{dv_x}{dt}\right).$$

Dans le membre droit de l'expression obtenue, le terme figurant entre les premières parenthèses est égal à zéro, car $\frac{dx}{dt} = v_x$ et $\frac{dy}{dt} = v_y$. Le terme figurant entre les secondes parenthèses est égal à $m_z(F)$ en vertu de la formule (43) car d'après la loi fondamentale

[1] Ce résultat peut être considéré comme un cas particulier de celui examiné dans la subdivision 2.

de la dynamique:

$$m\frac{dv_y}{dt}=F_y,\quad m\frac{dv_x}{dt}=F_x.$$

On aura finalement

$$\frac{d}{dt}[m_z(mv)]=m_z(F). \tag{44}$$

L'équation obtenue exprime le théorème des moments par rapport à un axe: *la dérivée par rapport au temps du moment de la quantité de mouvement du point par rapport à un axe quelconque est égale au moment de la force agissante par rapport à ce même axe.* Un théorème analogue peut être énoncé pour les moments par rapport à un centre O quelconque. Son expression mathématique est donnée plus bas par la formule (45').

2. Théorème des moments par rapport à un centre. Trouvons pour un point matériel qui se meut sous l'impulsion de la force $\boldsymbol{F}$ (fig. 264) la relation entre les moments des vecteurs $m\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{F}$ par rapport à un centre immobile O. A la fin du paragraphe 41 on a montré que $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$. D'une manière analogue,

$$\boldsymbol{m}_O(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}.$$

En outre, la direction du vecteur $\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})$ est perpendiculaire au plan passant par le centre O et le vecteur $\boldsymbol{F}$, tandis que celle du vecteur $\boldsymbol{m}_O(m\boldsymbol{v})$ est perpendiculaire au plan passant par le centre O et le vecteur $m\boldsymbol{v}$. En dérivant l'expression $\boldsymbol{m}_O(m\boldsymbol{v})$ par rapport au temps, on obtient:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})=\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times m\boldsymbol{v}\right)+\left(\boldsymbol{r}\times m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right)=(\boldsymbol{v}\times m\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{w}).$$

Mais $\boldsymbol{v}\times m\boldsymbol{v}=0$ en tant que produit vectoriel de deux vecteurs parallèles, tandis que $m\boldsymbol{w}=\boldsymbol{F}$. Par conséquent,

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{45}$$

ou

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{m}_O(m\boldsymbol{v})]=\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}). \tag{45'}$$

On a donc démontré le théorème des moments par rapport au centre: *la dérivée par rapport au temps du moment de la quantité de mouvement du point, pris par rapport à un centre immobile, est égale au moment de la force agissant sur le point par rapport à ce centre.* Un théorème analogue a lieu également pour les moments du vecteur $m\boldsymbol{v}$ et ceux de la force $\boldsymbol{F}$ par rapport à un axe quelconque z; on peut s'en convaincre en projetant les deux parties de l'égalité (45') sur cet axe. Une démonstration directe

en a été donnée au point 1. L'expression mathématique du théorème des moments par rapport à un axe est donnée par la formule (44).

En comparant les équations (45′) et (32), on voit que les moments des vecteurs mv et F sont reliés par une relation analogue à celle qui lie mv et F.

Problème 109. Une bille M est fixée à un fil MBA dont la portion BA passe à l'intérieur d'un tube vertical (fig. 265). A l'instant où la bille se trouve à une distance h_0 de l'axe z du tube on lui imprime une vitesse initiale v_0, dirigée perpendiculairement au plan MBA. En même temps on fait glisser lentement le fil à l'intérieur du tube en tirant par l'extrémité A. Trouver la vitesse v_1 du fil à l'instant où sa distance de l'axe z sera égale à h_1.

Solution. La bille est soumise à l'action de la force de pesanteur P et à la réaction T du fil. Les moments de ces forces par rapport à l'axe z sont nuls, étant donné que la force P lui est parallèle et la réaction le coupe. En vertu de l'équation (44) on a

$$\frac{d}{dt}[m_z(mv)]=0,$$

d'où $m_z(mv) = mvh = \text{const}$.

La masse m étant constante, on trouve que pour une bille en mouvement $v_0h_0 = v_1h_1$, d'où

$$v_1=\frac{h_0}{h_1}v_0.$$

La vitesse de la bille croît au fur et à mesure que celle-ci se rapproche de l'axe z.

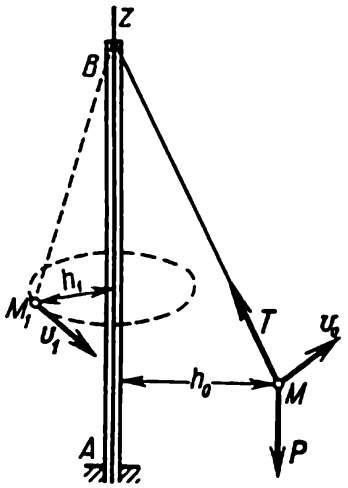


Fig. 265

3. Mouvement réalisé sous l'action d'une force centrale. On appelle *force centrale* une force dont la ligne d'action passe toujours par un centre donné O. Un exemple d'une telle force nous est fourni par l'attraction d'une planète par le Soleil.

Etudions à l'aide de l'équation (45′) le mouvement du point M (fig. 266) sous l'action d'une force centrale F. Etant donné que dans ce cas $m_O(F) = 0$, $m_O(mv) = r \times mv = \text{const.}$, autrement dit, le vecteur $m_O(mv)$ est constant en module et en direction. Il en résulte d'abord que les vecteurs r et v doivent toujours être situés dans un même plan (pour que la direction du vecteur $r \times mv$ soit constante); par conséquent, la trajectoire du point sera une courbe plane. En outre, $|m_O(mv)|$ est aussi constant en module, la masse m restant constante, on a $m_O(v) = vh = \text{const}$.

Ainsi, pendant un mouvement effectué sous l'action d'une force centrale la trajectoire du point est une courbe plane et la vitesse v varie de manière que le moment du vecteur v par rapport au centre O reste constant ($vh = \text{const}$).

Ce dernier résultat a une interprétation géométrique évidente. Etant donné que $vh = \frac{ds}{dt} h$ et $ds \cdot h = 2d\sigma$, où $d\sigma$ est la surface du triangle élémentaire OMb, il en résulte que si $vh = 2\frac{d\sigma}{dt} = \text{const.}$, $\frac{d\sigma}{dt}$ sera aussi constant.

La grandeur $\frac{d\sigma}{dt}$ détermine la vitesse de l'accroissement de l'aire balayée par le rayon vecteur OM pendant le mouvement du point

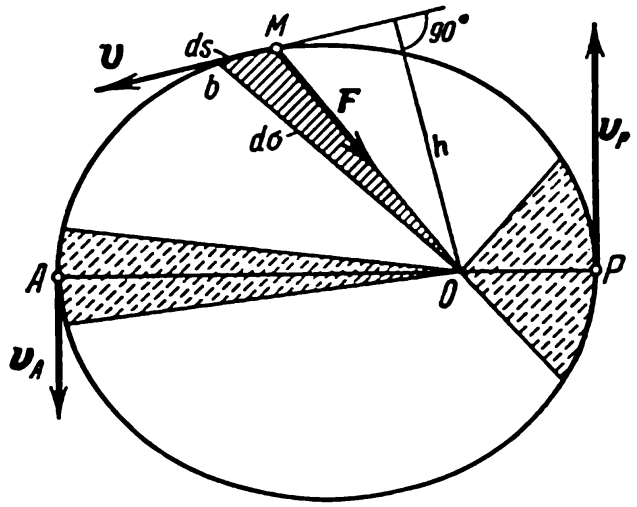


Fig. 266

M, et elle est appelée *vitesse aréolaire*. Dans le cas examiné, cette vitesse est constante. Ainsi, *durant le mouvement d'un point soumis à l'action d'une force centrale, le rayon vecteur du point balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux* (loi des aires). Cette loi peut s'appliquer au mouvement des planètes; et c'est l'une des lois de Kepler.

Si on considère la courbe de la figure 266 comme représentant l'orbite (ellipse) d'une planète dont le Soleil occupe l'un des foyers, au point P, appelé *périhélie*, la planète atteindra sa vitesse maximale et au point A, appelé *aphélie*, sa vitesse minimale. Cette conclusion résulte du fait que les surfaces des secteurs hachurés, balayés durant des intervalles de temps égaux, doivent être égales. Le rapport entre les vitesses v_P et v_A peut être aussi déduit de l'égalité de leurs moments: $v_P \cdot OP = v_A \cdot OA$.

Chapitre XIX

MOUVEMENT GÊNÉ DU POINT ET PRINCIPE DE D'ALEMBERT

§ 117. Equations du mouvement du point assujetti à suivre une trajectoire déterminée. On a déjà remarqué que certains problèmes relatifs au mouvement gêné peuvent être résolus à l'aide des théorèmes généraux de la dynamique. Examinons une autre méthode de résolution de ces problèmes que l'on peut appliquer à n'importe quel système de forces agissantes et qui permet de trouver simultanément la loi de mouvement du point ainsi que les réactions des liaisons.

Soit un point se mouvant sur une trajectoire plane donnée sous l'action des forces actives $F_1^a, F_2^a, \ldots, F_n^a$. Choisissons sur la trajectoire l'origine O (fig. 267) et déterminons la position du point M en mouvement par la coordonnée curviligne $s = \widehat{OM}$ (voir le paragraphe 68). Si, en rejetant au préalable la liaison, on remplace son action par la force de réaction N, la loi fondamentale de la dynamique prend la forme suivante (voir le paragraphe 102):

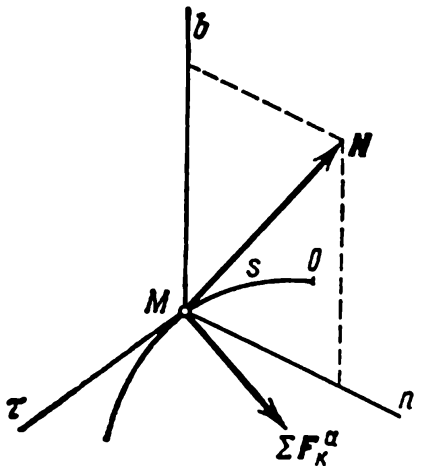


Fig. 267

$$m\boldsymbol{w} = \sum \boldsymbol{F}_k^a + \boldsymbol{N}. \tag{46}$$

Au point M menons la tangente $M\tau$ à la trajectoire (orientée *dans la direction positive de s*), la normale principale Mn (orientée *vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire*) et un axe Mb, perpendiculaire aux deux demi-droites précédentes, appelé binormale. Projetons les deux membres de l'égalité (46) sur ces axes. Comme la trajectoire est plane, la réaction N est perpendiculaire à cette trajectoire, c'est-à-dire qu'elle est située dans le plan Mbn et que, par conséquent, $N_\tau = 0$. Dans ce cas on aura:

$$mw_\tau = \sum F_{k\tau}^a, \quad mw_n = \sum F_{kn}^a + N_n, \quad mw_b = \sum F_{kb}^a + N_b.$$

Mais $w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$, $w_n = \frac{v^2}{\rho}$ et $w_b = 0$, car le vecteur accélération $\boldsymbol{w}$ est situé dans le plan contigu $M\tau n$. On obtient ainsi les *équations différentielles du mouvement du point sur une trajectoire*

donnée:

$$m\frac{dv}{dt}=\sum F_{k\tau}^{a} \quad \text{ou} \quad m\frac{d^2s}{dt^2}=\sum F_{k\tau}^{a}; \tag{47}$$

$$\frac{mv^2}{\rho}=\sum F_{kn}^{a}+N_n, \quad 0=\sum F_{kb}^{a}+N_b. \tag{48}$$

Les équations obtenues permettent de résoudre les deux problèmes du mouvement gêné, indiqués au paragraphe 102.

L'équation (47) ne comporte pas la réaction inconnue N, ce qui permet de déterminer la loi de mouvement du point le long de la trajectoire, c'est-à-dire la relation $s = f(t)$. Les équations (48) servent alors à déterminer la réaction de la liaison (voir le paragraphe 118).

On peut aussi utiliser les équations obtenues dans le cas où la trajectoire est une courbe gauche; dans ce cas aux forces F_k^a doit s'ajouter la force de frottement.

Les équations (47), (48) sont valables également pour un mouvement du point libre, si l'on pose $N = 0$.

Problème 110. On communique à un anneau pesant, enfilé sur un fil en cercle de rayon $R = 0{,}3$ m qui est posé horizontalement, une vitesse initiale

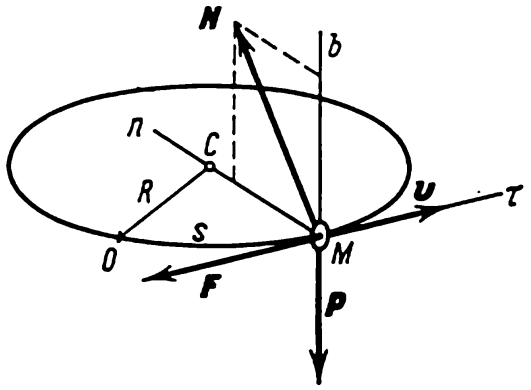


Fig. 268

$v_0 = 2$ m/s, dirigée suivant la tangente au cercle. Le coefficient de frottement de l'anneau sur le fil $f = 0{,}3$. Déterminer quelle distance s_1 parcourra l'anneau le long du cercle avant de s'arrêter.

Solution. Choisissons pour origine O la position initiale de l'anneau (fig. 268). Représentons une position arbitraire de l'anneau et traçons les axes $M\tau$, Mn et Mb. L'anneau est soumis à l'action de la force de la pesanteur P, de la réaction N et de la force de frottement F. En formant les équations (47), (48) on obtient:

$$m\frac{dv}{dt}=-F, \quad \frac{mv^2}{R}=N_n, \quad N_b-P=0.$$

En module $F = fN = f\sqrt{N_b^2+N_n^2}$ (il serait faux de calculer la force de frottement en formant la somme arithmétique de forces fN_b et fN_n). En notant

que $N_b = P = mg$, on trouve :

$$F = fm\sqrt{g^2 + \frac{v^4}{R^2}}.$$

On remarquera que la force de frottement dépend par l'intermédiaire de la réaction N de la vitesse du mouvement de l'anneau. C'est pourquoi il ne serait pas possible de résoudre le problème donné à l'aide du théorème de la variation de l'énergie cinétique.

Pour trouver du premier coup la relation entre s et v, notons que $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v$. Après simplification par m, l'équation prend la forme suivante :

$$v\frac{dv}{ds} = -\frac{f}{R}\sqrt{g^2R^2 + v^4}.$$

En séparant les variables, on trouve

$$\frac{d(v^2)}{\sqrt{g^2R^2 + v^4}} = -\frac{2f}{R}ds,$$

d'où

$$\frac{2f}{R}s = -\operatorname{Log}\left(v^2 + \sqrt{g^2R^2 + v^4}\right) + C_1.$$

D'après les conditions initiales, quand $s = 0$ la vitesse $v = v_0$. Par conséquent, $C_1 = \operatorname{Log}\left(v_0^2 + \sqrt{g^2R^2 + v_0^4}\right)$ et finalement

$$s = \frac{R}{2f}\operatorname{Log}\frac{v_0^2 + \sqrt{g^2R^2 + v_0^4}}{v^2 + \sqrt{g^2R^2 + v^4}}.$$

Au moment d'arrêt $v = 0$. C'est pourquoi le chemin parcouru (si on prend approximativement $g \approx 10$ m/s²) est égal à

$$s_1 = \frac{R}{2f}\operatorname{Log}\frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + g^2R^2}}{gR} \approx \frac{1}{2}\operatorname{Log}3 \approx 0{,}55 \text{ m}.$$

§ 118. Détermination des réactions de liaisons. Si un point est assujetti à se mouvoir sur une trajectoire déterminée, on obtient la réaction de liaisons à l'aide des équations (48). Il convient alors de représenter le point en mouvement dans la position pour laquelle on détermine cette réaction. Si la vitesse v, qui entre dans l'équation (48), n'est pas connue à l'avance, on peut très souvent la déterminer au moyen du théorème de la variation de l'énergie cinétique (voir § 114).

On voit de l'équation (48) que durant un mouvement curviligne la réaction dynamique N, contrairement à la réaction statique, dépendra non seulement des forces actives agissantes et de la nature de la liaison, mais aussi de la vitesse du mouvement.

Problème 111. Un corps de poids P, suspendu à un fil de longueur l, est écarté d'un angle α de la verticale et amené ainsi à la position M_0 d'où il est lâché sans qu'une vitesse initiale lui soit communiquée. Déterminer la tension du fil au moment où le poids parvient à la position la plus basse M_1.

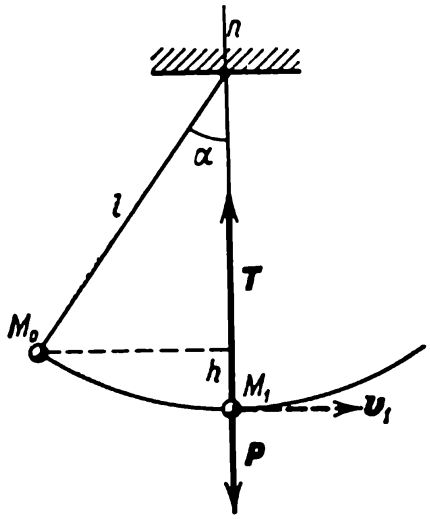
S o l u t i o n. Représentons le corps dans la position pour laquelle on doit trouver la tension du fil, soit M_1 (fig. 269). Le corps est soumis à l'action de la force P et de la réaction T du fil. Traçons la normale M_1n dirigée *vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire* et formons l'équation (48), en tenant compte que dans ce cas $\rho = l$. On obtient :

$$\frac{mv_1^2}{l} = T - P \quad \text{ou} \quad T = P + \frac{mv_1^2}{l},$$

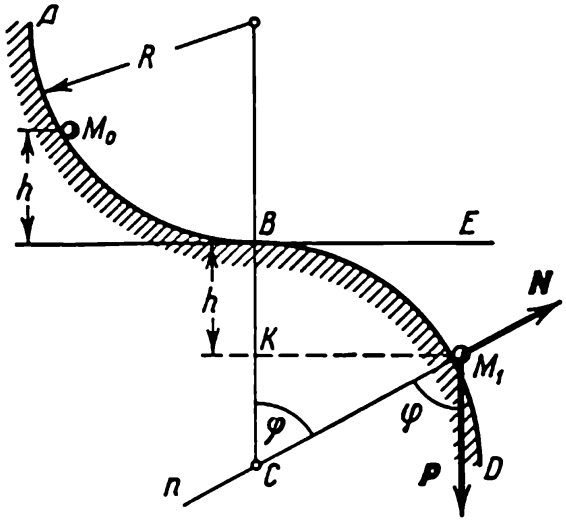
où v_1 désigne la vitesse du corps au point M_1. Pour déterminer v_1 utilisons l'équation (42')

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A^{\text{a}}_{(M_0M_1)}. \qquad \text{(a)}$$

Sur le tronçon M_0M_1 du trajet seule la force P produit un travail. C'est pourquoi $A^{\text{a}} = Ph = Pl\,(1 - \cos\alpha)$.



F i g. 269



F i g. 270

Comme $v_0 = 0$, en substituant la valeur trouvée pour le travail dans l'égalité (a), on obtient $mv_1^2 = 2Pl\,(1 - \cos\alpha)$ et on trouve finalement

$$T = P\,(3 - 2\cos\alpha).$$

Dans le cas particulier, où l'angle d'écartement initial $\alpha = 90°$, la tension du fil au moment du passage par la verticale sera égale à $3P$, c'est-à-dire au triple du poids du corps.

La solution obtenue montre que les réactions dynamiques peuvent en effet différer notablement des réactions statiques.

Problème 112. Un chéneau est composé de deux arcs de cercles AB et BD de rayon R, situés dans le plan vertical de manière que la tangente BE au point de leur jonction soit horizontale (fig. 270).

En négligeant le frottement, déterminer à quelle hauteur h au-dessus de la droite BE il faut lâcher une bille dans le chéneau pour qu'elle quitte l'arc inférieur du chéneau en un point M_1, situé à la même distance h au-dessous de la droite BE.

S o l u t i o n. La bille quittera le point M_1 du chéneau où sa pression sur ce chéneau (ou la réaction N du chéneau) devient nulle. Par conséquent, le

problème se réduit à déterminer N. Représentons la bille au point M_1. Elle est soumise à l'action de la force de la pesanteur P et de la réaction N du chéneau. Formant l'équation (48) en projections sur la normale intérieure M_1n on aura:

$$\frac{mv_1^2}{R}=P\cos\varphi-N.$$

Etant donné qu'au point de rupture du contact $N = 0$ et compte tenu que $R\cos\varphi = KC = R - h$, pour déterminer h on obtient l'équation:

$$mv_1^2=P(R-h). \qquad \text{(a)}$$

On trouve mv_1^2 en utilisant le théorème de la variation de l'énergie cinétique. Vu que $v_0 = 0$, l'équation (42′) donne:

$$\frac{mv_1^2}{2}=A^{a}_{(M_0M_1)}.$$

En ce point seule la force P fournit un travail, de plus $A(P) = P2h$. Par conséquent, $mv_1^2 = 4Ph$. Substituant cette valeur de mv_1^2 dans l'équation (a), on obtient que $4h = R - h$, d'où

$$h = 0{,}2R.$$

Problème 113. Un corps M est suspendu à un fil de longueur l (fig. 271). Quelle vitesse initiale minimale v_0, perpendiculaire au fil, faut-il communiquer à ce corps pour qu'il décrive une circonférence complète?

S o l u t i o n. Le corps décrira une circonférence complète, si en tout point de la trajectoire (sauf peut-être au point M') la tension du fil ne sera pas nulle, c'est-à-dire que le fil restera toujours tendu.

Si en un point quelconque M_1, où $v_1 \neq 0$, la tension du fil s'annule, le fil ne retiendra plus le corps et celui-ci poursuivra son mouvement tel un point libre (en décrivant une parabole).

Pour résoudre le problème trouvons la tension T du fil dans une position arbitraire M, déterminée par l'angle φ et exigeons ensuite que pour tout angle $\varphi \neq 180°$ on ait $T > 0$.

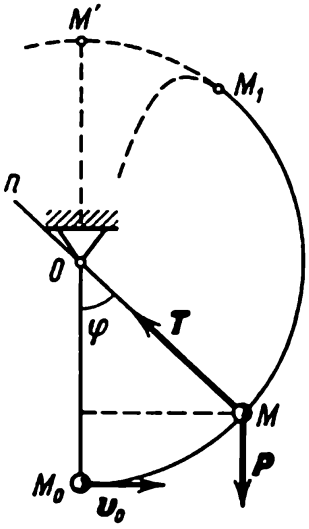


Fig. 271

A la position M le corps est soumis à l'action de la force P et de la tension T du fil. En écrivant l'équation (48) en projections sur la normale intérieure Mn, on obtient

$$\frac{mv^2}{l}=T-P\cos\varphi, \qquad \text{(a)}$$

où v désigne la vitesse du corps à la position M. Pour déterminer v utilisons le théorème de la variation de l'énergie cinétique:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=A^{a}_{(M_0M_1)}.$$

Dans le cas présent

$$A^{a}_{(M_0M_1)}=-Ph=-Pl(1-\cos\varphi)$$

et, par conséquent,

$$mv^2=mv_0^2-2Pl(1-\cos\varphi).$$

Substituant cette valeur de mv^2 dans l'équation (a), on obtient pour T:

$$T=P\left(\frac{v_0^2}{gl}-2+3\cos\varphi\right).$$

La valeur minimale de T sera obtenue pour $\varphi = 180°$:

$$T_{\min}=P\left(\frac{v_0^2}{gl}-5\right).$$

Pour que T ne s'annule pas (sauf peut-être au point M') il est nécessaire que $T_{\min} \geqslant 0$. Il en résulte que:

$$\frac{v_0^2}{gl} \geqslant 5 \quad \text{ou} \quad v_0 \geqslant \sqrt{5gl}.$$

Par conséquent, la vitesse initiale minimale, pour laquelle le corps décrira une circonférence complète, est déterminée par l'égalité:

$$v_{0\,\min}=\sqrt{5gl}.$$

Supposons qu'au lieu d'un fil le corps soit suspendu à une tige légère impondérable et rigide de longueur l. Vu qu'à la différence d'un fil une tige peut travailler aussi bien à la compression qu'à la traction, le corps décrira une circonférence complète si pendant le mouvement sa vitesse ne s'annule en aucun point sauf peut-être au point M'. En utilisant l'équation (42') pour le déplacement M_0M' et en estimant qu'au point M' la vitesse $v = 0$, on obtient: $-\frac{mv_0^2}{2} = -mg\cdot 2l$. Il s'ensuit que dans ce cas

$$v_{0\,\min}=\sqrt{4gl}.$$

§ 119. Principe de d'Alembert. Soit un point matériel M assujetti à se mouvoir sur une courbe ou sur une surface immobiles

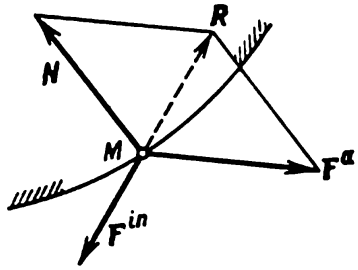


Fig. 272

(fig. 272). Désignons la résultante de toutes les forces actives, appliquées à ce point, par F^a. Si on remplace l'action de la liaison par la force de réaction N, on peut considérer le point M comme un point libre qui se meut sous l'action des forces F^a et N. Trouvons quelle force F^i il faut ajouter aux forces F^a et N pour les équilibrer. Si on désigne la résultante des forces F^a et N par R, il est évident que la force cherchée $F^i = -R$.

Exprimons la force F^i en fonction de l'accélération du point en mouvement. Etant donné qu'en vertu de la loi fondamentale de la

dynamique $\boldsymbol{R} = m\boldsymbol{w}$,

$$\boldsymbol{F}^{\text{i}} = -m\boldsymbol{w}.$$

La force $\boldsymbol{F}^{\text{i}}$, égale en module au produit de la masse du point par son accélération, est dirigée dans le sens opposé de l'accélération et est appelée *force d'inertie* du point M.

Ainsi, si on ajoute la force d'inertie $\boldsymbol{F}^{\text{i}}$ aux forces $\boldsymbol{F}^{\text{a}}$ et $\boldsymbol{N}$, ces forces seront équilibrées et on aura :

$$\boldsymbol{F}^{\text{a}} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}^{\text{i}} = 0. \tag{49}$$

Le résultat obtenu exprime *le principe de d'Alembert* pour le point : *si à chaque moment donné on ajoute la force d'inertie aux forces actives appliquées et aux forces de réaction des liaisons, le système de forces obtenu sera en équilibre et vérifiera toutes les équations de la statique.*

L'importance du principe de d'Alembert réside dans la possibilité lors de la résolution des problèmes dynamiques de former les équations de mouvement sous la forme d'équations d'équilibre. L'importance de cette méthode se manifeste notamment en dynamique des systèmes.

En utilisant le principe de d'Alembert il faut toujours avoir en vue que *seules* les forces $\boldsymbol{F}^{\text{a}}$ et $\boldsymbol{N}$ agissent effectivement sur le point et que le point est *en mouvement*. La force d'inertie *n'agit pas* sur le point en mouvement et on n'introduit cette notion que pour avoir la possibilité de former les équations de la dynamique en utilisant des méthodes plus simples de la statique.

En mécanique il est convenu d'appeler « force d'inertie » la force égale à $-m\boldsymbol{w}$ pour la raison suivante. Si, par exemple, on déplace un poids quelconque avec la main en lui communiquant un mouvement de translation accéléré, la force ainsi appliquée au poids sera $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{w}$. A son tour, conformément à la loi de l'égalité de l'action et de la réaction, le poids, en s'opposant à la variation de sa vitesse, agira sur la main avec la force $\boldsymbol{Q} = -m\boldsymbol{w}$. Comme la force $\boldsymbol{Q} = -m\boldsymbol{w}$ est conditionnée par l'inertie du poids, elle peut dans ce sens être appelée « force d'inertie ». L'exemple cité ne donne que la signification du vocable « force d'inertie » pour la grandeur $-m\boldsymbol{w}$. Cependant, la force $\boldsymbol{Q}$, examinée ici, comme on le voit, agit non pas sur le poids, mais sur la main, qui accélère le mouvement de ce poids.

Le poids lui-même, comme nous l'avons déjà indiqué, ne subit l'action d'aucune force d'inertie.

Pendant la résolution des problèmes pour représenter les forces d'inertie il faut nécessairement connaître la direction de l'accélération du point. Quand le mouvement est rectiligne, on connaît la direction de $\boldsymbol{w}$. Dans ce cas la force $\boldsymbol{F}^{\text{i}}$ est dirigée dans le sens opposé à $\boldsymbol{w}$, et en module $F^{\text{i}} = mw$.

Durant un mouvement curviligne on peut représenter la force d'inertie à l'aide de ses composantes normale et tangentielle. En projetant les deux membres de l'égalité $\boldsymbol{F}^{\text{i}} = -m\boldsymbol{w}$ sur la tangente

et sur la normale principale à la trajectoire, on obtient :

$$F_\tau^{\text{i}} = -mw_\tau = -m\frac{dv}{dt}, \quad F_n^{\text{i}} = -mw_n = -\frac{mv^2}{\rho}.$$

Ces égalités montrent que *la composante tangentielle de la force d'inertie* F_τ^{i} *est dirigée dans le sens opposé à l'accélération tangentielle* (c'est-à-dire dans le sens de la vitesse décroissante), *tandis que la composante normale de la force d'inertie ou centrifuge* F_n^{i} *est dirigée le long de la normale principale à la trajectoire vers l'extérieur de la concavité* (car le vecteur w_n est toujours dirigé vers l'intérieur de la courbure).

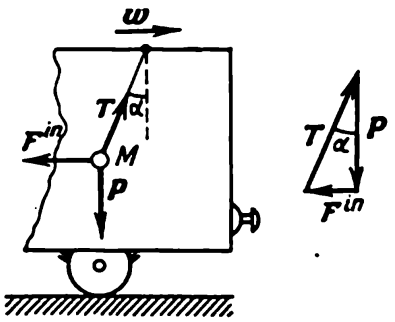
On a en module :

$$|F_\tau^{\text{i}}| = m\left|\frac{dv}{dt}\right|, \quad |F_n^{\text{i}}| = \frac{mv^2}{\rho}.$$

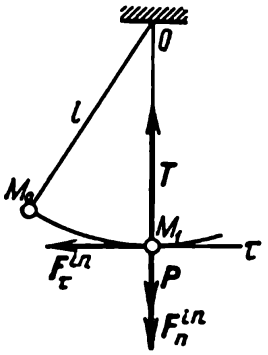
On peut utiliser le principe de d'Alembert pour déterminer les réactions des liaisons dynamiques ou l'accélération du point en mouvement. En particulier, à l'aide de cette méthode on résout facilement les problèmes analogues à ceux qui ont été examinés aux paragraphes 103, 118.

Problème 114. Pendant l'accélération d'un train, un poids suspendu à l'aide d'un fil au plafond du wagon s'écarte de l'angle α (fig. 273). Déterminer l'accélération du wagon.

S o l u t i o n. Le poids écarté est soumis à l'action de la force de pesanteur P et de la réaction T du fil. En utilisant le principe de d'Alembert, ajoutons à



F i g. 273



F i g. 274

ces forces la force d'inertie F^{i}, dirigée dans le sens opposé à l'accélération w du wagon. En module $F^{\text{i}} = mw = \frac{P}{g}w$. Alors les forces P, T et F^{i} s'équilibreront mutuellement.

En construisant le triangle de ces forces on trouve que

$$F^{\text{i}} = P\,\text{tg}\,\alpha \quad \text{ou} \quad \frac{P}{g}w = P\,\text{tg}\,\alpha.$$

Par conséquent, l'accélération du wagon $w = g\,\text{tg}\,\alpha$.

Problème 115. Résoudre le problème 111 en utilisant le principe de d'Alembert.

S o l u t i o n. Représentons le poids dans la position pour laquelle il faut trouver la tension du fil (fig. 274). Le poids est soumis à l'action de la force de pesanteur P et de la réaction T du fil. Ajoutons à ces forces les forces d'inertie F_n^i et F_τ^i. Selon le principe de d'Alembert, le système de forces obtenu sera en équilibre. Egalisant à zéro la somme des projections de ces forces sur la normale M_1O, on obtient $T - P - F_n^i = 0$. Comme $F_n^i = \frac{mv_1^2}{l}$, où v_1 désigne la vitesse du poids à la position M_1,

$$T = P + F_n^i = P + \frac{mv_1^2}{l}.$$

Ainsi, on obtient pour T la même expression que celle donnée au problème 111. En déterminant maintenant, de même qu'au problème 111, la valeur de v_1 à l'aide du théorème de la variation de l'énergie cinétique, on trouve le résultat cherché.

La somme des projections sur la tangente donne que $F_\tau^i = 0$. Ce résultat découle du fait qu'au point M_1 la dérivée $\frac{dv}{dt} = 0$, car en ce point la vitesse atteint une valeur maximale.

Chapitre XX

MOUVEMENT RELATIF DU POINT

§ 120. Equations du mouvement relatif et du repos du point. Les lois de la dynamique, ainsi que les équations et les théorèmes qui en ont été déduits dans les chapitres précédents ne sont vérifiés que pour le mouvement absolu du point, c'est-à-dire pour le mouvement par rapport à un système d'inertie (immobile).

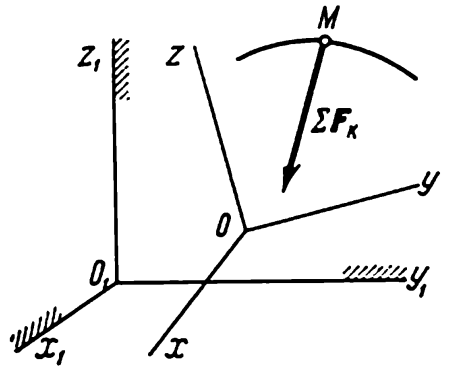


Fig. 275

Ce chapitre est consacré à l'étude du mouvement relatif du point, c'est-à-dire du mouvement par rapport à des systèmes de référence qui ne sont pas des systèmes d'inertie et sont eux-mêmes entraînés dans un mouvement arbitraire.

Examinons un point matériel M qui se meut sous l'action des forces appliquées F_1, F_2, ..., F_n, résultant de l'interaction de ce point avec un autre corps matériel. On étudiera le mouvement de ce point par rapport aux axes $Oxyz$ (fig. 275) qui à leur tour exécutent un mouvement bien déterminé par rapport aux axes immobiles $O_1x_1y_1z_1$.

Trouvons la relation entre l'accélération relative w_r du point et les forces agissant sur lui. Dans le cas du mouvement absolu la loi fondamentale de la dynamique prend la forme

$$m\boldsymbol{w}_a = \Sigma \boldsymbol{F}_k. \tag{50}$$

Mais on démontre en cinématique que $\boldsymbol{w}_a = \boldsymbol{w}_r + \boldsymbol{w}_e + \boldsymbol{w}_{cor}$, où $\boldsymbol{w}_r$, $\boldsymbol{w}_e$, $\boldsymbol{w}_{cor}$ désignent respectivement les accélérations relative, d'entraînement et de Coriolis. En substituant cette valeur de $\boldsymbol{w}_a$ dans l'équation (50) et en estimant par la suite que $\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{w}$, car

cette grandeur représente l'accélération qui fait l'objet de notre étude, on obtient :

$$m\boldsymbol{w} = \sum \boldsymbol{F}_k + (-m\boldsymbol{w}_e) + (-m\boldsymbol{w}_{cor}).$$

Introduisons les notations :

$$\boldsymbol{F}_e^{in} = -m\boldsymbol{w}_e, \quad \boldsymbol{F}_{cor}^{in} = -m\boldsymbol{w}_{cor}.$$

$\boldsymbol{F}_e^{in}$ et $\boldsymbol{F}_{cor}^{in}$ sont exprimées en unités de force. On les appellera respectivement force d'inertie d'*entraînement* et force d'inertie de *Coriolis*. Dans ce cas l'équation précédente prend la forme suivante :

$$m\boldsymbol{w} = \sum \boldsymbol{F}_k - \boldsymbol{F}_e^{in} + \boldsymbol{F}_{cor}^{in}. \tag{51}$$

L'équation (51) exprime *la loi fondamentale de la dynamique pour le mouvement relatif du point*. En comparant les équations (50) et (51), on arrive à la conclusion que *toutes les équations et tous les théorèmes de la mécanique pour le mouvement relatif du point sont formés de la même façon que les équations correspondantes du mouvement absolu, à condition d'ajouter les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis aux forces d'interaction avec les autres corps agissant sur le point*. L'addition des forces $\boldsymbol{F}_e^{in}$ et $\boldsymbol{F}_{cor}^{in}$ a pour effet de tenir compte de l'influence du déplacement des axes mobiles sur le mouvement relatif du point.

Examinons quelques applications :

1. Si les axes mobiles effectuent un mouvement de translation $\boldsymbol{F}_{cor}^{in} = 0$, car $\omega_e = 0$ et la loi du mouvement relatif prend la forme :

$$m\boldsymbol{w} = \sum \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{F}_e^{in}.$$

2. Si les axes mobiles sont en mouvement de translation, uniforme et rectiligne, $\boldsymbol{F}_e^{in} = \boldsymbol{F}_{cor}^{in} = 0$ et la loi du mouvement relatif aura la même forme que la loi du mouvement par rapport aux axes immobiles. Par conséquent, un tel système de référence est également un système d'*inertie*.

Il découle du résultat obtenu qu'aucune expérience mécanique ne saurait découvrir si le système de référence donné est au repos ou s'il effectue un mouvement de translation uniforme et rectiligne. Cette constatation constitue *le principe de relativité de la mécanique classique*, énoncé déjà par Galilée.

3. Si le point est au repos par rapport aux axes mobiles, on aura $\boldsymbol{w} = 0$ et $\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{v} = 0$, et par conséquent, $\boldsymbol{F}_{cor}^{in} = 0$, car l'accélération de Coriolis $w_{cor} = 2\omega_e v_r \sin\alpha$. L'égalité (51) se met alors sous la forme

$$\sum \boldsymbol{F}_k + \boldsymbol{F}_e^{in} = 0. \tag{52}$$

L'équation (52) représente *l'équation d'équilibre (de repos) relatif du point*. Il en découle que *les équations d'équilibre relatif sont for-*

mées de la même façon que les équations par rapport aux axes immobiles, à condition d'ajouter la force d'inertie d'entraînement aux forces d'interaction avec les autres corps agissant sur le point.

4. En formant les équations du mouvement relatif dans les cas où $F_{\text{cor}}^{\text{in}} \neq 0$, il faut avoir en vue que

$$F_{\text{cor}}^{\text{in}} = -m w_{\text{cor}} = -2m(\omega_e \times v_r).$$

Il en résulte que la force $F_{\text{cor}}^{\text{in}}$ est *perpendiculaire* à $v_r = v$ et, par suite, perpendiculaire à la tangente à la trajectoire relative au point.

C'est pourquoi:

a) la projection de la force d'inertie de Coriolis sur la tangente $M\tau$ à la trajectoire relative du point est toujours égale à zéro ($F_{\text{cor}\tau}^{\text{in}} = 0$) et l'équation (47) dans le cas du mouvement relatif aura la forme ($v = v_r$):

$$m\frac{dv}{dt} = \sum F_{k\tau} + F_{e\tau}^{\text{in}}; \tag{53}$$

b) pour tout déplacement relatif le travail de la force d'inertie de Coriolis est égal à zéro (voir le paragraphe 112, formule (38)); dans le cas du mouvement relatif *le théorème de la variation de l'énergie cinétique aura la forme* (v_1 et v_0 désignent les valeurs des *vitesses relatives*):

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_k + A(F_e^{\text{in}}). \tag{54}$$

Les autres équations du mouvement relatif comporteront dans le cas général les forces d'inertie d'entraînement et les forces d'inertie de Coriolis.

Problème 116. En négligeant la masse de tous les organes en rotation d'un régulateur de vitesse (fig. 276) par rapport à celle des boules B et D, trouver l'angle α de l'équilibre relatif de la tige AB, si le régulateur tourne à une vitesse angulaire constante ω et la longueur de $AB = l$.

S o l u t i o n. Pour déterminer la position d'équilibre relatif (par rapport aux axes qui tournent avec le régulateur), selon l'égalité (52) ajoutons la force d'inertie d'entraînement F_e^{in} à la force de la pesanteur P et à la réaction N, qui agissent sur la boule B. Étant donné que $\omega = \text{const.}$, $w_e = w_e^n = BC \cdot \omega^2 = l\omega^2 \sin\alpha$. Dans ce cas $F_e^{\text{in}} = ml\omega^2 \sin\alpha$. Formant l'équation d'équilibre en projections sur l'axe $B\tau$ perpendiculaire à AB on aura

$$-P\sin\alpha + F_e^{\text{in}}\cos\alpha = 0.$$

Et par suite, en remplaçant la force F_e^{in} par sa valeur et en simplifiant par $\sin\alpha$ (on n'examine pas le cas où $\alpha = 0$), on obtient:

$$-g + l\omega^2\cos\alpha = 0,$$

d'où

$$\cos\alpha = \frac{g}{l\omega^2}.$$

Etant donné que $\cos\alpha \leqslant 1$, si $\alpha \neq 0$, l'équilibre n'est possible que quand $\omega^2 > \frac{g}{l}$.

Problème 117. Une demi-circonférence BCD de rayon R (fig. 277) tourne autour d'un axe vertical à une vitesse angulaire constante ω. Un anneau M commence à glisser sans frottement sur cette circonférence à partir d'un point B très voisin de l'axe de rotation. Trouver la vitesse relative v_1 de l'anneau au point C, si sa vitesse initiale $v_0 = 0$.

Solution. Pour déterminer la vitesse v_1, utilisons le théorème de la variation de l'énergie cinétique. Pour former l'équation (54) qui exprime ce

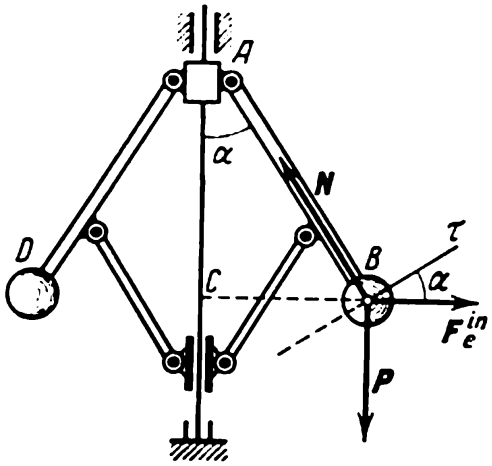


Fig. 276

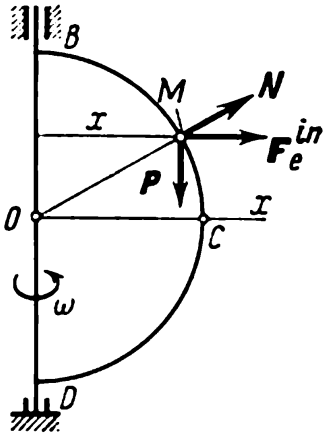


Fig. 277

théorème, calculons le travail des forces P et F_e^{in}, où $F_e^{in} = m\omega^2 x$ (le travail de la réaction N est égal à zéro). En estimant approximativement que $x_B = 0$, on trouve:

$$A_{(BC)}(F_e^{in}) = \int_{(B)}^{(C)} F_{ex}^{in}\,dx = m\omega^2 \int_0^R x\,dx = \frac{1}{2} m\omega^2 R^2.$$

En outre, $A_{(BC)}(P) = PR$. Substituant ces valeurs dans l'équation (54) et en prenant en considération que $v_0 = 0$, on obtient:

$$\frac{mv_1^2}{2} = mR\left(g + \frac{1}{2}\omega^2 R\right).$$

On en déduit:

$$v_1 = \sqrt{2gR\left(1 + \frac{\omega^2 R}{2g}\right)}.$$

On peut aussi résoudre ce problème, en formant l'équation (53) en projections sur la tangente $M\tau$ et en transformant ensuite son membre gauche de la même manière qu'au problème 110.

Un exemple d'intégration des équations du mouvement relatif est donné au paragraphe 123.

§ 121. Influence de la rotation de la Terre sur l'équilibre et le mouvement des corps. En résolvant la plupart des problèmes techniques on considère le système de référence lié à la Terre comme un système d'inertie (immobile). On néglige ainsi la rotation diurne de la Terre et son mouvement orbital autour du Soleil. Les temps envisagés dans les problèmes étant d'habitude très inférieurs à la durée d'une année, on peut pratiquement considérer le déplacement de la Terre sur son orbite durant ces intervalles de temps comme étant uniforme et rectiligne. Par conséquent, en considérant le système de référence lié à la Terre comme un système d'inertie, on néglige en premier lieu la rotation diurne que ce système effectue avec la Terre par rapport aux étoiles. Cette rotation se réalise à la vitesse de 1 tour par 23 heures 56 minutes 4 secondes, c'est-à-dire à la vitesse angulaire

$$\omega = \frac{2\pi}{86\,164} \approx 0{,}0000729 \text{ 1/s}.$$

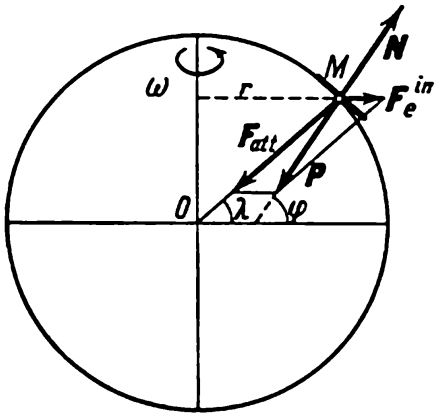


Fig. 278

Etudions l'influence de cette rotation relativement lente sur l'état des corps.

1. Repos relatif à la surface de la Terre. Force de la pesanteur. Examinons un point matériel sur un plan « horizontal », immobile par rapport à la Terre (fig. 278). La condition de son équilibre par rapport à la Terre, d'après l'équation (52), est $\boldsymbol{F}_{att} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_e^{in} = 0$, où $\boldsymbol{F}_{att}$ désigne la force d'attraction de la Terre ; $\boldsymbol{N}$, la réaction du plan ; $\boldsymbol{F}_e^{in}$, la force d'inertie d'entraînement. Vu que $\omega = \text{const.}$, la force $\boldsymbol{F}_e^{in}$ n'a qu'une composante normale dirigée perpendiculairement à l'axe de rotation de la Terre. Additionnons les forces $\boldsymbol{F}_{att}$ et $\boldsymbol{F}_e^{in}$ et introduisons la notation

$$\boldsymbol{F}_{att} + \boldsymbol{F}_e^{in} = \boldsymbol{P}.$$

Dans ce cas le point M subit l'action de deux forces $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{N}$, s'équilibrant mutuellement. La force $\boldsymbol{P}$ est justement appelée *force de pesanteur* (*poids*) du point matériel M. La direction de la force $\boldsymbol{P}$ est la verticale au point donné, tandis que le plan perpendiculaire à $\boldsymbol{P}$ est le plan horizontal. En module $F_e^{in} = mr\omega^2$ (r désigne la distance du point M de l'axe de la Terre) et sa valeur est négligeable par rapport à F_{att} car la grandeur ω^2 est très petite. C'est pourquoi, la direction de la force $\boldsymbol{P}$ se distingue peu de celle de $\boldsymbol{F}_{att}$ [1].

[1] La valeur de F_e^{in} est maximale à l'équateur, où $r = R$. A cette latitude sa valeur atteint environ 0,34 % de la force d'attraction. Le plus grand écart des angles λ (latitude géocentrique) et φ (latitude astronomique) (voir fig. 278) est réalisé pour $\lambda = 45°$ et il est égal approximativement à 11′.

Durant la pesée des corps on détermine la force P, puisque c'est avec cette force que le corps pèse sur le plateau. Par conséquent, en introduisant la force de pesanteur P dans l'équilibre, on y introduit aussi la force F_e^{in}, c'est-à-dire que l'on prend effectivement en considération l'influence de la rotation de la Terre.

2. Mouvement relatif à proximité de la surface de la Terre. Pour tenir compte de la rotation du système d'axes, liés à la Terre, il faut ajouter les forces F_e^{in} et F_{cor}^{in} aux forces agissant sur le point. Mais la force F_e^{in} est déjà comprise dans la force de pesanteur P et on en tient compte en introduisant cette force dans l'équation du mouvement. Par conséquent, *quand on estime que les axes liés à la Terre sont immobiles, on néglige seulement l'effet de la force d'inertie de Coriolis*:

$$F_{cor}^{in} = 2m\omega v \sin \alpha,$$

où ω désigne la vitesse angulaire de la Terre et α est l'angle compris entre la vitesse relative v et l'axe de la Terre.

Etant donné que la valeur de ω est très petite, on peut négliger complètement la force F_{cor}^{in} devant la force de pesanteur à condition que la vitesse v ne soit pas trop grande. Par exemple, même avec $v = 700$ m/s (la vitesse d'un obus) et avec $\alpha = 90°$ la force F_{cor}^{in} ne constitue qu'environ 1 % de la force P. C'est pourquoi dans la plupart des calculs pratiques, on peut en effet considérer que le système d'axes liés à la Terre est un système d'inertie (immobile).

L'influence de la rotation de la Terre acquiert une importance pratique soit dans le cas de grandes vitesses (le vol des missiles à grande portée), soit pour des mouvements de longue durée (cours d'eau, transports de masses d'air, courants marins).

Examinons qualitativement l'influence de la rotation de la Terre sur le mouvement des corps.

a) Mouvement à la surface de la Terre. Dans l'hémisphère boréal pendant le mouvement d'un point suivant un méridien du nord vers le sud, l'accélération de Coriolis w_{cor} est dirigée vers l'est (§ 93, problème 88), tandis que la force F_{cor}^{in} est dirigée vers l'ouest. Si le mouvement a lieu du sud au nord il est évident que la force F_{cor}^{in} sera dirigée vers l'est. Dans les deux cas, comme on le voit, cette force déportera le point vers *la droite* par rapport à la direction de son mouvement.

Si un point se déplace vers l'est, en suivant un parallèle, l'accélération w_{cor} sera dirigée le long du rayon MC du parallèle (fig. 279) et la force F_{cor}^{in}, dans le sens opposé.

La composante verticale de cette force (le long de OM) modifiera un peu le poids du corps, tandis que la composante horizontale sera dirigée vers le sud et déportera aussi le point vers la droite

par rapport à la direction du mouvement. On obtiendra un résultat analogue dans le cas du mouvement suivant un parallèle vers l'ouest. On conclut que *dans l'hémisphère boréal, le corps qui se meut à la surface de la Terre suivant une direction quelconque, sera déporté vers la droite de la direction du mouvement sous l'action de la rotation de la Terre.* Dans l'hémisphère austral le déportement se fera vers la gauche.

Cela explique le fait que les rivières, qui coulent dans l'hémisphère boréal, exercent une action de sape plus prononcée sur leur rive droite (loi de Baer). C'est également la cause de la dérive des vents de direction constante (vents alizés) et des courants marins.

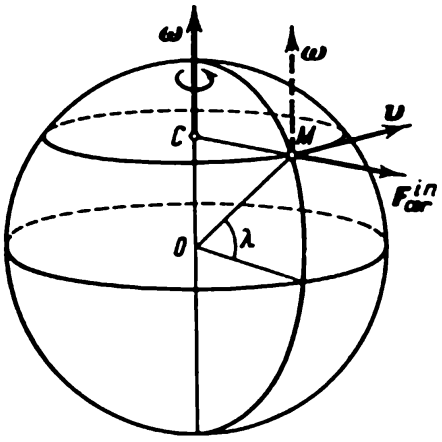


Fig. 279

b) Chute verticale. Pour déterminer la direction de la force d'inertie de Coriolis F_{cor}^{in}, agissant sur un point en chute libre, il faut connaître la direction de la vitesse relative v du point. Comme la force F_{cor}^{in} est très petite par rapport à la force de la pesanteur, on peut estimer, en première approximation, que le vecteur v est dirigé suivant la verticale, c'est-à-dire le long de la droite MO (voir fig. 279). Dans ce cas le vecteur w_{cor} sera dirigé, comme il est facile de le voir, vers l'ouest, tandis que la force F_{cor}^{in} le sera vers l'est (c'est-à-dire de la façon indiquée par le vecteur v à la figure 279). Par conséquent, en première approximation, *un point (corps) en chute libre s'écarte de la verticale à l'est sous l'action de la rotation de la Terre.* Il est évident que le corps, lancé verticalement vers le haut, s écartera à l'ouest pendant sa montée. Les valeurs de ces écartements sont très petites et elles ne sont sensibles que pour une hauteur de montée ou de chute suffisamment grande, ce que montrent les calculs faits au paragraphe 122.

§ 122. Ecartement de la verticale d'un point en chute sous l'action de la rotation de la Terre. Soit un point matériel qui tombe d'une hauteur H qui n'est pas très grande (par rapport au rayon de la Terre) sur la surface de la Terre. La force de pesanteur P sera considérée pendant la chute comme constante et on négligera la résistance de l'air. Dirigeons l'axe Oy suivant la verticale vers le haut et l'axe Ox, vers l'est (fig. 280, a) [1].

Pour tenir compte de la rotation de la Terre, outre la force P, qui comprend déjà la force F_e^{in}, il faut appliquer au point la force F_{cor}^{in}, dirigée, comme il a été constaté, en première approximation vers l'est. Dans ce cas les équations diffé-

[1] Sur la fig. 280 on a fortement agrandi l'échelle des x.

rentielles du mouvement relatif prendront la forme:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_{\text{cor}}^{\text{in}},\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=-P=-mg, \tag{55}$$

et les conditions initiales seront:

$$\text{pour } t=0,\quad x=0,\quad y=H;\quad v_x=0,\quad v_y=0.$$

En intégrant la deuxième des équations (55) et en déterminant les constantes d'intégration d'après les conditions initiales on obtient:

$$v_y=\frac{dy}{dt}=-gt,\quad y=H-\frac{gt^2}{2}.$$

Pendant le calcul du module $F_{\text{cor}}^{\text{in}}$ négligeons, comme nous l'avons fait en déterminant la direction de $F_{\text{cor}}^{\text{in}}$, la composante de la vitesse v_x par rapport à v_y

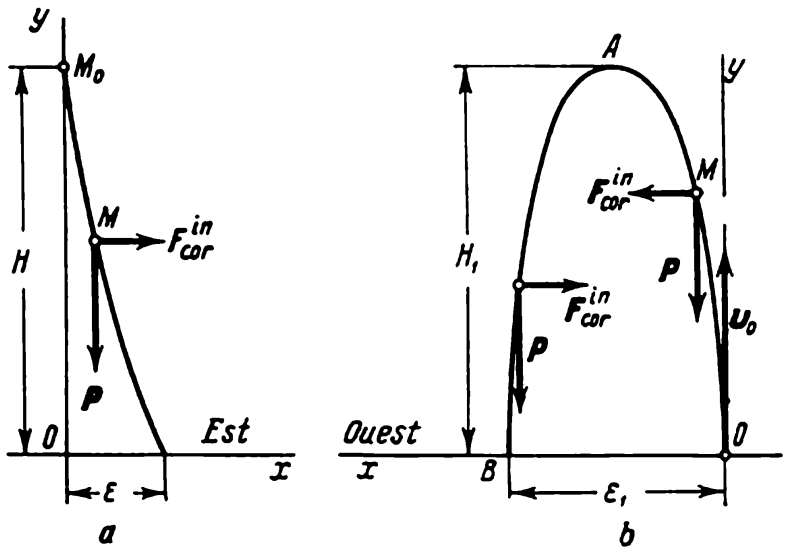


Fig. 280

(car la force $F_{\text{cor}}^{\text{in}}$ est beaucoup plus petite que P) et, en donnant la solution approchée, posons $v=|v_y|=gt$. En même temps, la vitesse v sera dirigée suivant la verticale vers le bas (suivant MO de la fig. 279), en formant un angle $\alpha=90°-\lambda$, où λ est la latitude, avec l'axe de rotation de la Terre. Par conséquent, $F_{\text{cor}}^{\text{in}}=2m\omega gt\cos\lambda$ et la première des équations (55) aura la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2(\omega g\cos\lambda)\,t.$$

Comme la grandeur entre parenthèses est constante, en intégrant cette équation, on obtient:

$$\frac{dx}{dt}=(\omega g\cos\lambda)\,t^2+C_1,\quad x=\frac{1}{3}(\omega g\cos\lambda)\,t^3+C_1t+C_2.$$

Substituant les données initiales, nous aurons $C_1=C_2=0$. Ainsi, les équations approchées de la loi de mouvement relatif du point sont:

$$x=\frac{1}{3}(\omega g\cos\lambda)\,t^3,\quad y=H-\frac{gt^2}{2}.$$

Le mouvement n'est pas rectiligne et le point en chute s'écarte en effet à l'est. Après avoir exclu le temps t des égalités précédentes, on obtient, en première approximation, l'équation de la trajectoire du point (parabole semi-cubique) :

$$x^2 = \frac{8}{9}\frac{\omega^2}{g}\cos^2\lambda\,(H-y)^3.$$

En posant dans ce cas $y = 0$, on trouve l'écartement vers l'est ε que le point aura au moment d'atteindre la Terre [1] :

$$\varepsilon = \frac{2}{3}\omega\cos\lambda\sqrt{\frac{2H^3}{g}}. \tag{56}$$

Comme on le voit, l'écartement ε est proportionnel à la vitesse anguiaire de la Terre ω et, par conséquent, il n'a qu'une faible valeur. Par exemple, à la latitude de Moscou ($\lambda = 55°47'$, $g = 9{,}816$ m/s²), pour une chute d'une hauteur $H = 100$ m, la grandeur $\varepsilon = 1{,}2$ cm.

Une série d'expériences réalisées en plusieurs points de la Terre par des savants a confirmé la justesse du résultat donné par la formule (56).

Examinons le mouvement d'un point lancé du point O vers le haut suivant la verticale à une vitesse initiale v_0. Pendant la montée la force $F^{\text{in}}_{\text{cor}}$, en première approximation, sera dirigée vers l'ouest. Dans ce cas, en dirigeant aussi l'axe Ox vers l'ouest (fig. 280, *b*), les équations différentielles conserveront la forme (55) et les conditions initiales seront : pour $t = 0$ $x = y = 0$, $v_x = 0$, $v_y = v_0$.

En tenant compte de ces conditions, la deuxième des équations (55) nous donne :

$$v_y = v_0 - gt\,; \quad y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \tag{57}$$

Alors, en posant, de même qu'au problème précédent, qu'approximativement $v = v_y$, on obtient que $F^{\text{in}}_{\text{cor}} = 2m\omega\,(v_0 - gt)\cos\lambda$ et la première des équations (55) prendra la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\,(\omega\cos\lambda)\,(v_0 - gt).$$

Cette équation décrira aussi le mouvement du point pendant sa chute vers le bas, puisque le changement de la direction du vecteur $F^{\text{in}}_{\text{cor}}$, qui s'effectue en même temps, se traduira par un changement de signe du facteur $(v_0 - gt) = v_y$.

En intégrant l'équation obtenue pour les conditions initiales du problème, on trouve finalement :

$$x = \omega\cos\lambda\left(v_0 t^2 - \frac{1}{3}gt^3\right). \tag{58}$$

En posant dans l'égalité (57) $y = 0$, on trouve le temps de mouvement du point jusqu'au moment de son contact avec la Terre : $t_1 = 2\frac{v_0}{g}$. Mais sachant

[1] En déterminant le module et la direction de la force $F^{\text{in}}_{\text{cor}}$ en première approximation on négligeait la composante de la vitesse v_x dirigée vers l'est. Par suite de la présence de cette vitesse la force $F^{\text{in}}_{\text{cor}}$ aura une composante complémentaire provoquant un écartement du point vers le sud. Etant donné que $x = 1/3\,(\omega g\cos\lambda)\,t^3$, la grandeur $v_x = \frac{dx}{dt}$ est proportionnelle à ω et l'écartement vers le sud est proportionnel à ω^2, c'est-à-dire qu'il est une grandeur petite de second ordre de petitesse.

que $v_0 = \sqrt{2gH_1}$, où H_1 est la hauteur de montée, déterminons en se fondant sur l'équation (58) l'écartement vers l'ouest du point au moment où il atteint la surface de la Terre

$$OB = \varepsilon_1 = \frac{4}{3}\omega \cos\lambda \frac{v_0^3}{g^2} = \frac{8}{3}\omega \cos\lambda \sqrt{\frac{2H_1^3}{g}}. \tag{59}$$

Des équations (58) et (59) il découle que pour $H_1 = H$ l'écartement $\varepsilon_1 = 4\varepsilon$.

Si le mouvement du point se poursuit (le point de lancement O ne se trouve pas à la surface de la Terre), la trajectoire du point s'écartera davantage vers l'est à partir de B.

Comme il a été indiqué, tous ces calculs se rapportent au mouvement dans le vide et ne tiennent compte de l'influence la de rotation de la Terre qu'en première approximation.

Chapitre XXI

MOUVEMENT OSCILLATOIRE DU POINT

§ 123. Oscillations harmoniques libres. Pendule mathématique. L'étude des oscillations est à la base de nombreuses branches de la physique et de la technique. Bien que les phénomènes oscillatoires étudiés par les différentes branches de la sicence telles la mécanique, la radiotechnique, l'acoustique, etc., se distinguent l'une de l'autre par leur nature physique, les lois générales des oscillations restent

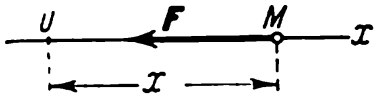


Fig. 281

dans tous les cas les mêmes. C'est pourquoi l'étude des oscillations mécaniques présente un grand intérêt non seulement à cause de leur large application en technique, mais aussi du fait que les résultats obtenus par l'étude des oscillations mécaniques peuvent être utilisés pour expliquer les phénomènes oscillatoires rencontrés dans d'autres domaines.

Commençons l'étude par les oscillations harmoniques libres d'un point. Soit un point M en mouvement rectiligne sous l'action de la *force de rappel* F, dirigée vers le centre immobile O et proportionnelle à la distance de ce centre. La projection de la force F sur l'axe Ox (fig. 281) est égale à

$$F_x = -cx. \tag{60}$$

Comme on le voit, la force F tend à faire revenir le point à sa position d'équilibre O, où $F = 0$, d'où sa dénomination de « force de rappel ». Un exemple d'une telle force nous est fourni par la force élastique (§ 113, fig. 255) ou la force d'attraction, examinée au problème 99.

Trouvons la loi de mouvement du point M. En formant l'équation différentielle du mouvement (6) on obtient

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx.$$

Divisant les deux membres de l'équation par m et en introduisant la notation

$$\frac{c}{m} = k^2, \tag{61}$$

l'équation prend la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0. \tag{62}$$

L'équation (62) est appelée *équation différentielle des oscillations harmoniques libres*. Comme on sait de la théorie des équations différentielles, les racines de l'équation caractéristique correspondant à l'équation (62) sont purement imaginaires et, par conséquent, sa solution générale sera

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt, \tag{63}$$

où C_1 et C_2 sont les constantes d'intégration. Si au lieu des constantes C_1 et C_2 on introduit d'autres constantes a et α telles que $C_1 = a \cos \alpha$, $C_2 = a \sin \alpha$, on obtient $x = a(\sin kt \cos \alpha + \cos kt \sin \alpha)$ ou

$$x = a \sin (kt + \alpha). \tag{64}$$

C'est une autre solution de l'équation (62), où les constantes d'intégration sont a et α. Cette solution est plus commode dans des études générales. On peut aussi se convaincre que l'expression (64) est une solution de l'équation (62) à l'aide d'une substitution directe.

Dans le mouvement considéré la vitesse du point est égale à

$$v_x = \frac{dx}{dt} = ak \cos (kt + \alpha). \tag{65}$$

Les oscillations du point, effectuées selon la loi (64), sont appelées *oscillations harmoniques*. Leur représentation graphique pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ est donnée à la figure 138, *c*.

On peut donner une interprétation cinématique figurative à toutes les caractéristiques de ce mouvement. Examinons un point B en mouvement uniforme sur une circonférence de rayon a, à partir de la position B_0, déterminée par l'angle $DOB_0 = \alpha$ (fig. 282). Supposons que la vitesse angulaire constante da la rotation du rayon OB est égale à k. Dans ce cas, à un instant t quelconque, l'angle $\varphi = DOB = \alpha + kt$ et il est facile de voir que la projection M du point B sur le diamètre perpendiculaire à DE se meut conformément à la loi $x = a \sin (kt + \alpha)$, où $x = OM$, c'est-à-dire qu'elle effectue des oscillations harmoniques.

La grandeur a, égale à l'écartement maximum du point M du centre d'oscillations, s'appelle *amplitude des oscillations*. La grandeur $\varphi = kt + \alpha$ est appelée *phase des oscillations*. Contrairement à la coordonnée x, la phase φ détermine non seulement la position du point à l'instant considéré, mais aussi la direction de son mouvement ultérieur, par exemple, à une phase égale à φ le point se dépla-

ce de M vers la droite, tandis qu'à une phase égale à $(\pi - \varphi)$ le déplacement est à gauche. Les phases qui se distinguent de 2π sont considérées comme identiques (sur la figure 138, *c* les points clairs indiquent deux phases identiques). La grandeur α détermine la phase de début des oscillations (*phase initiale*). Par exemple, pour $\alpha = 0$ les oscillations s'effectuent conformément à la loi sinusoïdale (elles commencent au centre O à une vitesse dirigée à droite), pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ elles s'effectuent conformément à la loi cosinusoïdale (elles commencent de la position $x = a$ à une vitesse $v_0 = 0$). La grandeur k, qui

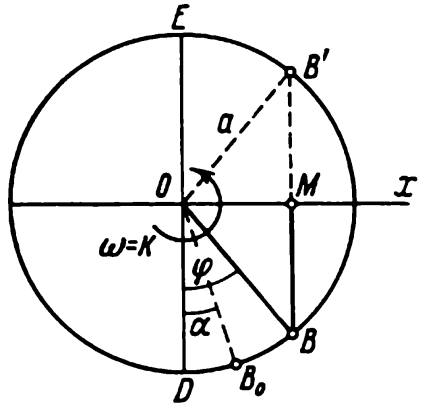


Fig. 282

coïncide avec la vitesse angulaire de rotation du rayon OB (voir fig. 282), est appelée *fréquence circulaire des oscillations ou pulsation.*

L'intervalle de temps T (ou τ), durant lequel le point effectue une oscillation pleine, est appelé *période des oscillations.* Après l'achèvement de la période, la phase est décalée de 2π. Par conséquent, on doit avoir $kT = 2\pi$, d'où la période

$$T = \frac{2\pi}{k}. \tag{66}$$

La grandeur ν, inverse do la période qui définit le nombre d'oscillations réalisées durant une seconde, est appelée *fréquence des oscillations*

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}. \tag{67}$$

Il en résulte que k ne se distingue de ν que par le facteur 2π. Par la suite on appellera habituellement la grandeur k fréquence des oscillations.

Les valeurs de a et α sont déterminées d'après les conditions initiales. Si pour $t = 0$ $x = x_0$ et $v_x = v_0$, on obtient sur la base de (64) et (65) $x_0 = a \sin \alpha$, $v_0/k = a \cos \alpha$. En sommant d'abord

les carrés de ces égalités puis en les divisant terme à terme, on trouve :

$$a=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{k^2}}, \quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{kx_0}{v_0}. \tag{68}$$

Remarquons que les oscillations harmoniques libres ont les propriétés suivantes : 1) l'amplitude et la phase initiale des oscillations *dépendent* des conditions initiales ; 2) la fréquence k et, par suite, la période T des oscillations *ne dépendent pas* des conditions initiales (voir les égalités (61) et (66)) et elles sont les caractéristiques invariables d'un système oscillant donné.

En particulier, il s'ensuit que si on demande dans un problème de déterminer seulement la période (ou la fréquence) des oscillations, il faut écrire l'équation différentielle du mouvement en lui donnant la forme (62). Après cela on trouve aussitôt T au moyen de la formule (66) sans intégration.

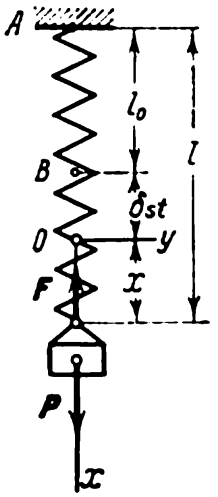


Fig. 283

Problème 118. On suspend un poids à l'extrémité B d'un ressort vertical AB que l'on lâche sans vitesse initiale. Déterminer la loi d'oscillations de la masse, si dans la position d'équilibre le poids allonge le ressort d'une grandeur δ_{st} (allongement statique du ressort).

Solution. Plaçons l'origine des coordonnées O dans la position de l'équilibre statique de la masse et dirigeons l'axe Ox suivant la verticale vers le bas (fig. 283). La force élastique $F = c\,|\,\Delta l\,|$.

Dans notre cas $\Delta l = \delta_{st} + x$. Par conséquent,

$$F_x = -c\,(\delta_{st}+x).$$

En formant l'équation différentielle du mouvement, on obtient :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -c\,(\delta_{st}+x)+P.$$

Mais d'après les conditions du problème la force de pesanteur $P = mg = c\delta_{st}$ (dans la position d'équilibre la force P est équilibrée par la force élastique $c\delta_{st}$). Définitivement, notant $\frac{c}{m}=\frac{g}{\delta_{st}}=k^2$, l'équation prend la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0.$$

De là, on déduit aussitôt la période des oscillations du poids :

$$T=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}}. \tag{a}$$

Par conséquent, la *période des oscillations est proportionnelle à la racine carrée de l'allongement statique du ressort* (ce résultat est aussi valable pour un poids oscillant sur une poutre élastique, si δ_{st} est la flexion statique de la poutre).

La solution de l'équation différentielle obtenue s'écrira

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt.$$

Selon les conditions initiales pour $t = 0$, $x = -\delta_{st}$, $v_x = 0$. Etant donné que

$$v_x = \frac{dx}{dt} = kC_1 \cos kt - kC_2 \sin kt,$$

en substituant les conditions initiales, on obtient $C_2 = -\delta_{st}$, $C_1 = 0$. Par conséquent, les oscillations s'effectuent avec une amplitude δ_{st} selon la loi

$$x = -\delta_{st} \cos kt.$$

On en déduit que l'allongement maximum du ressort pendant les oscillations du poids est égal à $2\delta_{st}$. Dans le problème 107, où le rôle du ressort était joué par une poutre, nous avons obtenu ce résultat par une autre voie.

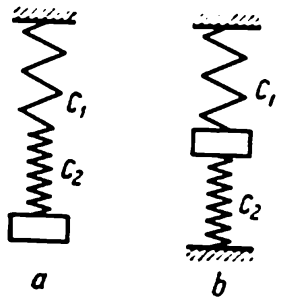


Fig. 284

La solution discutée montre que la *force constante P ne modifie pas le caractère des oscillations, entretenues du fait de l'action de la force élastique F, et ne produit qu'un déplacement du centre de ces oscillations dans la direction de l'action de la force d'une grandeur* δ_{st} (il est évident qu'en cas d'inexistence de la force P les oscillations se dérouleraient autour du centre B).

Problème 119. Déterminer les périodes des oscillations d'un poids P, suspendu à deux ressorts de coefficients de rigidité c_1 et c_2, de la manière indiquée à la figure 284, *a* et *b*.

Solution. a) Dans le premier cas correspondant à la position statique, chacun des ressorts est étiré avec une force P. Par conséquent, les allongemens statiques des ressorts seront: $\delta_{1st} = \frac{P}{c_1}$, $\delta_{2st} = \frac{P}{c_2}$. Alors, l'allongement total des ressorts

$$\delta_{st} = \delta_{1st} + \delta_{2st} = \frac{P(c_1 + c_2)}{c_1 c_2}$$

et

$$c_{\text{équiv}} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2},$$

où $c_{\text{équiv}}$ est le coefficient de rigidité d'un ressort équivalent aux deux ressorts donnés. En particulier, si $c_1 = c_2$, on a $c_{\text{équiv}} = \frac{1}{2} c$.

D'après la formule (a) du problème 118, la période des oscillations sera

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{P}{g} \frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2}}.$$

b) Dans le second cas le ressort supérieur est étiré avec une force quelconque P_1, tandis que le ressort inférieur est comprimé avec la force P_2, d'autre part, $P_1 + P_2 = P$. Alors on aura pour ces ressorts $\delta_{1st} = \frac{P_1}{c_1}$, $\delta_{2st} = \frac{P_2}{c_2}$. Mais il est évident que $\delta_{1st} = \delta_{2st} = \delta_{st}$ et selon la propriété des proportions

$$\delta_{st} = \frac{P_1}{c_1} = \frac{P_2}{c_2} = \frac{P_1 + P_2}{c_1 + c_2} \quad \text{ou} \quad \delta_{st} = \frac{P}{c_1 + c_2}.$$

Avec cela $c_{\text{équiv}} = c_1 + c_2$ et la période des oscillations

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} = \sqrt{\frac{P}{g(c_1 + c_2)}}.$$

Pendule mathématique. On appelle *pendule mathématique* une masse de faible dimension, suspendue à un fil inextensible et dont on peut négliger le poids, qui effectue des oscillations dans le plan vertical. Considérons la masse pesante en négligeant ses dimensions par rapport à la longueur l du fil comme un point matériel. Ce point effectue un mouvement gêné suivant un arc de circonférence de rayon l. Après avoir choisi une origine O et un

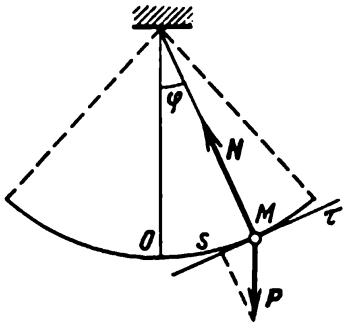


Fig. 285

sens positif pour la mesure de l'arc $s = \widehat{OM}$ (ou de l'angle φ), représentons la masse dans une position arbitraire M (fig. 285) et traçons l'axe $M\tau$ dans le sens positif de s.

En formant l'équation différentielle du mouvement (47) (voir § 117), on obtient :

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -P\sin\varphi.$$

Introduisons comme coordonnée l'angle φ au lieu de s. Dans ce cas $s = l\varphi$ et, en simplifiant par m, on aura

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \tag{69}$$

Cette équation différentielle ne s'intègre pas à l'aide des fonctions élémentaires. Examinons le cas de *petites oscillations* du pendule, en estimant qu'approximativement $\sin\varphi \approx \varphi$ (ce qui est valable quand l'angle φ est de beaucoup inférieur à un radian). Dans ce cas l'équation (69), en remplaçant $\frac{g}{l}$ par k^2, prendra la forme

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\varphi = 0. \tag{70}$$

On en conclut que pour de petites élongations le pendule mathématique effectue des oscillations harmoniques. On peut résoudre l'équation (70) en l'écrivant sous la forme (63), où, bien entendu, au lieu de x on aura φ. En supposant que pour $t = 0$ $\varphi = \varphi_0$, $\omega_0 = 0$ et ayant déterminé les constantes d'intégration, on trouve fina-

lement la loi d'oscillations sous la forme

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt.$$

La période de petites oscillations du pendule est égale à

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{71}$$

Comme on voit, la valeur de T ne dépend pas de l'angle d'écartement initial.

Ce résultat n'est valable que pour un petit angle φ_0. Si on intègre l'équation (69), sans estimer que l'angle φ est petit, on peut se convaincre que la valeur de T dépend de φ_0.

Cette relation a approximativement la forme suivante:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right). \tag{72}$$

Ainsi, si $\varphi_0 = 0{,}4$ radian (23° environ) la formule (71) définit la période avec une précision allant jusqu'à 1 %.

§ 124. Oscillations amorties. Examinons quelle influence exerce la résistance du milieu sur les oscillations en estimant que la force de résistance est proportionnelle à la première puissance de la vitesse: $\boldsymbol{R} = -\mu \boldsymbol{v}$ (le signe moins indique que la force $\boldsymbol{R}$ est dirigée

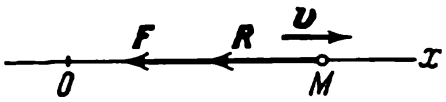


Fig. 286

dans le sens opposé à $\boldsymbol{v}$). Admettons que pendant le mouvement le point subit l'action de la force de rappel $\boldsymbol{F}$ et celle de la force de résistance $\boldsymbol{R}$ (fig. 286). Dans ce cas $F_x = -cx$, $R_x = -\mu v_x = -\mu \frac{dx}{dt}$, et l'équation différentielle du mouvement sera

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu\frac{dx}{dt}.$$

En divisant les deux membres de l'équation par m, on obtient:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + k^2x = 0, \tag{73}$$

où on a introduit les notations

$$\frac{c}{m} = k^2, \qquad \frac{\mu}{m} = 2b. \tag{74}$$

Il est facile aussi de vérifier que les grandeurs k et b sont de même dimension (1/s), ce qui permet leur comparaison.

L'équation (73) est appelée *équation différentielle des oscillations amorties*. On peut trouver la solution de l'équation (73) en passant à une nouvelle variable z à l'aide de l'égalité $x = ze^{-bt}$. Alors

$$\frac{dx}{dt} = e^{-bt}\left(\frac{dz}{dt} - bz\right); \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = e^{-bt}\left(\frac{d^2z}{dt^2} - 2b\frac{dz}{dt} + b^2z\right).$$

Substituant ces valeurs et la grandeur x dans l'équation (73), après toutes les réductions on obtient

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (k^2 - b^2)\,z = 0. \tag{75}$$

Examinons le cas où $k > b$, c'est-à-dire quand la résistance est petite par rapport à la force de rappel. Avec la notation

$$\tilde{k} = \sqrt{k^2 - b^2}, \tag{76}$$

l'équation (75) s'identifie à l'équation (62). Par conséquent, $z = a \sin(\tilde{k}t + \alpha)$ ou, en passant à x,

$$x = ae^{-bt} \sin(\tilde{k}t + \alpha). \tag{77}$$

L'expression (77) est la solution de l'équation différentielle (73). Les grandeurs a et α qu'elle contient sont les constantes d'intégration et on les définit d'après les conditions initiales.

Les oscillations s'effectuant selon la loi (77) sont dites *amorties*, car du fait de la présence du facteur e^{-bt} la valeur x diminue avec le temps et tend vers zéro. La courbe de ces oscillations est représentée à la figure 287 (elle est comprise entre deux courbes en pointillé $x = ae^{-bt}$ et $x = -ae^{-bt}$, car en module $\sin(\tilde{k}t + \alpha)$ ne peut pas dépasser l'unité). Le graphique montre que les oscillations ne sont pas périodiques. Cependant elles présentent une certaine périodicité. Ainsi l'instant où le point, tout en se déplaçant à droite (ou à gauche), arrive au centre d'oscillations ($x = 0$) se répète périodiquement au bout d'un certain temps $\tilde{T}$, égal à la période de $\sin(\tilde{k}t + \alpha)$. C'est pourquoi on appelle

$$\tilde{T} = \frac{2\pi}{\tilde{k}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}} \tag{78}$$

la *période des oscillations amorties*. En comparant les formules (78) et (66), on voit que $\tilde{T} > T$, autrement dit, la présence de la résistance augmente quelque peu la période d'oscillations. Cependant, quand la résistance est petite ($b \ll k$), on peut négliger la grandeur b^2 par rapport à k^2 et estimer que $\tilde{T} \approx T$. Par conséquent, une faible résistance n'influe presque pas sur la période d'oscillations.

Il se trouve que l'intervalle de temps compris entre deux élongations successives du point oscillant à droite (ou à gauche) est aussi égal à $\tilde{T}$ [1]. Par conséquent, si la première élongation maximum x_1 à droite se réalise à l'instant t_1, la deuxième x_2 se produira à l'instant $t_2 = t_1 + \tilde{T}$ et ainsi de suite. Alors, d'après la formule (77), compte tenu de ce que $\tilde{k}\tilde{T} = 2\pi$, on obtient :

$$x_1 = ae^{-bt_1} \sin(\tilde{k}t_1 + \alpha),$$

$$x_2 = ae^{-b(t_1+\tilde{T})} \sin(\tilde{k}t_1 + \tilde{k}\tilde{T} + \alpha) = x_1 e^{-b\tilde{T}}.$$

Par analogie, pour toute élongation x_{n+1}, on aura $x_{n+1} = x_n e^{-b\tilde{T}}$. Ainsi, il se trouve que l'amplitude des oscillations diminue en progression géométrique. La raison $e^{-b\tilde{T}}$ de cette progression est appelé

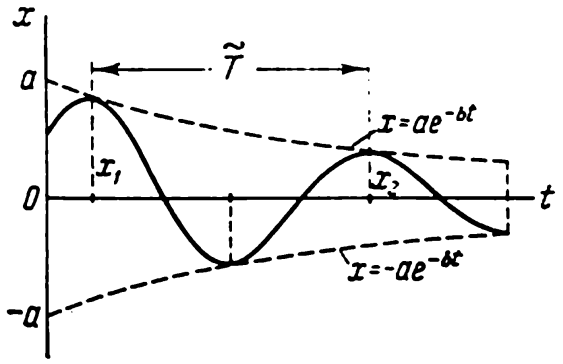


Fig. 287

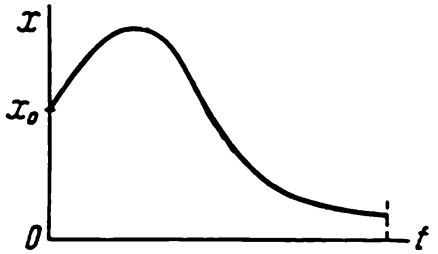


Fig. 288

décrément d'amortissements et le module de son logarithme, c'est-à-dire la grandeur $b\tilde{T}$, *décrément logarithmique*.

Il s'ensuit de tous les résultats obtenus qu'une petite résistance n'influence presque pas la période d'oscillations, mais elle déclenche une extinction graduelle du phénomène par suite de la diminution des amplitudes d'oscillations suivant une progression géométrique.

Dans le cas d'une grande résistance, quand $b > k$, la solution de l'équation (75) ne contient pas de fonctions trigonométriques. Dans ce cas le mouvement du point ne sera pas un phénomène oscillatoire et sous l'action de la force de rappel le point tendra graduellement vers la position d'équilibre. La courbe du mouvement a dans ce cas (si pour $t = 0$ $x = x_0$, $v_0 > 0$) la forme indiquée à la fig. 288.

[1] Les instants quand x devient maximum ou minimum sont déduits de l'équation $\frac{dx}{dt} = ae^{-bt}\,[\tilde{k}\cos(\tilde{k}t + \alpha) - b\sin(\tilde{k}t + \alpha)] = 0$. Si pour un certain $t = t_1$ le crochet devient nul, il est évident qu'il se réduira aussi à zéro aux instants $t_1 + \tilde{T}$, $t_1 + 2\tilde{T}$ et ainsi de suite.

§ 125. Oscillations forcées. Résonance. Examinons un cas important des oscillations qui a lieu quand, outre la force de rappel $\boldsymbol{F}$, le point subit l'effet d'une force $\boldsymbol{Q}$, qui varie périodiquement avec le temps et dont la projection sur l'axe Ox est égale à

$$Q_x = Q_0 \sin pt. \tag{79}$$

Cette force est appelée *force extérieure*, ou *perturbatrice*, et les oscillations qui se produisent sous l'action d'une telle force, sont appelées *oscillations forcées*. La grandeur p dans l'égalité (79) représente la *pulsation de la force extérieure*.

La force extérieure peut varier avec le temps suivant une autre loi. On n'examinera que le cas où Q_x est déterminée par l'égalité (79). Une telle force est dite *harmonique*. Un exemple concret de cette force a été donné au problème 120.

1. Oscillations forcées sans résistance[1]. Examinons le mouvement d'un point qui en plus de l'action de la force de rappel $\boldsymbol{F}$ (voir la fig. 281) n'est soumis qu'à l'action de la force extérieure $\boldsymbol{Q}$. Dans ce cas l'équation différentielle du mouvement sera

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx + Q_0 \sin pt.$$

Divisant les deux membres de l'égalité par m et en posant $Q_0/m = P_0$, compte tenu aussi de la notation (61), nous pouvons écrire l'équation sous la forme suivante:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = P_0 \sin pt. \tag{80}$$

L'équation (80) est *l'équation différentielle des oscillations forcées du point en l'absence de résistance*. D'après la théorie des équations différentielles, sa solution sera $x = x_1 + x_2$, où x_1 est la solution générale de l'équation sans second membre, c'est-à-dire la solution de l'équation (62), donnée par l'égalité (64), tandis que x_2 est une solution particulière de l'équation (80) tout entière.

Posant $p \neq k$, cherchons la solution x_2 sous la forme

$$x_2 = A \sin pt,$$

où A est une constante, qu'il faut choisir de façon que l'égalité (80) se transforme en identité. En substituant la valeur de x_2 et de sa dérivée seconde dans l'équation (80), on aura:

$$-p^2A \sin pt + k^2A \sin pt = P_0 \sin pt.$$

[1] Les résultats obtenus ici peuvent être considérés comme un cas particulier du point 2.

Cette égalité est vérifiée pour n'importe quelle valeur de t, si $A(k^2 - p^2) = P_0$ ou

$$A = \frac{P_0}{k^2 - p^2}.$$

Ainsi, la solution particulière cherchée sera :

$$x_2 = \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin pt. \tag{81}$$

Etant donné que $x = x_1 + x_2$, tandis que la valeur de x_1 est donnée par l'égalité (64), la solution générale de l'équation (80) prend la forme définitive

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{P_0}{k^2 - p^2} \sin pt, \tag{82}$$

où a et α sont les constantes d'intégration, définies d'après les conditions initiales.

La solution (82) montre que dans ce cas les oscillations du point se composent : 1) d'oscillations d'amplitude a (qui dépend des conditions initiales) et de fréquence k, appelées *oscillations propres* et 2) d'oscillations d'amplitude A (qui ne dépend pas des conditions initiales) et de fréquence p, qu'on appelle *oscillations forcées* ou *entretenues*.

Pratiquement, du fait de la présence inévitable de forces de résistance, les oscillations propres seront assez rapidement amorties. C'est pourquoi dans le mouvement examiné ce sont les oscillations forcées, dont la loi est donnée par l'équation (81), qui acquièrent une importance essentielle.

Comme on le voit, la fréquence p des oscillations forcées est égale à celle de la force extérieure. L'amplitude de ces oscillations

$$A = \frac{P_0}{|k^2 - p^2|} = \frac{\delta_0}{\left|1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right|}, \tag{83}$$

où $\delta_0 = \frac{P_0}{k^2} = \frac{Q_0}{c}$ est la valeur du déplacement statique du point sous l'action de la force Q_0. Comme on le voit, A dépend du rapport p/k. La représentation graphique de cette dépendance est donnée à la figure 290, *a* par la courbe accompagnée de l'inscription $h = 0$ (les autres courbes du graphique expriment la dépendance entre A et p/k en cas d'apparition d'une résistance).

La courbe (ou la formule (83)) montre qu'en faisant varier le rapport p/k, on peut obtenir des oscillations forcées d'amplitudes différentes. Pour $p = 0$ (ou $p \ll k$) l'amplitude est égale à δ_0 (ou est très proche de cette grandeur). Si la grandeur p est peu différente de k, l'amplitude A devient très grande. Quand $p = k$ (la fréquence de la force extérieure est égale à la fréquence des oscilla-

tions propres), on est en présence du phénomène dit de *résonance*. Les formules (81) — (83) ne se rapportent pas à ce cas-là, mais il est possible de démontrer qu'en cas de résonance l'amplitude des oscillatations forcées croît avec le temps de la manière montrée à la fig. 291. Enfin, quand $p \gg k$, l'amplitude A devient très petite (elle est pratiquement très proche de zéro).

Pour conclure, retenons encore que pour $p < k$, comme il découle de la comparaison des formules (79) et (81), les mouvements dus aux oscillations forcées et à la force extérieure sont tout le temps en phase (dans les deux cas elle est égale à pt). Si $p > k$, en portant le signe moins sous le signe de sinus, on peut écrire l'équation (81) sous la forme

$$x_2 = \frac{P_0}{p^2 - k^2} \sin (pt - \pi).$$

Par conséquent, pour $p > k$ le décalage entre les phases des oscillations forcées et de la force extérieure est égal à π (quand la force Q a une valeur maximale et quand elle est dirigée à droite, le point oscillant a une élongation maximale à gauche, etc.).

Les propriétés générales des oscillations forcées (et en particulier de la résonance) sont examinées d'une manière détaillée à la fin de ce paragraphe.

2. Oscillations forcées avec résistance. Examinons le mouvement d'un point soumis à l'action de la force de rappel $\boldsymbol{F}$, de la force de résistance $\boldsymbol{R}$, qui est proportionnelle à la vitesse (voir § 125), et de la force extérieure $\boldsymbol{Q}$. L'équation différentielle de ce mouvement a la forme suivante:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu \frac{dx}{dt} + Q_0 \sin pt.$$

Divisant les deux membres de cette égalité par m, en supposant que $\frac{Q_0}{m} = P_0$ et en tenant compte aussi des notations (74), on obtient:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + k^2 x = P_0 \sin pt. \tag{84}$$

L'équation (84) est *l'équation différentielle des oscillations forcées du point en présence de la résistance*. Comme on sait, sa solution générale se présente sous la forme $x = x_1 + x_2$, où x_1 est la solution générale de l'équation sans second membre, c'est-à-dire la solution de l'équation (73) (pour $k > b$ cette solution est donnée par l'égalité (77)), tandis que x_2 est une solution particulière de l'équation (84) toute entière. Cherchons la solution x_2 sous la forme

$$x_2 = A \sin (pt - \beta),$$

où A et β sont des constantes qu'il faut choisir de façon que l'égalité (84) devienne une identité. En calculant les dérivées, on obtient :

$$\frac{dx_2}{dt} = Ap\cos(pt-\beta), \qquad \frac{d^2x_2}{dt^2} = -Ap^2\sin(pt-\beta).$$

En substituant ces valeurs des dérivées et les valeurs de x_2 dans le membre gauche de l'équation (84) et en posant pour simplifier $pt - \beta = \psi$ (ou $pt = \psi + \beta$), on aura :

$$A(-p^2 + k^2)\sin\psi + 2bp\,A\cos\psi = P_0(\cos\beta\sin\psi + \sin\beta\cos\psi).$$

Pour que cette égalité soit vérifiée pour n'importe quel ψ, c'est-à-dire pour tout moment de temps, les coefficients de $\sin\psi$ et de $\cos\psi$ dans les deux membres doivent être respectivement égaux l'un à l'autre ; par conséquent,

$$A(k^2 - p^2) = P_0\cos\beta, \quad 2bpA = P_0\sin\beta.$$

En élevant chaque terme des équations obtenues au carré, puis ajoutant et en les divisant terme à terme, on trouve :

$$A = \frac{P_0}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4b^2p^2}}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{2bp}{k^2-p^2}. \tag{85}$$

Comme $x = x_1 + x_2$ et la valeur de x_1 est donnée par l'égalité (77), on trouve finalement la solution de l'équation (84) sous la forme

$$x = ae^{-bt}\sin(\tilde{k}t+\alpha) + A\sin(pt-\beta), \tag{86}$$

où a et α sont les constantes d'intégration, déterminées d'après les conditions initiales, tandis que A et β sont donnés par les formules (85) et ils ne dépendent pas des conditions initiales.

Les oscillations obtenues sont des oscillations complexes et elles comprennent les *oscillations propres* (le premier terme de l'égalité (86) ; fig. 289, *a*) et les *oscillations forcées* (le deuxième terme de l'égalité (86) ; fig. 289, *b*). Pour le cas examiné les oscillations propres du point ont été étudiées au paragraphe 125. Comme il fut établi, ces oscillations s'amortissent assez vite et après l'écoulement d'un certain intervalle de temps $t_{\text{établ}}$, appelé *temps d'établissement*, on peut les négliger [1]. L'allure de l'établissement des oscillations forcées est montrée à la fig. 289, *c*. Ainsi, on peut pratiquement estimer qu'après l'écoulement de la période d'établissement, le point

[1] Si, par exemple, on considère qu'on peut négliger les oscillations propres à partir du moment quand leurs amplitudes deviennent plus petites que 0,01 A, il est possible de déterminer la valeur de $t_{\text{établ}}$ à partir de l'égalité $ae^{-bt} = 0{,}01\,A$ ou $t_{\text{établ}} = \frac{1}{b}\operatorname{Log}\frac{100a}{A}$. Comme on le voit, plus la résistance est faible (c'est-à-dire plus b est petit), plus le temps d'établissement est grand.

effectuera les oscillations conformément à la loi

$$x = A \sin (pt - \beta). \tag{87}$$

Ces oscillations sont appelées *oscillations forcées*. Ce sont des oscillations harmoniques non amorties d'amplitude A, définie par l'égalité (85), et de fréquence p, égale à celle de la force extérieure. La grandeur β caractérise le *décalage de phase* des oscillations forcées par rapport à la phase de la force extérieure.

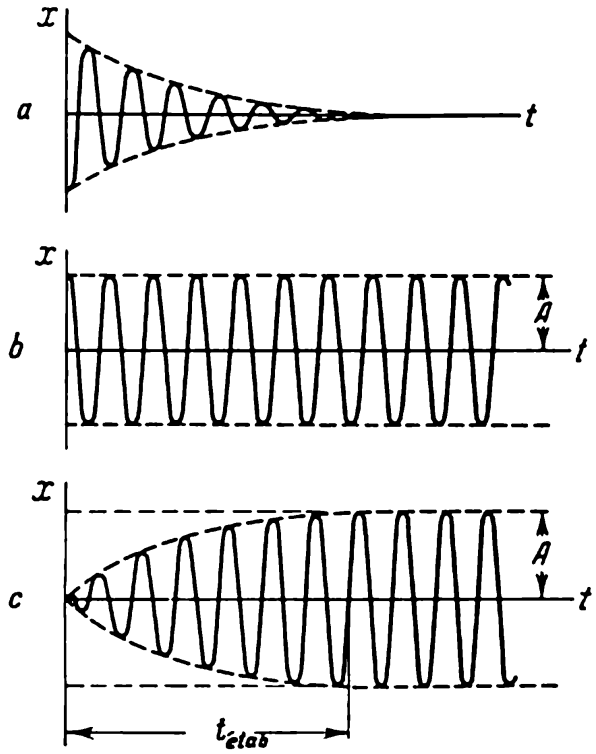


Fig. 289

Etudions les résultats obtenus. Introduisons les notations

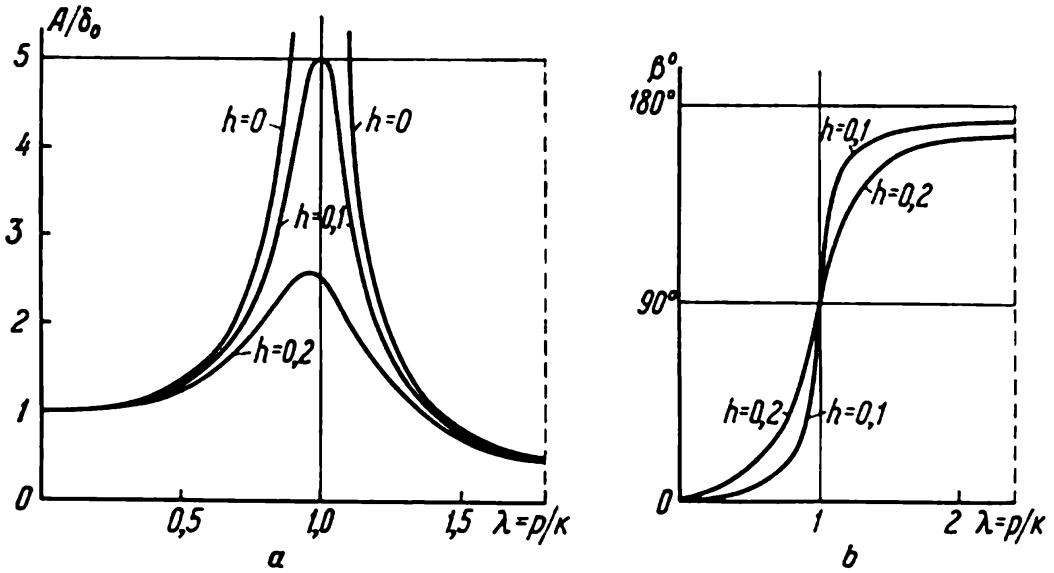
$$\frac{p}{k} = \lambda, \qquad \frac{b}{k} = h, \qquad \frac{P_0}{k^2} = \frac{Q_0}{c} = \delta_0, \tag{88}$$

où λ est le rapport des fréquences; h, la grandeur caractérisant la résistance; δ_0, la grandeur de l'élongation statique du point sous l'action de la force Q_0 (par exemple, dans le cas des oscillations d'une masse suspendue à un ressort δ_0 est égal à l'allongement statique du ressort dû à la force Q_0).

Dans ce cas, en divisant le numérateur et le dénominateur des égalités (85) par k^2, on obtient:

$$A = \frac{\delta_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4h^2\lambda^2}}; \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{2h\lambda}{1-\lambda^2}. \tag{89}$$

La formule (89) montre que A et β dépendent de deux paramètres sans dimensions λ et h. Pour plus de clarté, l'allure de cette dépendance est montrée par des courbes obtenues avec certaines valeurs de h (fig. 290). Dans chaque problème concret on peut calculer les valeurs de δ_0, λ, h à partir des données du problème, puis trouver les valeurs de A et β, en utilisant les graphiques correspondants ou les



F i g. 290

formules (89). On voit aussi d'après les graphiques (ou des formules) qu'en variant le rapport p/k, on peut obtenir des oscillations forcées de différentes amplitudes.

Quand la résistance est très petite (c'est le cas des oscillations dans l'atmosphère) et la valeur de λ est très différente de l'unité, on peut estimer d'une façon approchée que dans les formules (89) $h \approx 0$.

Alors, on aura les résultats obtenus au point 1, à savoir:

$$A \approx \frac{\delta_0}{|1-\lambda^2|}; \quad \beta \approx 0 \text{ (avec } \lambda < 1), \quad \beta \approx 180° \text{ (avec } \lambda > 1). \quad (90)$$

Examinons encore les cas particuliers suivants:

1. Si λ est très petit ($p \ll k$), en supposant approximativement que $\lambda \approx 0$, on obtient de la formule (89) que $A \approx \delta_0$. Dans ce cas les oscillations se produisent avec une amplitude égale à l'élongation statique δ_0 et un décalage de phase $\beta = 0$.

2. Si λ est très grand ($p \gg k$), la valeur A devient petite. Ce cas présente un intérêt particulier pour le problème d'isolation vibratoire de différentes constructions, appareils de précision, etc. En estimant que la résistance est petite et en négligeant dans (89) $2h\lambda$

et 1 par rapport à λ^2, on peut obtenir la formule approximative pour calculer A :

$$A = \delta_0/\lambda^2 = P_0/p^2.$$

3. Dans tous les cas présentant un intérêt pratique, la valeur de h est de beaucoup inférieure à l'unité. Alors, comme il s'ensuit

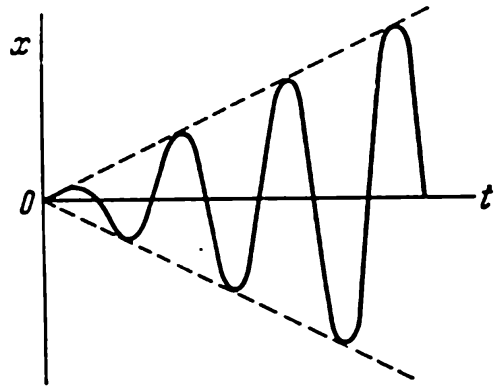


Fig. 291

de (89), si la valeur de λ est proche de l'unité, l'amplitude des oscillations forcées devient maximum. Le phénomène, qui se produit dans ce cas, est appelé *résonance* [1].

A la résonance on peut considérer que dans les formules (89) $\lambda = 1$ et alors

$$A_{\text{rés}} = \frac{\delta_0}{2h}, \qquad \beta_{\text{rés}} = \frac{\pi}{2}. \tag{91}$$

Il est évident que pour des h petits, la grandeur $A_{\text{rés}}$ peut atteindre des valeurs très grandes.

A la résonance les oscillations d'amplitude $A_{\text{rés}}$, de même que les oscillations forcées, ne s'établissent pas en général aussitôt. Le régime d'établissement des oscillations sera analogue à celui montré à la figure 289, *c*. Plus la résistance h est petite, plus grande est la grandeur $A_{\text{rés}}$, mais en même temps, le temps $t_{\text{établ}}$ d'établissement de ces oscillations croît lui-aussi (voir le renvoi à la page 338).

Quand la résistance et par suite h tendent vers zéro, la valeur limite de l'amplitude $A_{\text{rés}}$, comme on le voit de la formule (91), tend

---

[1] On voit de la formule (89) que $A = A_{\max}$, quand la valeur $f(\xi) = (1-\xi)^2 + 4h^2\xi$ (où $\xi = \lambda^2$) admet un minimum. En résolvant l'équation $f'(\xi) = -2(1-\xi-2h^2) = 0$, on trouve que A devient maximum pour $\xi = 1 - 2h^2$, c'est-à-dire pour $\lambda_{\text{rés}} = \sqrt{1-2h^2}$. Par conséquent, la résonance a lieu quand λ est de très peu inférieur à 1. Mais pratiquement, en négligeant h^2, on peut estimer que $\lambda_{\text{rés}} = 1$.

vers l'infini ; simultanément, le temps d'établissement $t_{\text{étab}}$ tend aussi vers l'infini. Ainsi, en cas d'absence de résistance le régime transitoire du système aurait pendant la résonance une durée infiniment grande, et les amplitudes d'oscillations augmenteraient sans cesse. La courbe représentative de ces oscillations est montrée à la fig. 291. Pour des résistances très petites l'allure des oscillations de résonance sera analogue.

3. Propriétés générales des oscillations forcées. Il découle des résultats obtenus ci-dessus que les oscillations forcées possèdent les propriétés importantes suivantes qui les distinguent des oscillations propres du point.

1) L'amplitude des oscillations forcées ne dépend pas des conditions initiales. 2) En présence d'une résistance les oscillations forcées ne s'amortissent pas. 3) La fréquence des oscillations forcées est égale à celle de la force extérieure et elle ne dépend pas des caractéristiques du système oscillant (la force extérieure « impose » sa fréquence d'oscillations au système). 4) Même pour une force extérieure minime (Q_0 est petit) on peut obtenir des oscillations forcées intenses, si la résistance est petite et p est proche de k (résonance). 5) Même pour de grandes valeurs de la force extérieure il est possible de rendre les oscillations forcées aussi petites que l'on désire, si la fréquence p est de beaucoup plus grande que k.

Les oscillations forcées, et en particulier le phénomène de résonance, jouent un grand rôle dans maints domaines de la physique et de la technique. Par exemple, pendant le fonctionnement des machines ou des moteurs on voit souvent apparaître des forces périodiques, capables de provoquer des oscillations forcées dans les organes de la machine ou son fondement.

On peut contrôler les variations de l'amplitude de ces oscillations en faisant travailler aux différents régimes le moteur pour lequel $p = \omega$, où ω est la vitesse angulaire de rotation (voir le problème 120). Avec l'accroissement de ω, l'amplitude A des oscillations de l'organe vibrant (ou du fondement) croîtra. Quand $\omega = k$, on est à la résonance et les amplitudes des oscillations forcées deviennent maximales. ω continuant à croître, l'amplitude A diminue et quand $\omega \gg k$, la valeur de A sera pratiquement égale à zéro. Dans de nombreux ouvrages d'art la résonance est un phénomène indésirable qu'il convient d'éviter, en choisissant le rapport p/k de façon que les amplitudes des oscillations forcées soient pratiquement égales à zéro ($p \gg k$).

Un exemple d'effet positif de la résonance nous est fourni par la radiotechnique, où elle est utilisée à la séparation des signaux d'un poste radio de ceux de tous les autres postes (réglage du récepteur).

La théorie des oscillations forcées est aussi à la base de la construction de plusieurs appareils de mesure, par exemple, des vibro-

graphes qui servent à mesurer le déplacement des corps oscillants (fondations, organes de machines, etc.) et notamment des sismographes enregistrant les secousses de l'écorce terrestre, etc.

Problème 120. Une poutre, sur laquelle est installé un moteur, fléchit sous son poids de $\delta_{st} = 1$ cm. Pour combien de tours à la minute de l'arbre du moteur y aura-t-il la résonance?

Solution. Il résulte de la solution du problème 118 que la période des oscillations propres de la poutre

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}}.$$

Si le centre de gravité de l'arbre du moteur n'est pas sur l'axe, l'arbre sera soumis à l'action de la force centrifuge Q_0 (fig. 292). Sa projection sur l'axe Ox,

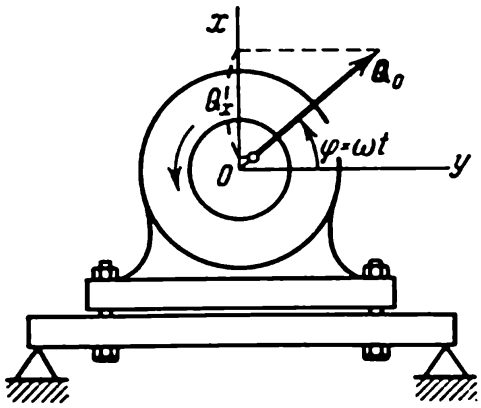


Fig. 292

égale à $Q_x = Q_0 \sin \omega t$ (ω est la vitesse angulaire de l'arbre), sera justement la force extérieure agissant sur la poutre; la fréquence de cette force $p = \omega$. Par conséquent, la période des oscillations forcées $T_f = \frac{2\pi}{\omega}$.

La résonance aura lieu quand $T_f = T$, c'est-à-dire quand

$$\omega_{cr} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = 31{,}3\ 1/\text{s}.$$

Il en résulte que le nombre de tours critique

$$n_{cr} = \frac{30\omega_{cr}}{\pi} \approx 300 \text{ tr/mn}.$$

Le nombre de tours de travail du moteur doit être de beaucoup plus grand que n_{cr}.

Problème 121. Etudier les oscillations forcées d'une masse suspendue à un ressort (problème 118), si l'extrémité supérieure A du ressort effectue des oscillations verticales conformément à la loi $\xi = a_0 \sin pt$.

Solution. Traçons l'axe Ox comme dans le cas du problème 118 (voir fig. 283). Si l'extrémité supérieure est déplacée du point A vers le bas d'une grandeur ξ, la longueur du ressort sera $l = l_0 - \xi + \delta_{st} + x$. Alors $F_x =$

$= -c\Delta l = -c\,(\delta_{st} + x - \xi)$, et l'équation différentielle du mouvement si on néglige la résistance de l'air et si on tient compte de ce que $P = c\delta_{st}$ sera

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -c\,(\delta_{st} + x - \xi) + P = -cx + c\xi.$$

En introduisant, comme au problème 118, la notion $\frac{c}{m} = k^2$, on obtient:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = k^2a_0 \sin pt.$$

Par conséquent, la masse effectuera des oscillations forcées, car l'équation obtenue coïncide avec l'équation (80) ou avec l'équation (84), si on estime que $b = 0$ et $P_0 = k^2a_0$. On déduit des égalités (88) que dans le cas donné $\delta_0 = a_0$ et $h = 0$. L'amplitude des oscillations forcées et le décalage de phase sont déterminés par les formules (90).

Si $p \ll k$ (l'extrémité supérieure du ressort oscille très lentement), $\lambda \approx 0$ et $A \approx a_0$, tandis que le décalage de phase $\beta = 0$. Dans ce cas la masse oscillera comme si le ressort est une tige rigide, ce qui correspond du point de vue physique à la condition $k \gg p$. Pour $p = k$ on a une résonance et les amplitudes des oscillations commencent à grandir fortement. Si p devient plus grand que k ($\lambda > 1$), la masse oscillera de façon que, quand l'extrémité du ressort monte vers le haut, la masse descend et inversement (décalage de phase $\beta = 180°$); quant à l'amplitude des oscillations, elle sera d'autant plus petite que p est plus grand. Enfin, quand p sera beaucoup plus grand que k ($\lambda \gg 1$), l'amplitude $A \approx 0$. En même temps la charge restera à la position d'équilibre statique (au point O), bien que l'extrémité supérieure du ressort effectue les oscillations à l'amplitude a_0 (la fréquence de ces oscillations est tellement grande que la charge ne peut pas les suivre).

Chapitre XXII

MOUVEMENT DU CORPS DANS LE CHAMP DE GRAVITATION TERRESTRE

§ 126. Mouvement du point matériel, lancé sous un certain angle au niveau dans le champ de gravitation de la Terre. Le problème du mouvement d'un corps dans le champ de gravitation terrestre se présente lors de l'étude du mouvement des missiles à grande portée, des satellites artificiels de la Terre, ainsi que dans les recherches se rapportant aux communications interplanétaires. Dans ces cas, quand la portée et la hauteur des trajectoires ont un ordre de grandeur comparable au rayon de la Terre, il est nécessaire (contrairement au problème examiné au paragraphe 108) de tenir compte des variations de la force d'attraction avec la distance.

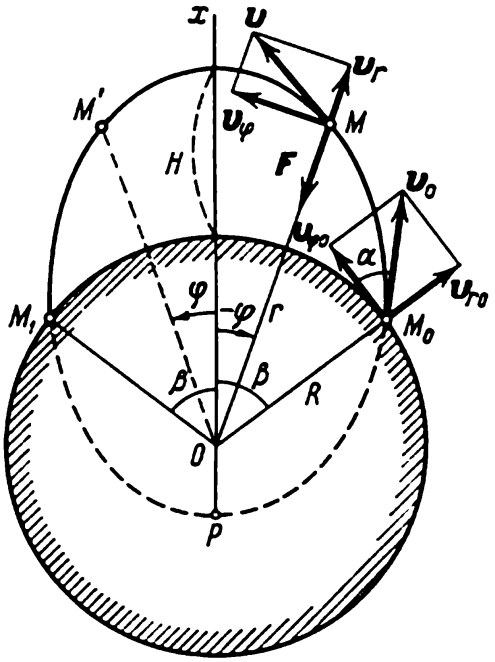


Fig. 293

Considérons le corps en mouvement comme un point matériel de masse m. Admettons qu'au moment initial ce point se trouve près de la surface de la Terre dans la position M_0 (fig. 293) et qu'il a une vitesse initiale v_0, dirigée sous un angle au niveau α. Si on néglige la résistance de l'air (ce qui est parfaitement justifié en première approximation pour les hauteurs de vol examinées), en supposant la Terre immobile, le point ne sera soumis pendant son mouvement qu'à l'action de la force d'attraction F qui est dirigée vers le centre de la Terre ; dans ce cas en vertu de la loi de gravitation universelle (voir § 115, problème 108)

$$F = mg\frac{R^2}{r^2}, \tag{92}$$

où $r = OM$ est la distance du point M au centre de la Terre, $R = OM_0$ est la valeur de r pour le point d'envol M_0, g est l'accélération de la force de gravitation terrestre au point M_0 [1].

[1] Dans la formule (92) R peut prendre une valeur quelconque supérieure au rayon de la Terre. Quand le point M_0 est à la surface de la Terre, on considère

Comme F est une force centrale (§ 116, point 3), la trajectoire du point sera représentée par une courbe plane. C'est pourquoi pour étudier le mouvement on peut utiliser les coordonnées polaires $r = OM$ et φ, en choisissant le centre de la Terre pour pôle. On déterminera la direction de l'axe polaire Ox plus tard. Formons l'équation différentielle du mouvement du point M.

Selon la loi des aires (§ 116) durant le mouvement sous l'action de la force centrale le moment du vecteur de la vitesse v par rapport au centre O (ou le double de la vitesse aréolaire du point) est une grandeur constante. Par conséquent, $m_O(v) = c$. Mais d'après le dessin $m_O(v) = rv_\varphi$ où $v_\varphi = r\frac{d\varphi}{dt}$ est la vitesse transversale du point (voir § 71). On en déduit la première équation

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = c. \tag{93}$$

On trouve la valeur de la constante c à partir des conditions au point d'envol M_0, où, comme il est facile de voir, $m_O(v_0) = Rv_0\cos\alpha$. Par conséquent,

$$c = Rv_0\cos\alpha. \tag{94}$$

On obtient la deuxième équation à l'aide du théorème relatif à la variation de l'énergie cinétique sous la forme différentielle (§ 114)

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA.$$

Pour calculer dA notons que le déplacement élémentaire du point M se compose d'un déplacement radial dr dirigé le long de v_r et d'un déplacement transversal $rd\varphi$ dirigé le long de v_φ (§ 71, fig. 155). Comme le deuxième déplacement est perpendiculaire à F, compte tenu des directions de la force et du déplacement, on obtient de l'équation (92):

$$dA = -F\,dr = -mgR^2\frac{dr}{r^2}.$$

Définitivement on trouve la deuxième équation

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = gR^2 d\left(\frac{1}{r}\right), \tag{95}$$

où (voir § 71)

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \tag{96}$$

---

habituellement que R est égale au rayon terrestre à l'équateur $R_0 = 6\,378$ km et $g = g_0 = 9{,}81$ m/s² (g est partout l'accélération de la force de gravitation terrestre et non pas de la force de pesanteur; voir § 121).

En intégrant les équations différentielles (93) et (95), on pourrait déterminer r et φ en fonction du temps t, c'est-à-dire trouver la loi du mouvement du point. Au lieu de suivre cette voie, cherchons directement la trajectoire. Pour simplifier le calcul, introduisons une nouvelle variable u, en posant

$$u=\frac{1}{r}; \qquad \frac{du}{d\varphi}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}. \tag{97}$$

Alors, compte tenu des égalités (97) et (93), on obtient:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=-r^2\frac{du}{d\varphi}\frac{c}{r^2}=-c\frac{du}{d\varphi}; \qquad r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)=\frac{c}{r}=cu.$$

En substituant ces valeurs dans la formule (96), on aura

$$v^2=c^2\left[u^2+\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right].$$

Après cela l'équation (95), si on divise les deux membres par $d\varphi$ et si on calcule la dérivée de v^2, prendra la forme suivante:

$$c^2\left[u\frac{du}{d\varphi}+\frac{du}{d\varphi}\frac{d^2u}{d\varphi^2}\right]=gR^2\frac{du}{d\varphi}.$$

En remplaçant c par sa valeur tirée de (94) et en divisant par $\frac{du}{d\varphi}$ on trouve finalement l'équation différentielle de la trajectoire:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}. \tag{98}$$

La solution de cette équation est composée de la solution générale de l'équation sans le second membre (qui coïncide avec la solution de l'équation (62) pour $k=1$) et de la solution particulière de l'équation avec le second membre; elle peut être écrite sous la forme

$$u=C_1\sin\varphi+C_2\cos\varphi+\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha},$$

ce qui peut être confirmé par une substitution directe; C_1 et C_2 étant ici les constantes d'intégration.

Choisissons maintenant la direction de l'axe polaire Ox (à partir duquel est compté l'angle φ) de façon que la condition $\frac{du}{d\varphi}=0$ soit satisfaite pour $\varphi=0$ (la signification de cette condition sera expliquée plus bas). Dans ce cas, vu que

$$\frac{du}{d\varphi}=C_1\cos\varphi-C_2\sin\varphi,$$

on obtient $C_1=0$. Finalement, en posant

$$p=\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g}, \tag{99}$$

on aura $pu = pC_2 \cos \varphi + 1$. Supposant que $pC_2 = -e$, où e désigne une nouvelle constante d'intégration, et en passant de u à r, on trouve finalement l'équation de la trajectoire sous la forme

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}. \tag{100}$$

De la géométrie analytique on sait que (100) représente en coordonnées polaires l'équation d'une section conique (ellipse, parabole ou hyperbole) de paramètre focal p et d'excentricité e, pour laquelle le pôle O se trouve à l'un des foyers, tandis que l'axe polaire est dirigé suivant l'axe de symétrie de la courbe à partir du sommet le plus proche du foyer (cela explique le choix fait plus haut de l'axe polaire).

La forme de la trajectoire dépendra finalement de la valeur de la constante d'intégration e que l'on trouvera à partir des conditions au point d'envol M_0. Désignons le module de l'angle M_0Ox par β. Il ressort en outre de l'égalité (97) et de la figure 293 qu'au point M_0

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0 = -\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{rd\varphi}\right)_0 = -\frac{1}{R}\frac{v_{r_0}}{v_{\varphi_0}} = -\frac{1}{R}\operatorname{tg}\alpha.$$

Alors les conditions initiales seront :

$$\text{quand } t = 0 \quad \varphi = -\beta, \quad u = \frac{1}{R}, \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{R}\operatorname{tg}\alpha.$$

En passant de nouveau de r à u, on obtient de (100) :

$$u = \frac{1}{p}(1 - e\cos\varphi), \qquad \frac{du}{d\varphi} = \frac{e}{p}\sin\varphi$$

En substituant les conditions initiales trouvées et en remplaçant en même temps p par sa valeur tirée de (99), on arrive aux égalités :

$$e\cos\beta = 1 - \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{gR}; \qquad e\sin\beta = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2gR} \tag{101}$$

Sur la base de ces égalités qu on divise préalablement terme à terme, puis qu'on élève au carré et on fait l'addition, on trouve finalement

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2(gR - v_0^2\cos^2\alpha)}, \tag{102}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g^2R^2}(v_0^2 - 2gR)}. \tag{103}$$

L'égalité (102) détermine l'angle β, c'est-à-dire la position de l'axe de symétrie de la trajectoire par rapport au point d'envol M_0. La formule (103) donne la valeur de l'excentricité de la trajectoire.

Elle montre que la trajectoire du point sera représentée par

a) une ellipse ($e < 1$) si $v_0 < \sqrt{2gR}$;

b) une parabole ($e = 1$) si $v_0 = \sqrt{2gR}$

c) une hyperbole ($e > 1$) si $v_0 > \sqrt{2gR}$

La vitesse $v_p = \sqrt{2gR}$ est appelée *vitesse parabolique* ou *deuxième vitesse cosmique*. Si on estime que $R = R_0 = 6\,378$ km et que $g = g_0 = 9{,}81$ m/s², on obtient que $v_p \approx 11{,}2$ km/s. Ainsi quand la vitesse initiale $v_0 \geqslant 11{,}2$ km/s, tout corps lancé de la surface de la Terre sous un angle au niveau α arbitraire se déplacera suivant une parabole ou une hyperbole (pour $\alpha = 90°$ cette courbe est une droite) en s'éloignant indéfiniment de la Terre. Il faut disposer de vitesses de cet ordre de grandeur pour assurer les communications interplanétaires [1]. Si la vitesse atteinte est inférieure à la deuxième vitesse cosmique, le corps retombera sur la Terre, ou bien se transformera en satellite artificiel de celle-ci.

La loi du mouvement du point le long de la trajectoire, c'est-à-dire sa position sur la trajectoire à tout instant, peut être trouvée si dans l'égalité (93) on remplace r par sa valeur tirée de (100) et si on intègre ensuite l'équation obtenue.

§ 127. Satellites artificiels de la Terre. Trajectoires elliptiques. Si $v_0 < \sqrt{2gR}$ tout corps lancé de la surface de la Terre peut devenir son satellite à condition que sa trajectoire (ellipse) ne passe pas par l'intérieur de la Terre, c'est-à-dire quand pour tous points de la trajectoire $r \geqslant R_0$ ou $r_{\min} = R_0$, où R_0 désigne le rayon de la Terre à l'équateur. Comme $r_{\min} = OP$ (voir fig. 293), la condition $r_{\min} = R_0$ sera satisfaite quand le point P sera situé à la surface de la Terre, et par conséquent, coïncide avec M_0 (voir fig. 294), c'est-à-dire quand $\beta = \pi$. Mais, d'après les égalités (101), $\beta = \pi$ seulement quand $\alpha = 0$ (ou $\alpha = \pi$) et $v_0^2 \geqslant gR$ car e ne peut être négatif. Par conséquent, pour qu'un corps lancé de la surface de la Terre devienne un satellite de celle-ci il faut que soient remplies deux conditions:

$$\alpha = 0, \quad \sqrt{2g_0R_0} > v_0 \geqslant \sqrt{g_0R_0}. \tag{104}$$

Comme on le voit de l'égalité (101), pour $\alpha = 0$ et $\beta = \pi$, l'excentricité de l'orbite du satellite sera:

$$e = \frac{v_0^2}{gR} - 1. \tag{105}$$

[1] La vitesse de libération d'un éventuel vaisseau interplanétaire de l'attraction simultanée de la Terre et du Soleil doit être supérieure à $\sqrt{2g_0R_0}$ et pour une direction déterminée v_0 est égale à 16,7 km/s environ.

La vitesse $v_c = \sqrt{gR}$, pour laquelle $e = 0$ et le satellite se déplace suivant une orbite circulaire de rayon R, est appelée *vitesse circulaire* ou *première vitesse cosmique*. Pour un lancement de la surface de la Terre, en posant $R = R_0 = 6\,378$ km et $g = g_0 = 9{,}81$ m/s², la vitesse circulaire $v_c \approx 7\,910$ m/s. Quand $v_0 > v_c$, l'orbite du satellite est une ellipse dont l'excentricité est d'autant plus grande que v_0 devient plus grande (fig. 294).

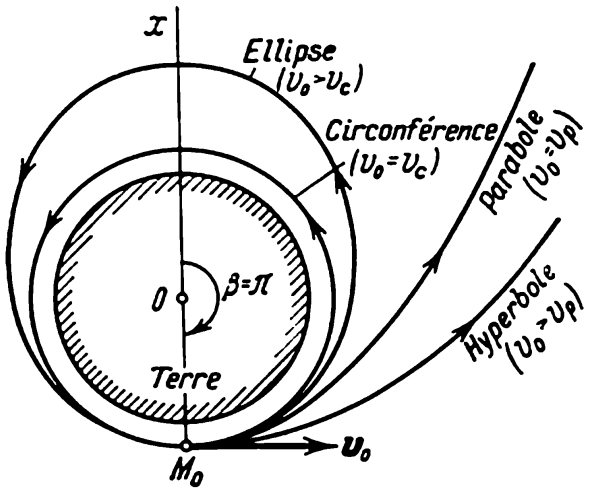


Fig. 294

Quand l'angle de lancement $\alpha \neq 0$, le corps lancé de la surface terrestre (même si on néglige la résistance de l'air) ne peut devenir un satellite de la Terre quelle que soit la vitesse initiale v_0.

C'est pourquoi il est pratiquement impossible de satelliser autour de la Terre un mobile en le lançant avec un canon ; ce placement sur l'orbite se fait à l'aide d'un missile guidé, qui élève le satellite à la hauteur donnée et communique au point M_0 (voir fig. 294) la vitesse exigée v_0 sous un angle au niveau $\alpha \approx 0$. C'est ainsi que furent lancés les premiers satellites artificiels soviétiques de la Terre et placés sur l'orbite les vaisseaux cosmiques ayant un homme à leur bord.

Notons pour conclure que parallèlement à l'augmentation de la hauteur H du point M_0 au-dessus de la surface de la Terre la résistance de l'air diminuera tandis que la durée de vie du spoutnik deviendra plus grande. Il est évident qu'en même temps on rend possible la satellisation même avec $\alpha \neq 0$.

Avec l'accroissement de H la vitesse circulaire $v_c = \sqrt{gR}$ diminue, car $g = g_0R_0^2/R^2$ et $R = R_0 + H$; par conséquent,

$$v_c = \sqrt{gR} = \sqrt{\frac{g_0R_0^2}{R}} = \sqrt{g_0R_0}\sqrt{\frac{R_0}{R_0+H}}.$$

Par exemple, si $H = 0$, $v_c = 7\,910$ m/s; si $H = 500$ km, $v_c = 7\,620$ m/s; si $H = 1\,000$ km, $v_c = 7\,360$ m/s et ainsi de suite. Toutefois l'énergie totale dépensée lors du lancement d'un satellite croît avec l'augmentation de H. En effet, si on désigne l'énergie rapportée à l'unité de masse par $\widetilde{T}$, l'énergie dépensée pour atteindre le point M_0 (en négligeant la résistance de l'air) sera $\widetilde{T}_1 = 0{,}5v_{\text{init}}^2 = 0{,}5\,\frac{2g_0R_0H}{R_0+H}$ (voir le problème 108), tandis que pour communiquer la vitesse orbitale il faudra une énergie $\widetilde{T}_2 = 0{,}5\,v_c^2$. Par conséquent, la consommation totale d'énergie par unité de masse est:

$$\widetilde{T} = 0{,}5\left(\frac{g_0R_0^2}{R_0+H} + \frac{2g_0R_0H}{R_0+H}\right) = 0{,}5g_0R_0\frac{R_0+2H}{R_0+H}$$

et elle sera d'autant plus grande que H est plus élevée.

Trajectoires elliptiques. Si $\alpha > 0$ et $v_0 < \sqrt{2g_0R_0}$ tout corps lancé de la surface terrestre, après avoir décrit un arc d'ellipse, retombera sur la Terre. De telles trajectoires elliptiques sont décrites par les missiles à grande portée, notamment les missiles intercontinentaux. Trouvons les caractéristiques principales de ces trajectoires.

Etant donné que l'axe Ox est un axe de symétrie de la trajectoire, le point de chute sera représenté par M_1 et la portée S sera égale à la longueur de l'arc $\widehat{M_0M_1}$ (voir fig. 293); par conséquent,

$$S = 2R_0\beta, \tag{106}$$

où β est défini par la formule (102). Comme il est convenu dans l'égalité (106), R_0 désigne le rayon moyen de la Terre.

La hauteur H maximale de la trajectoire est évidemment égale à $[(r)_{\varphi=0} - R_0]$, soit conformément aux égalités (99) et (100)

$$H = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{(1-e)\,g_0} - R_0, \tag{107}$$

où e est déterminé à partir de la formule (103).

On trouve la durée du vol T à l'aide de l'équation (93), qui avec (94) donne:

$$dt = \frac{r^2}{c}\,d\varphi = \frac{r^2}{R_0v_0\cos\alpha}\,d\varphi.$$

En remplaçant r par sa valeur tirée des égalités (99) et (100) et en intégrant, on aura:

$$T = \frac{v_0^3\cos^3\alpha}{R_0g_0^2}\int_{-\beta}^{\beta}\frac{d\varphi}{(1-e\cos\varphi)^2}.$$

En calculant cette intégrale, on trouve finalement après diverses transformations :

$$T = \frac{2v_0^3 \cos^3 \alpha}{R_0 g_0^2 (\sqrt{1-e^2})^3} (z + e \sin z), \tag{108}$$

où on a posé

$$z = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right). \tag{109}$$

Les formules obtenues permettent, connaissant v_0 et l'angle de lancement α, de déterminer la portée du vol S, la hauteur maximale H de la trajectoire et le temps de vol T.

Il est parfois très important dans la pratique de connaître la vitesse minimale $v_0^{\min}$ et l'angle de lancement le plus favorable α_f permettant d'atteindre une portée donnée $S = 2R_0\beta$.

Calculons pour cela la valeur de v_0 à partir de l'égalité (102). On obtient :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2R_0 g_0 \operatorname{tg} \beta}{\sin 2\alpha + 2\cos^2 \alpha \operatorname{tg} \beta}}. \tag{110}$$

Pour une portée donnée (et l'angle β donné) la vitesse nécessaire v_0 dépend de l'angle α. Comme l'angle α n'entre que dans le dénominateur de l'égalité (110), v_0 est minimum quand ce dénominateur est maximum. En égalant à zéro la dérivée du dénominateur par rapport à α, on trouve

$$\cos 2\alpha - \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta = 0,$$

d'où $\operatorname{ctg} 2\alpha_f = \operatorname{tg} \beta$ et l'angle de lancement le plus favorable

$$\alpha_f = 45° - \frac{\beta}{2} \tag{111}$$

On peut facilement vérifier le fait que pour cette valeur de α_f v_0 est minimum à l'aide du signe de la dérivée seconde. En substituant la valeur de α_f dans l'égalité (110), on obtient :

$$v_0^{\min} = \sqrt{2R_0 g_0 \frac{\sin \beta}{1 + \sin \beta}} \tag{112}$$

Les formules (112) et (111) déterminent la vitesse initiale minimale et l'angle de lancement le plus favorable qui assurent la portée donnée. La hauteur de la trajectoire et le temps de vol sont calculés à l'aide des formules (107) et (108), où v_0 et α sont remplacés par leurs valeurs prises de (112) et (111). Pour plus de clarté, les éléments de quelques trajectoires elliptiques les plus favorables calculés à l'aide de ces formules pour $R_0 = R_{\text{moy}} = 6\,370$ km sont donnés au tableau 1 (toutes les grandeurs du tableau sont données avec une précision allant jusqu'à la 5e unité après la virgule).

Tableau 1

Angle β	Portée S en km	Vitesse initiale nécessaire v_0^{min} en m/s	Angle de lancement le plus favorable α_f	Hauteur de la trajectoire H en km	Temps de vol T en mn et s
10°	2 220	4 300	40°	500	12 mn 30 s
20°	4 450	5 650	35°	900	19 mn 10 s
30°	6 670	6 460	30°	1 170	24 mn 50 s
40°	8 900	7 000	25°	1 300	30 mn 00 s
70°	15 570	7 780	10°	900	40 mn 10 s
90°	20 020	7 910	0°	0	42 mn 10 s

Rappelons que tous ces calculs se rapportent au mouvement dans le vide et qu'ils ne tiennent pas compte de l'influence de la rotation de la Terre. En conclusion, notons que pour des faibles portées (l'angle β est petit) l'arc de l'ellipse décrite par le corps lancé est proche de l'arc d'une parabole. D'autre part, si on pose $\sin\beta \approx \beta$ et $2R_0\beta = X$, en négligeant la grandeur β par rapport à l'unité dans les autres égalités, toutes les formules obtenues se transformeront à la limite en formules correspondantes pour les trajectoires paraboliques (voir § 108). En particulier, on obtient aussitôt à partir de (111) et de (112) que $\alpha_f = \alpha^* = 45°$, $v_0^{min} = \sqrt{g_0 X^*}$.

§ 128. **L'apesanteur.** Si un corps repose sur un plan horizontal quelconque à proximité de la Terre, les forces d'attraction agissant sur ce corps (plus précisément, les forces de pesanteur, voir § 121) sont équilibrées par la réaction du plan. Sous l'action de ces forces extérieures, dans ce corps apparaissent des efforts intérieurs qui se manifestent sous la forme des pressions mutuelles des particules du corps. On dit que le corps pèse. La sensation de pesanteur qu'éprouve l'homme à la surface de la Terre provient justement de telles pressions mutuelles qu'exercent les parties de son corps les unes sur les autres.

Cependant, comme nous allons le voir, si le corps se meut dans le champ d'attraction de la Terre, les forces extérieures et les particularités du mouvement ne font pas toujours apparaître les efforts intérieurs. Lorsque de tels efforts intérieurs apparaissent, on dit que le corps est en état de pesanteur. Au contraire, quand les efforts intérieurs ne se manifestent pas dans le corps, on dit qu'il est en état d'*apesanteur*. Ainsi, *on appelle apesanteur l'état d'un corps dans un champ d'attraction quand ni les forces extérieures appliquées à ce corps, ni son mouvement ne provoquent l'apparition d'aucuns efforts intérieurs*. Cet état est analogue à celui dans lequel se trouverait un

corps au repos ou en mouvement uniforme et rectiligne au dehors du champ d'attraction des corps célestes.

En étudiant les efforts intérieurs apparaissant dans un corps sous l'action de forces extérieures il y a lieu de distinguer les forces dites de masse (volumiques) et les forces superficielles. On appelle *forces de masse* les forces agissant sur chaque particule du corps considéré et numériquement proportionnelles à la masse des particules: l'exemple en est donné par les forces d'attraction. Les forces appliquées à la surface d'un corps sont appelées *superficielles*; citons en exemple les réactions de toute sorte d'appuis, la force de traction, la force de résistance d'un milieu, etc. Lorsqu'il s'agit de trouver la loi du mouvement (ou les conditions d'équilibre) d'un corps, la nature physique des forces appliquées importe peu; il suffit de connaître la valeur et la direction de chaque force. Cependant, comme nous allons le voir, cette différence de nature se fait sentir très fortement sur la valeur des efforts intérieurs apparaissant sous l'influence des forces extérieures. Ceci s'explique par le fait que les forces de masse agissent directement sur chaque particule du corps, tandis que l'action des forces superficielles se transmet par des particules grâce à la pression sur elles des particules voisines.

Considérons un corps de masse m effectuant dans le champ d'attraction terrestre un mouvement de translation; nous n'exigeons pas que ce mouvement soit rectiligne, les trajectoires des points du corps peuvent être curvilignes. Les dimensions du corps étant très petites devant le rayon de la Terre, on peut considérer que tous les points du corps sont éloignés du centre terrestre d'une même distance, de sorte que les forces d'attraction communiquent à toutes les particules du corps une même accélération g. La résultante des forces d'attraction agissant sur le corps est alors

$$\boldsymbol{F}_{\text{att}} = m\boldsymbol{g}. \tag{113}$$

En particulier, si le corps se meut (est au repos) à proximité de la surface de la Terre, on peut pratiquement admettre que $\boldsymbol{F}_{\text{att}} = m\boldsymbol{g}_0 = \boldsymbol{P}$, où $\boldsymbol{P}$ est numériquement égale au poids du corps.

Supposons qu'outre les forces d'attraction le corps soit soumis à l'action des forces superficielles agissant le long d'une certaine surface AB (fig. 295, *a*) et dont la résultante est $\boldsymbol{Q}$. La force $\boldsymbol{Q}$ peut être la force de pression du fond ou de la paroi de la cabine d'un aéronef renfermant un corps au repos, ou bien la force de traction, la force de résistance du milieu, etc.

Rappelons (voir § 99) qu'on peut considérer un corps en mouvement de translation comme un point matériel. Ecrivons l'équation du mouvement de ce corps sous la forme vectorielle (dans cette forme l'équation est vraie quelle que soit la direction de la force $\boldsymbol{Q}$), on a:

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{F}_{\text{att}} + \boldsymbol{Q}. \tag{114}$$

De cette équation et compte tenu de (113) on trouve l'accélération du corps:

$$w = g + \frac{Q}{m}. \tag{115}$$

Calculons maintenant les efforts intérieurs apparaissant sous l'action des forces F_{att} et Q dans une section arbitraire ab du corps perpendiculaire à la direction du vecteur Q, c'est-à-dire les forces avec lesquelles les particules séparées par cette section agissent les unes sur

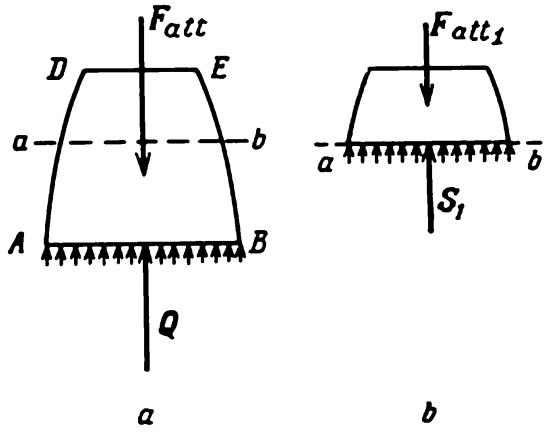


Fig. 295

les autres. A cet effet considérons le mouvement d'une partie du corps, par exemple, de la partie supérieure, de masse m_1. Sur cette partie agissent les forces d'attraction dont la résultante d'après la formule (113) est $F_{att\,1} = m_1 g$, et les forces de pression de la partie rejetée dont la résultante sera appelée S_1 (fig. 295, *b*). Comme tout le corps, la partie considérée effectue un mouvement de translation de même accélération w, donc on peut écrire $m_1 w = F_{att\,1} + S_1$ ou $m_1 w = m_1 g + S_1$, d'où $S_1 = m_1 (w - g)$. En remplaçant ici w par sa valeur tirée de la formule (115) on trouve finalement

$$S_1 = \frac{m_1}{m} Q. \tag{116}$$

Remarquant que ni l'accélération w, ni la force d'attraction F_{att} ne figurent dans cette dernière égalité, celle-ci sera évidemment vraie lorsque le corps est au repos ou bien se meut dans le champ d'attraction de plusieurs corps célestes (de la Terre et de la Lune, par exemple).

On tire de l'égalité vectorielle (116) que pour $Q \neq 0$ les efforts apparaissant dans le corps sont dirigés parallèlement à la force superficielle Q; numériquement ces efforts sont proportionnels à Q et à la masse de la partie du corps située au-dessus de la section con-

sidérée. Ainsi, pour $Q \neq 0$, un corps en mouvement ou au repos est un corps pesant. De plus, si le corps est au repos sur un plan horizontal, immobile par rapport à la Terre, Q est la réaction de ce plan et numériquement on a $Q = P$, où P est le poids du corps. Ainsi, pour $Q = P$, la formule (116) donne les efforts intérieurs apparaissant dans un corps immobile sur un plan horizontal. Dans un corps en mouvement, si la force superficielle $Q > P$ (par exemple, Q est la force de traction d'une fusée lancée verticalement) les efforts intérieurs dans toute section du corps seront plus grands qu'au repos (effet de surcharge); pour $Q < P$ les surcharges sont négatives.

La formule (116) permet de tirer la conclusion très importante suivante: *dans un corps qui se meut ou est au repos dans le champ d'attraction terrestre les forces extérieures font apparaître les efforts intérieurs et donc la pesanteur seulement dans le cas où parmi ces forces extérieures on trouve les forces superficielles.* Si le corps effectue dans un champ d'attraction un mouvement de translation et ceci uniquement sous l'action des forces d'attraction ($Q = 0$), en conformité de la formule (116), aucuns efforts intérieurs n'apparaissent dans le corps, on dit que le corps est en état d'apesanteur [1]. Les accélérations $\boldsymbol{w}$ de toutes les particules du corps sont dans ce cas, conformément à la formule (115), égales à $\boldsymbol{g}$.

Le résultat auquel nous avons abouti par des raisonnements physiques s'explique par le fait que les forces d'attraction (qui sont des forces de masse) agissent directement sur chaque particule du corps en imprimant à celles-ci, comme nous l'avons établi, les mêmes accélérations $\boldsymbol{g}$. Or avec cette même accélération $\boldsymbol{g}$ les particules se déplaceraient si elles étaient libres. Par conséquent, en mouvement de translation sous l'effet des seules forces d'attraction chaque particule du corps se meut comme si elle était libre et n'exerce aucune influence sur les particules voisines. Le corps se trouve alors en état d'apesanteur.

Notons que l'état d'apesanteur ne peut se produire que dans les corps entraînés dans un mouvement de translation. En effet, dans tout autre mouvement que celui de translation, les particules du corps que nous considérons comme des points matériels se déplacent avec des accélérations différentes. C'est le centre de gravité C qui aura l'accélération $\boldsymbol{w}_C = \boldsymbol{g}$; pour une particule arbitraire B du corps l'accélération $\boldsymbol{w}_B$ sera d'après la formule (70) du § 88:

$$\boldsymbol{w}_B = \boldsymbol{w}_C + \boldsymbol{w}_{BC} = \boldsymbol{g} + \boldsymbol{w}_{BC}. \tag{117}$$

[1] Soulignons qu'il s'agit des efforts intérieurs apparaissant uniquement sous l'effet des actions *extérieures*. Des efforts intérieurs d'autre nature, par exemple les tensions thermiques dans les parties d'une construction et les efforts intérieurs dus aux exercices physiques peuvent se manifester même à l'état d'apesanteur.

Ecrivons l'équation vectorielle du mouvement de la particule B : $m_B w_B = m_B g + N_B$, où m_B est la masse de la particule, $m_B g$ la force d'attraction et N_B la résultante des forces de pression qu'éprouve la particule B de la part des particules voisines. En remplaçant dans cette équation w_B par sa valeur donnée par (117), on obtient $m_B (g + w_{BC}) = m_B g + N_B$, d'où

$$N_B = m_B w_{BC}. \tag{118}$$

Pour un mouvement autre qu'une translation on a $w_{BC} \neq 0$, et donc $N_B \neq 0$, c'est-à-dire que les particules exercent des pressions les unes sur les autres et le corps ne se trouve pas en état d'apesanteur. L'apesanteur ne peut se manifester que si $w_{BC} = 0$, c'est-à-dire dans le cas d'une translation.

Notons que les raisonnements par lesquels nous sommes arrivés au résultat ci-dessus sont légitimes si l'on peut considérer les dimensions du corps petites devant le rayon de la Terre (devant la distance jusqu'au centre du corps exerçant l'attraction) car c'est uniquement sous cette condition qu'on peut supposer les accélérations g de toutes ses particules égales entre elles.

Ainsi, un corps quelconque animé d'un mouvement de translation libre dans le champ d'attraction terrestre (c'est-à-dire se mouvant sous l'effet des seules forces d'attraction) est en état d'apesanteur ; la condition supplémentaire est que les dimensions du corps soient petites devant sa distance au centre de la Terre. Il en est de même dans le cas du mouvement dans le champ d'attraction d'autres corps célestes.

Par conséquent, si l'on peut négliger la résistance de l'air, un corps tombant sur la Terre ou lancé de sa surface et animé d'un mouvement de translation est en état d'apesanteur. En particulier, les satellites artificiels de la Terre se mouvant sans rotation au-delà de l'atmosphère terrestre ainsi que les vaisseaux cosmiques avec tous les objets qu'ils abritent sont en état d'apesanteur. Il est clair que dans un tel mouvement non seulement les particules des corps n'exercent aucune pression les unes sur les autres, mais les corps eux-mêmes non plus s'ils entrent éventuellement en contact. Si les objets dans la cabine d'un vaisseau cosmique sur l'orbite se trouvent à des certaines distances les uns des autres, ces distances se conservent (pour l'observateur placé dans la cabine les corps paraissent comme planant librement dans l'air).

Les vols cosmiques ont posé le problème de l'apesanteur. Il faut en tenir compte dans le choix de l'équipement des vaisseaux cosmiques, car dans les conditions d'apesanteur certains types d'appareils ne peuvent pas normalement fonctionner ; c'est le cas par exemple des appareils utilisant l'effet du pendule composé ou l'amenée libre d'un liquide, etc. Un rôle plus important revient dans les conditions d'apesanteur aux forces moléculaires (qui, sur la Terre, sont petites

devant les pressions mutuelles conditionnées par la pesanteur), ce qui change fortement le caractère de divers phénomènes. Par exemple, un liquide mouillant remplissant un récipient fermé sous l'effet des forces moléculaires sera uniformément réparti sur les parois du récipient tandis que l'air que renferme le liquide en occupera le milieu. Quant à un liquide non mouillant, il prend la forme d'une boule.

L'apesanteur se fait sentir sur le fonctionnement de certains organes du corps humain (par exemple, de l'appareil vestibulaire responsable du sens d'équilibre) ; on comprend donc que pour que l'organisme humain puisse s'adapter à l'apesanteur il doit être bien entraîné préalablement. Pour assurer un séjour prolongé de l'homme sur les stations cosmiques on pense les construire sous la forme d'une roue tournante immense avec des cabines placées sur la « jante ». Il sera créé ainsi pour les corps à l'intérieur des cabines l'état de pesanteur, car les particules des corps agiront les unes sur les autres avec les forces données par l'égalité (118).

Quatrième partie

Dynamique des systèmes et du corps solide

Chapitre XXIII

INTRODUCTION À LA DYNAMIQUE DES SYSTÈMES. MOMENTS D'INERTIE D'UN CORPS SOLIDE

§ 129. Système mécanique. Forces extérieures et intérieures. On appelle *système mécanique* de points matériels ou de corps un système complexe dans lequel la position ou le mouvement de chaque point (ou de chaque corps) dépend de la position et du mouvement de tous les autres. Nous considérerons également un corps matériel comme un ensemble de particules (points) matérielles rigidement liées.

Un exemple classique de système mécanique est celui du système solaire dans lequel tous les corps sont liés entre eux par des forces d'attraction. Un autre exemple de système mécanique nous est fourni par les machines ou mécanismes dans lesquels tous les organes sont reliés par des joints, arbres, câbles, courroies, etc., c'est-à-dire par différentes liaisons géométriques. Dans ce cas, les différents corps du système sont soumis aux forces de pression ou de tension transmises par des liaisons.

Un ensemble de corps non assujettis à l'action mutuelle d'une force quelconque ne constitue pas un système mécanique (par exemple, un groupe d'avions volant dans l'atmosphère). Par la suite nous n'examinerons que les systèmes mécaniques de corps et nous conviendrons de les appeler simplement des systèmes.

Il résulte de ce qui a été dit précédemment que les forces qui agissent sur les points ou les corps d'un système peuvent être divisées en forces extérieures et intérieures.

On appelle forces *extérieures* les forces qui agissent sur les points du système et proviennent de points ou de corps étrangers au système donné. On appelle forces *intérieures* les forces qui agissent sur les points du système et proviennent d'autres points ou corps appartenant à ce même système. Nous désignerons les forces extérieures par le symbole F^e et les forces intérieures par F^i.

Les forces extérieures, comme les forces intérieures, peuvent être à leur tour soit actives, soit des forces de réactions des liaisons.

La division des forces en forces extérieures et forces intérieures est conventionnelle et dépend du système de corps dont on examine le mouvement. Par exemple, si l'on examine le mouvement du système solaire tout entier, la force attirant la Terre vers le Soleil sera une force intérieure; lorsqu'on étudie, au contraire, le mouvement de la Terre sur son orbite autour du Soleil, cette même force devra être considérée comme extérieure.

Les forces intérieures ont les propriétés suivantes:

1. *La somme générique (la résultante) de toutes les forces intérieures d'un système est nulle*:

$$\sum F_k^i = 0. \tag{1}$$

2. *La somme des moments (le moment résultant) de toutes les forces intérieures d'un système par rapport à un centre ou par rapport à un axe quelconque est nulle*:

$$\sum m_O(F_k^i) = 0 \quad \text{ou} \quad \sum m_x(F_k^i) = 0. \tag{2}$$

Les propriétés énoncées sont conséquence immédiate de la troisième loi de la dynamique, en vertu de laquelle deux points quelconques d'un système agissent l'un sur l'autre avec des forces égales en valeur absolue et directement opposées (voir, par exemple, fig. 7). Or la somme de telles forces ainsi que la somme de leurs moments par rapport à un centre (un axe) quelconque sont nulles, alors pour tout le système les sommes mentionnées sont également nulles.

Il ne résulte pas cependant des propriétés démontrées que les forces intérieures s'équilibrent mutuellement et n'ont aucune influence sur le mouvement du système, car ces forces sont appliquées à des points matériels ou à des corps différents et peuvent provoquer des déplacements mutuels de ces points ou de ces corps. Les forces intérieures seront équilibrées lorsque le système étudié sera un corps absolument rigide (voir § 3).

§ 130. Masse d'un système. Centre des masses ou d'inertie. Le mouvement d'un système dépend non seulement des forces actives, mais aussi de sa masse totale et de la distribution des masses. *La masse d'un système* est égale à la somme arithmétique des masses de tous les points ou de tous les corps composant le système [1]

$$M = \Sigma m_k. \tag{3}$$

[1] Nous désignerons, en règle générale, la masse d'un système par la même lettre M, déjà utilisée pour désigner les moments des forces. Toutefois la confusion n'est guère possible, car quand M désigne un moment elle est en général pourvue d'un indice (par exemple, M_C, M_x, M_{rot}, etc.). Ce n'est qu'au chapitre XXIX que pour plus de clarté nous désignerons la masse d'un système par la lettre $\mathcal{M}$ manuscrite.

La distribution des masses est caractérisée en premier lieu par la position du point appelé centre des masses. *On appelle centre des masses ou centre d'inertie d'un système le point géométrique C dont les coordonnées sont définies par les formules*:

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{M}, \quad y_C = \frac{\sum m_k y_k}{M}, \quad z_C = \frac{\sum m_k z_k}{M}, \tag{4}$$

où m_k désignent les masses des points matériels qui composent le système, et x_k, y_k, z_k les coordonnées de ces points.

Si l'on définit la position du centre d'inertie par son rayon-vecteur $\boldsymbol{r}_C$, on obtient pour $\boldsymbol{r}_C$ de l'égalité (4) la formule

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\sum m_k \boldsymbol{r}_k}{M}, \tag{5}$$

où $\boldsymbol{r}_k$ sont les rayons-vecteurs des points qui forment le système.

La position du centre d'inertie coïncide avec celle du centre de gravité quand le corps se trouve dans le champ de pesanteur uniforme. En effet, si dans les formules 74 (§ 53) on pose $p_k = m_k g$ et $P = Mg$, où g est l'accélération de la pesanteur (accélération constante en tout point d'un champ uniforme), nous obtiendrons, en divisant par g, des égalités (74) les formules (4).

Cependant les notions de centre de gravité et de centre d'inertie ne sont pas identiques. La notion de centre de gravité, en tant que point par lequel passe la ligne d'action de la résultante des forces de pesanteur, n'a, au fond, de sens que pour un corps solide placé dans un champ de pesanteur uniforme. La notion de centre d'inertie, en tant que caractéristique de la distribution des masses à l'intérieur du système, a une signification bien définie pour tout système de points matériels ou de corps; d'autre part, cette notion conserve son sens que le système donné soit soumis ou non à l'action de certaines forces.

§ 131. Moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe. Rayon de giration. La position du centre d'inertie ne caractérise pas complètement la distribution des masses du système. Par exemple (fig. 296), si l'on augmente d'une même grandeur la distance h séparant l'axe Oz de chacune des deux sphères A et B de masses égales, la position du centre d'inertie de ce système ne variera pas, tandis que la répartition des masses sera différente, ce qui ne manquera pas d'avoir un effet sur le mouvement du système (toutes les autres conditions restant inchangées, la rotation autour de l'axe Oz sera ralentie).

C'est pourquoi en mécanique on introduit une autre caractéristique de la distribution des masses: le moment d'inertie. *On appelle le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe donné Oz la*

grandeur scalaire égale à la somme des produits des masses de tous les points du corps par les carrés de leurs distances à cet axe:

$$J_z = \sum m_k h_k^2. \tag{6}$$

On montrera par la suite que le moment d'inertie joue pendant le mouvement de rotation du corps le même rôle que la masse pendant le mouvement de translation, c'est-à-dire que *le moment d'inertie est la mesure de l'inertie du corps pendant le mouvement de rotation.*

Selon la formule (6) le moment d'inertie d'un corps est égal à la somme des moments d'inertie de toutes ses parties par rapport à ce même axe. Pour un point matériel isolé se trouvant à la distance

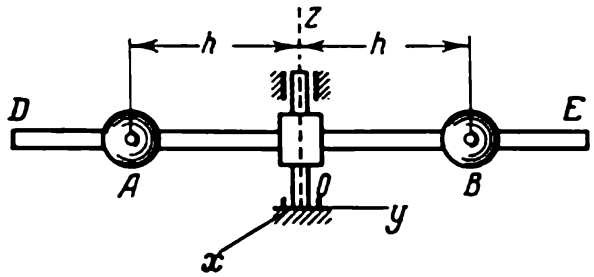


Fig. 296

h de l'axe, $J_z = mh^2$. L'équation aux dimensions du moment d'inertie dans le système pratique d'unités sera $[J] = \text{kgm s}^2$.

Durant les calculs on utilise souvent la notion de *rayon de giration*. Le rayon de giration d'un corps par rapport à l'axe Oz s'appelle la grandeur linéaire ρ_g définie par l'égalité

$$J_z = M\rho_g^2, \tag{7}$$

où M désigne la masse du corps.

Il résulte de la définition que le rayon de giration est géométriquement égal à la distance séparant l'axe Oz du point où doit être concentrée la masse totale du corps pour que le moment d'inertie de ce point isolé soit égal au moment d'inertie de tout le corps. Connaissant le rayon de giration, on peut par la formule (7) trouver le moment d'inertie du corps et réciproquement.

§ 132. Moments d'inertie de quelques corps homogènes. Si l'on décompose le corps en ses parties élémentaires, la somme qui figure dans l'égalité (6) deviendra, à la limite, une intégrale et nous obtiendrons:

$$J_z = \int_{(V)} h^2\, dm, \tag{8}$$

où l'intégrale est étendue à tout le volume du corps et h dépend des coordonnées des points du corps.

Il est commode de se servir de la formule (8) pour le calcul des moments d'inertie des corps homogènes. Examinons quelques exemples.

1. Tige mince homogène de longueur l et de masse M. Trouvons le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Az qui lui est perpendiculaire (fig. 297). Dirigeons l'axe de coordonnée Ax suivant AB. Alors, pour un segment élémentaire quelconque de longueur dx la grandeur $h = x$ et la masse $dm = \rho_1\, dx$, où $\rho_1 = M/l$ est la masse de l'unité de longueur de la tige. La formule (8) donne alors [1]

$$J_A = \int_0^l x^2\, dm = \rho_1 \int_0^l x^2\, dx = \rho_1 \frac{l^3}{3}.$$

Remplaçant ici ρ_1 par sa valeur, nous trouvons en définitive

$$J_A = \frac{1}{3} M l^2. \qquad (9)$$

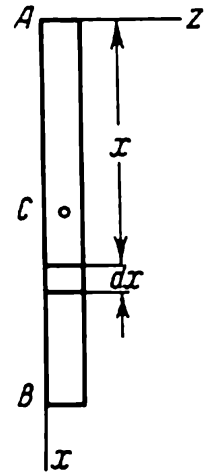


Fig. 297

2. Anneau circulaire mince et homogène de rayon R et de masse M. Trouvons le moment d'inertie de l'anneau par rapport à l'axe Cz perpendiculaire au plan de l'anneau et passant par son centre

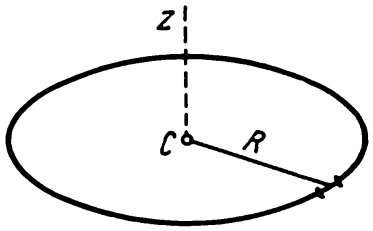


Fig. 298

(fig. 298). Puisque tous les points de l'anneau se trouvent à la distance $h_k = R$ de l'axe Cz, la formule (6) donne

$$J_C = \Sigma m_k R^2 = (\Sigma m_k)\, R^2 = MR^2.$$

Donc, pour un anneau

$$J_C = MR^2. \qquad (10)$$

[1] Ici et partout ailleurs J_A désigne le moment d'inertie par rapport à l'axe passant par le point A et dirigé perpendiculairement au plan de la section du corps représenté sur la figure.

Il est évident qu'on obtiendra le même résultat pour le moment d'inertie d'une mince enveloppe cylindrique de masse M et de rayon R par rapport à son axe.

3. Disque circulaire homogène et cylindre de rayon R et de masse M. Calculons le moment d'inertie d'un disque circulaire par rapport à l'axe Cz perpendiculaire au disque et passant par son centre (fig. 299, *a*). Choisissons un anneau élémentaire de rayon r et d'épaisseur dr. La surface de cet anneau est égale à $2\pi r\,dr$ et sa masse $dm = \rho_2 2\pi r\,dr$ où $\rho_2 = \frac{M}{\pi R^2}$

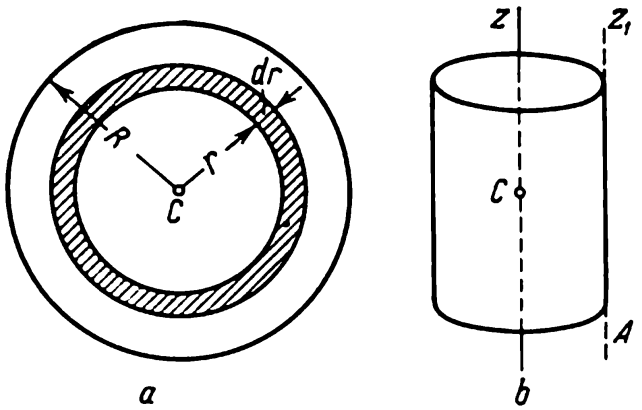


Fig. 299

est la masse de l'unité de surface du disque. Alors, d'après la formule (10), pour l'anneau élémentaire choisi on aura

$$dJ_C = r^2\,dm = 2\pi\rho_2 r^3\,dr,$$

et pour tout le disque

$$J_C = 2\pi\rho_2 \int_0^R r^3\,dr = \frac{1}{2}\pi\rho_2 R^4.$$

Remplaçant ici ρ_2 par sa valeur, nous trouvons finalement

$$J_C = \frac{1}{2} MR^2. \tag{11}$$

On obtiendra évidemment la même formule pour le moment d'inertie J_z d'un cylindre circulaire homogène de masse M et de rayon R par rapport à son axe Cz (fig. 299, *b*).

4. Plaque rectangulaire, cône, sphère. Omettant les calculs intermédiaires, donnons les formules qui déterminent les moments d'inertie des corps suivants (le lecteur peut aisément déduire ces formules lui-même) :

a) plaque rectangulaire homogène de masse M et de côtés a et b (l'axe x est dirigé suivant le côté a ; l'axe y, suivant le côté b) :

$$J_x = \frac{1}{3} Mb^2, \quad J_y = \frac{1}{3} Ma^2;$$

b) cône droit, circulaire et plein, de masse M et dont le rayon de la base est R (l'axe z est dirigé suivant l'axe du cône) :

$$J_z = 0{,}3\, MR^2;$$

c) sphère pleine de masse M et de rayon R (l'axe z est dirigé suivant un diamètre) :

$$J_z = 0{,}4\, MR^2.$$

Les moments d'inertie des corps non homogènes et des corps de forme complexe peuvent être déterminés expérimentalement à l'aide d'appareils appropriés. Une de ces méthodes est examinée au § 155.

§ 133. Moments d'inertie d'un corps par rapport à des axes parallèles. Théorème de Huygens. Les moments d'inertie d'un corps donné par rapport à des axes différents seront, en général,

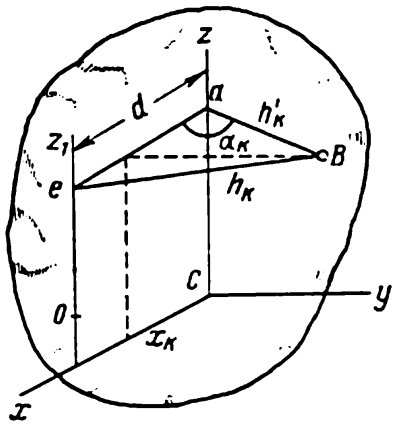


Fig. 300

différents. Montrons comment, connaissant le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque mené à travers le corps, on trouve le moment d'inertie par rapport à un autre axe quelconque parallèle au premier.

Menons par le centre d'inertie C du corps l'axe Cz et un autre axe Oz_1 parallèle au premier (fig. 300) ; désignons par d la distance entre ces axes. On a, par définition,

$$J_{Oz_1} = \sum m_k h_k^2, \quad J_{Cz} = \sum m_k h_k'^2,$$

où h_k est la distance séparant un point arbitraire B du corps de l'axe Oz_1 et h'_k, la distance entre ce même point et l'axe Cz. Il vient alors du $\triangle$ Bae que

$$h_k^2 = h_k'^2 + d^2 - 2dh'_k \cos \alpha_k.$$

Choisissons le point C comme origine des coordonnées et menons les axes x et y perpendiculaires à Cz tout en dirigeant l'axe x de telle manière qu'il coupe l'axe Oz_1 ; il est alors évident que $Cx \parallel ae$. En désignant les coordonnées du point B par x_k, y_k, z_k, nous obtenons :

$$h'_k \cos \alpha_k = x_k \quad \text{et} \quad h_k^2 = h_k'^2 + d^2 - 2\,dx_k.$$

En substituant cette valeur de h_k dans l'expression de J_{Oz_1} et mettant en facteur dans les sommes correspondantes d^2 et $2d$, on aura :

$$J_{Oz_1} = \sum m_k h_k'^2 + \left(\sum m_k\right) d^2 - 2d \sum m_k x_k.$$

Dans le membre droit de l'égalité la première somme est égale à J_{Cz} et la deuxième, à la masse du corps M. Trouvons la valeur de la troisième somme. Selon la formule (4), les coordonnées du centre d'inertie sont données par la formule $\Sigma m_k x_k = M x_C$. Puisque, dans le cas considéré, le point C est l'origine des coordonnées, $x_C = 0$ et, par conséquent, $\Sigma m_k x_k = 0$. Nous obtenons en définitive

$$J_{Oz_1} = J_{Cz} + Md^2. \tag{12}$$

La formule (12) est l'expression du théorème suivant, dit *théorème de Huygens*[1] : *le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe donné est égal au moment d'inertie par rapport à un axe parallèle au premier et passant par le centre d'inertie du corps augmenté du produit de la masse totale du corps par le carré de la distance entre les axes.*

Il résulte de la formule (12) que $J_{Oz_1} > J_{Cz}$. Par conséquent, si l'on prend tous les axes ayant une même direction, le moment d'inertie sera minimum par rapport à celui de ces axes qui passe par le centre d'inertie.

Le théorème de Huygens permet de déterminer le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe donné Oz_1 quand on connaît son moment d'inertie par rapport à un axe quelconque Az_2 parallèle à l'axe donné.

Il faut alors pour cela connaître les distances d_1 et d_2, séparant chacun de ces axes du centre d'inertie du corps. Alors, sachant J_{Az_2} et d_2, nous déterminons J_{Cz} par la formule (12) et, ensuite, en utilisant cette même formule, nous trouvons le moment d'inertie cherché J_{Oz_1}.

[1] Christian Huygens (1629-1695), savant hollandais, célèbre mathématicien, physicien et astronome. Il a inventé les premières horloges à balancier. Il a étudié les oscillations du pendule composé (voir § 154) et a dégagé la notion de moment d'inertie d'un corps.

Problème 122. Déterminer le moment d'inertie d'une tige mince par rapport à l'axe Cz perpendiculaire à la tige et passant par son centre d'inertie.

S o l u t i o n. Menons par l'extrémité A de la tige l'axe Az (voir fig. 297 ; l'axe Cz n'y est pas représenté). Alors, en vertu de la formule (12)

$$J_C = J_A - Md^2.$$

Dans le cas considéré $d = \frac{l}{2}$, où l est la longueur de la tige et J_A se détermine à partir de la formule (9). Par conséquent,

$$J_C = \frac{1}{3} Ml^2 - \frac{1}{4} Ml^2 = \frac{1}{12} Ml^2.$$

Problème 123. Déterminer le moment d'inertie d'un cylindre par rapport à l'axe Az_1 qui passe par sa génératrice (voir fig. 299, *b*).

S o l u t i o n. Selon le théorème de Huygens $J_{Az_1} = J_{Cz} + Md^2$. Dans le cas donné $d = R$, et d'après la formule (11) $J_{Cz} = \frac{1}{2} MR^2$.

Substituant ces valeurs, nous obtenons :

$$J_{Az_1} = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2.$$

Chapitre XXIV

MOUVEMENT DU CENTRE D'INERTIE D'UN SYSTÈME

§ 134. Equations différentielles du mouvement d'un système. Considérons un système composé de n points matériels. Choisissons un point quelconque du système de masse m_k. Désignons la résultante de toutes les forces extérieures appliquées au point (forces actives et forces de réactions comprises) par F_k^e, et la résultante de toutes les forces intérieures, par F_k^i. Si le point a dans ce cas une accélération w_k, en vertu de la loi fondamentale de la dynamique on aura :

$$m_k w_k = F_k^e + F_k^i.$$

Nous obtiendrons un résultat analogue pour n'importe quel point. Donc, pour tout le système on aura :

$$\left.\begin{aligned} m_1 w_1 &= F_1^e + F_1^i, \\ m_2 w_2 &= F_2^e + F_2^i, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_n w_n &= F_n^e + F_n^i. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Ces équations, qui permettent de définir la loi du mouvement de chaque point du système, sont appelées *équations différentielles du mouvement du système* sous forme vectorielle. Les équations (13) sont des équations différentielles car $w_k = \frac{dv_k}{dt} = \frac{d^2 r_k}{dt^2}$; les forces qui entrent dans les membres droits des équations dépendront, en général, du temps, des coordonnées des points du système et de leurs vitesses (voir § 99 et § 107).

En projetant les égalités (13) sur les axes d'un système quelconque de coordonnées, nous pouvons obtenir les équations différentielles du mouvement du système en projection sur ces axes.

La solution complète du problème fondamental de la dynamique pour un système consisterait, connaissant les forces données, à intégrer les équations différentielles adéquates et à déterminer ainsi la loi du mouvement de chacun des points du système.

Néanmoins, ce mode de résolution n'est pas toujours suivi pour deux raisons. D'abord, il est trop compliqué et présente, en règle générale, des difficultés mathématiques insurmontables. En second lieu, dans la majorité des cas, lors de la résolution des problèmes

de mécanique, il suffit de connaître certaines caractéristiques globales du mouvement du système en entier et non pas le mouvement de chacun de ses points séparément. Ces caractéristiques globales sont déterminées à l'aide des *théorèmes généraux* de la dynamique des systèmes que nous allons étudier.

Le rôle essentiel des équations (13) est qu'elles constituent avec leurs conséquences un point de départ pour la déduction des théorèmes généraux correspondants.

§ 135. Mouvement du centre d'inertie. Souvent pour définir le mouvement d'un système (surtout d'un corps solide) il suffit de connaître la loi du mouvement de son centre d'inertie. Pour trouver cette loi, considérons les équations du mouvement d'un système (13) et additionnons-les membre à membre. Nous obtenons alors:

$$\sum m_k \boldsymbol{w}_k = \sum \boldsymbol{F}_k^e + \sum \boldsymbol{F}_k^i. \tag{14}$$

Transformons le membre gauche de cette égalité. De la formule (5) pour le rayon-vecteur du centre d'inertie, nous avons:

$$\sum m_k \boldsymbol{r}_k = M \boldsymbol{r}_C.$$

Calculant les dérivées secondes par rapport au temps des deux membres de cette égalité et remarquant que la dérivée de la somme est égale à la somme des dérivées, nous trouvons:

$$\sum m_k \frac{d^2 \boldsymbol{r}_k}{dt^2} = M \frac{d^2 \boldsymbol{r}_C}{dt^2}$$

soit

$$\sum m_k \boldsymbol{w}_k = M \boldsymbol{w}_C, \tag{15}$$

où $\boldsymbol{w}_C$ est l'accélération du centre d'inertie du système. Puisqu'en vertu de la propriété des forces intérieures d'un système (§ 129) $\Sigma \boldsymbol{F}_k^i = 0$, en portant les valeurs trouvées dans l'égalité (14), nous obtenons en définitive

$$M \boldsymbol{w}_C = \sum \boldsymbol{F}_k^e. \tag{16}$$

L'équation (16) est précisément l'expression du théorème du mouvement du centre d'inertie d'un système. Elle s'identifie formellement avec l'équation qui définit la loi du mouvement d'un point matériel (§ 100, formule 3) de masse $m = M$ soumis à l'action des forces $\boldsymbol{F}_k^e$. Par conséquent, le théorème que nous venons de démontrer pour le mouvement du centre d'inertie peut être énoncé de la façon suivante: *le centre d'inertie d'un système se déplace comme un point matériel dont la masse est égale à la masse totale du système et auquel sont appliquées toutes les forces extérieures qui agissent sur ce système.*

Projetant les deux membres de l'égalité (16) sur les axes de coordonnées, nous obtenons:

$$M\frac{d^2x_C}{dt^2}=\sum F^e_{kx},\quad M\frac{d^2y_C}{dt^2}=\sum F^e_{ky},\quad M\frac{d^2z_C}{dt^2}=\sum F^e_{kz}. \quad (16')$$

Ce sont *les équations différentielles du mouvement du centre d'inertie* en projections sur les axes de coordonnées.

L'importance du théorème démontré résulte des considérations suivantes:

1) Ce théorème fournit une argumentation aux méthodes de la dynamique du point. Les équations (16') montrent que *les solutions que nous obtenons en considérant le corps donné comme un point matériel définissent la loi du mouvement du centre d'inertie de ce corps.* Donc ces solutions ont un sens tout à fait déterminé et précis.

En particulier, si un corps effectue un mouvement de translation, son mouvement est complètement défini par le mouvement de son centre d'inertie. Ainsi, un corps qui effectue un mouvement de translation peut toujours être assimilé à un point matériel de masse égale à la masse du corps. Dans les autres cas, on ne peut assimiler un corps à un point matériel que si on peut pratiquement déterminer la position du corps par la position de son centre d'inertie.

2) Ce théorème permet lors de l'étude de la loi du mouvement du centre d'inertie d'un système quelconque de ne pas tenir compte de toutes les forces intérieures a priori inconnues.

C'est justement ce qui lui donne un intérêt pratique.

§ 136. Loi de la conservation du mouvement du centre d'inertie. On peut tirer du théorème relatif au mouvement du centre d'inertie les importantes conséquences suivantes.

1) Admettons que la somme des forces extérieures qui agissent sur le système soit égale à zéro

$$\sum F^e_k=0.$$

Alors, il résulte de l'équation (16) que $w_C=0$ ou $v_C=\text{const}$. Donc, *si la somme de toutes les forces extérieures qui agissent sur un système est égale à zéro, le centre d'inertie de ce système se déplace à une vitesse constante en module et en direction, autrement dit, son mouvement est uniforme et rectiligne.* En particuiler, si le centre d'inertie se trouvait primitivement au repos, il restera au repos. Nous voyons ainsi que les forces intérieures ne peuvent modifier le mouvement du centre d'inertie du système.

2) Admettons que la somme des forces extérieures qui agissent sur le système ne soit pas égale à zéro, mais que ces forces soient telles que la somme de leurs projections sur l'un quelconque des

axes (par exemple. sur l'axe Ox) soit nulle :

$$\sum F_{kx}^{e} = 0.$$

Alors, la première des équations (16') donne :

$$\frac{d^2x_C}{dt^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dx_C}{dt} = v_{Cx} = \text{const.}$$

Donc, *si la somme des projections de toutes les forces extérieures en action sur un axe quelconque est égale à zéro, la projection de la vitesse du centre d'inertie du système sur cet axe est une grandeur constante.* En particulier, si à l'instant initial $v_{Cx} = 0$, à tout instant ultérieur on aura également $v_{Cx} = 0$, autrement dit, le centre d'inertie du système ne se déplacera pas dans ce cas le long de l'axe Ox ($x_C = \text{const.}$).

Ces divers résultats sont l'expression de la *loi de la conservation du mouvement du centre d'inertie d'un système.* Examinons quelques exemples qui illustrent ses applications.

a) Mouvement du centre d'inertie du système solaire. Puisqu'on peut pratiquement négliger l'attraction des étoiles, on peut estimer qu'aucune force extérieure n'agit sur le système solaire. Donc, en première approximation, son centre d'inertie se déplace dans l'espace par un mouvement rectiligne et uniforme.

b) Action d'un couple de forces sur un corps (voir, par exemple, fig. 43). Si l'on soumet un corps solide non lié à l'action d'un couple de forces ($\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}'$), la somme géométrique de ces forces extérieures sera égale à zéro ($\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}' = 0$). Par conséquent, le centre d'inertie C du corps, s'il était initialement immobile, doit aussi rester immobile après l'application du couple. Ainsi, quel que soit le point d'application à un corps solide non lié d'un couple de forces, le corps commencera à tourner autour de son centre d'inertie (voir § 19).

c) Mouvement sur un plan horizontal. S'il n'y avait pas de frottement, les efforts musculaires de l'homme (forces intérieures) seraient vains et il ne pourrait se déplacer sur un plan horizontal car, dans ce cas, la somme des projections sur un axe horizontal quelconque Ox de toutes les forces extérieures (force de pesanteur et réaction du plan) qui lui sont appliquées est égale à zéro et le centre d'inertie de l'homme ne se déplacera pas le long du plan ($x_C = \text{const.}$).

Si, par exemple, l'homme déplace sa jambe droite en avant, la jambe gauche glissera en arrière et le centre d'inertie restera à la même place. Au contraire, avec l'apparition du frottement la force que celui-ci développe s'opposera au glissement de la jambe gauche vers l'arrière car cette force sera dirigée dans ce cas vers

l'avant. Ce sera précisément cette force extérieure qui permettra à l'homme de se déplacer dans la direction de son action (dans le cas considéré, en avant).

Le déplacement d'une locomotive ou d'une automobile s'effectue d'une manière analogue. La force de pression de la vapeur ou du gaz dans le moteur est une force intérieure et ne peut par elle-même déplacer le centre d'inertie du système. Le déplacement se produit parce que le moteur transmet aux roues correspondantes, dites roues menantes, *un moment de rotation*. Le point de contact B de la roue menante (fig. 301) tend alors à glisser vers la gauche.

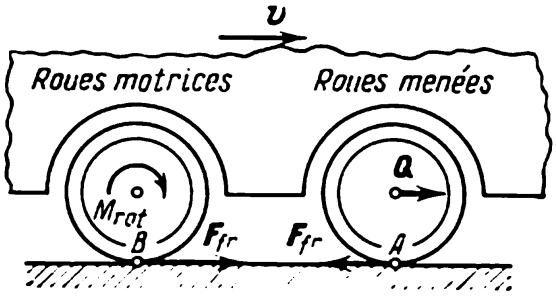


Fig 301

Mais sur la roue agit dans ce cas une force de frottement dirigée vers la droite. C'est précisément cette force extérieure qui permet au centre de gravité de la locomotive ou de l'automobile de se déplacer vers la droite. Lorsque cette force n'existe pas ou lorsqu'elle est insuffisante pour vaincre la résistance éprouvée par les roues menées [1]. il n'y aura pas de déplacement vers la droite ; les roues motrices tourneront alors sur place (elles patineront).

d) Freinage. Pour freiner, on serre le bandage fixé rigidement à la roue en mouvement avec un sabot de frein. La force de frottement du sabot contre le bandage qui se manifeste alors est une force intérieure ; par elle-même, elle ne peut modifier le mouvement du centre d'inertie, c'est-à-dire freiner le train ou l'automobile. Mais le frottement du sabot contre le bandage ralentit la rotation de la roue autour de son axe et augmente la force de frottement de la roue contre le rail (ou le sol) qui est dirigée dans le sens contraire du mouvement. C'est cette force précisément qui ralentira le mouvement du centre d'inertie du train ou de l'automobile et effectuera le freinage (voir problème 148, § 156).

[1] La roue menée est soumise non pas à l'action d'un moment de rotation mais à celle de la force Q appliquée à son axe. Sous cette action toute la roue, y compris le point de contact A de la roue avec le sol, tend à se déplacer vers l'avant. Mais en même temps la roue est assujettie à la force de frottement dirigée vers l'arrière. Cette force extérieure freine le mouvement.

§ 137. Résolution des problèmes. En appliquant le théorème du mouvement du centre d'inertie on peut, connaissant les forces extérieures, trouver la loi du mouvement du centre d'inertie et, inversement, connaissant le mouvement du centre d'inertie, déterminer le vecteur résultant des forces extérieures qui agissent sur le système. Nous avons examiné le premier problème en dynamique du point. Ci-dessous nous étudierons quelques exemples de résolution du deuxième problème.

Le théorème permet entre autres d'exclure de l'examen toutes les forces intérieures. C'est pourquoi il convient de choisir le système considéré de telle manière que les forces a priori inconnues soient intérieures.

Dans les cas où joue la loi de la conservation du mouvement du centre d'inertie, le théorème permet, connaissant le déplacement de l'une des parties du système, de déterminer le déplacement de l'autre partie.

Nous avons démontré que lorsque $\sum F_{kx}^{e} = 0$ et qu'à l'instant initial $v_{Cx} = 0$, au cours du mouvement du système $x_C = \text{const}$. Admettons, pour concrétiser, que le système soit composé de trois corps dont les masses sont m_1, m_2, m_3 et les coordonnées initiales de leurs centres d'inertie, x_1, x_2, x_3. Si sous l'action de forces intérieures (ou extérieures) les corps effectuent des déplacements absolus dont les projections sur l'axe Ox sont ξ_1, ξ_2, ξ_3, les coordonnées correspondantes deviendront égales à $x_1 + \xi_1$, $x_2 + \xi_2$, $x_3 + \xi_3$. Alors, la coordonnée du centre d'inertie x_C de tout le système dans les positions initiale et finale sera :

$$x_{C_0} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{M}; \quad x_{C_1} = \frac{m_1(x_1+\xi_1) + m_2(x_2+\xi_2) + m_3(x_3+\xi_3)}{M}.$$

Puisque $x_C = \text{const}$, $x_{C_0} = x_{C_1}$ et, par conséquent,

$$m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + m_3\xi_3 = 0 \tag{17}$$

soit

$$p_1\xi_1 + p_2\xi_2 + p_3\xi_3 = 0. \tag{17'}$$

Ainsi, lorsque la loi de la conservation du mouvement du centre d'inertie est vérifiée le long de l'axe Ox, la somme algébrique des produits des masses (ou des poids) des corps du système par les projections des déplacements absolus de leurs centres d'inertie doit être égale à zéro, à condition qu'à l'instant initial $v_{Cx} = 0$. Au cours du calcul de ξ_1, ξ_2, . . . il faut toujours tenir compte de leurs signes.

Problème 124. A la proue et à la poupe d'une barque de poids P sont assises à une distance l l'une de l'autre deux personnes dont les poids sont p_A et p_B (fig. 302). En négligeant la résistance de l'eau, déterminer dans quelle direction et de combien se déplacera la barque si les personnes changent de place.

S o l u t i o n. Pour exclure de l'examen les forces inconnues de frottement des semelles contre le fond de la barque ainsi que les efforts musculaires des personnes, nous considérerons la barque et les personnes comme un seul système (les forces citées deviendront alors intérieures). Les forces extérieures agissant sur le système seront les forces verticales P, p_A, p_B, N. Alors $\sum F_{kx}^{e} = 0$ et,

puisque à l'instant initial $v_{Cx} = 0$, $x_C = \text{const}$. Par conséquent, les déplacements absolus de tous les corps sont liés par la relation (17).

En représentant la barque et les personnes dans leurs positions initiale et finale, nous voyons que le déplacement de la barque $\xi_b = x$. Ensuite, pour la première personne le déplacement absolu $\xi_A = x + l$; le déplacement absolu de la deuxième personne est égal à BB_1 et la projection de ce déplacement sur l'axe Ox sera $\xi_B = -(l - x)$. Alors, d'après l'équation (17')

$$Px + p_A (x + l) + p_B [-(l - x)] = 0.$$

De là nous trouvons que le déplacement de la barque

$$x = \frac{p_B - p_A}{P + p_A + p_B} l.$$

Si $p_B > p_A$, $x > 0$, c'est-à-dire que la barque se déplace vers la droite; lorsque $p_B < p_A$, le déplacement de la barque s'effectuera vers la gauche. Lorsque $p_B = p_A$, la barque restera sur place.

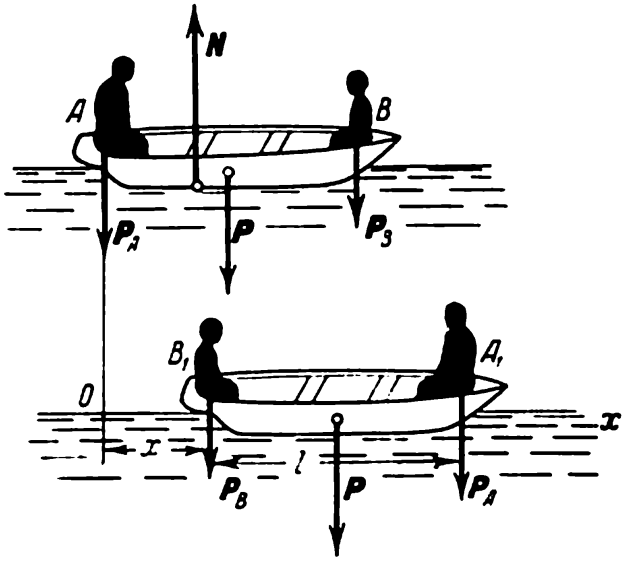


Fig. 302

Nous soulignons une fois de plus l'importance de la remarque suivante: *le système, dont il faut examiner le mouvement au cours de la résolution de problèmes similaires, doit être choisi de telle manière que les forces a priori inconnues deviennent intérieures.*

Problème 125. Le centre de gravité de l'arbre d'un moteur est décalé de l'axe de rotation d'une grandeur $AB = a$. Le poids de l'arbre est égal à p, le poids de tous les autres organes du moteur est égal à P. Déterminer la loi du mouvement du moteur placé sur un plan horizontal lisse lorsque l'arbre tourne avec une vitesse angulaire constante ω. Trouver, de plus, quel sera l'effort maximum éprouvé par le boulon D si, à l'aide de ce dernier, on fixe le moteur rigidement.

Solution. Pour exclure les forces qui font tourner l'arbre en admettant qu'elles sont intérieures, nous examinerons le moteur tout entier, y compris l'arbre, comme un seul système.

1) Lorsque le moteur n'est pas fixé, toutes les forces qui agissent sur lui sont verticales et ici, comme dans le problème précédent, la loi de la conservation

du mouvement du centre d'inertie sera vérifiée le long de l'axe Ox. Représentons le moteur dans une position arbitraire (fig. 303), en admettant que la position initiale est celle où les points B et A se trouvent sur une même verticale (sur l'axe Oy). Alors, pour une position arbitraire $\xi_A = x$, $\xi_B = x + a \sin \varphi$. De là, en prenant en considération que $\varphi = \omega t$, nous trouvons d'après la formule (17')

$$Px + p(x + a \sin \omega t) = 0,$$

d'où

$$x = -\frac{pa}{P+p} \sin \omega t.$$

Par conséquent, le moteur effectuera des vibrations harmoniques de fréquence angulaire ω.

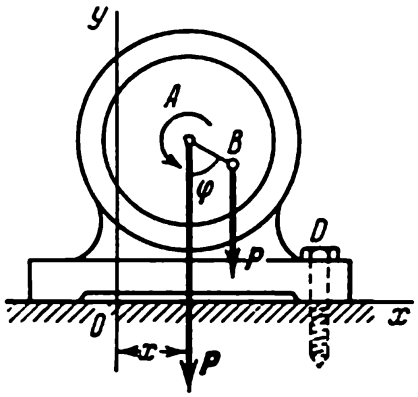


Fig. 303

2) Lorsque le moteur est fixé, d'après la première des équations (16') la réaction horizontale R_x du boulon sera égale à

$$R_x = M \frac{d^2 x_C}{dt^2}, \quad \text{où} \quad x_C = \frac{P x_A + p x_B}{Mg}.$$

Dans ce cas le point A est immobile et $x_A = h$ (h = const.) et $x_B = h + a \sin \omega t$. En définitive, en dérivant l'expression x_C et en la multipliant par M (M est ici partout la masse de tout le système), nous trouvons:

$$R_x = M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \frac{p}{g} \frac{d^2 x_B}{dt^2} = -\frac{pa\omega^2}{g} \sin \omega t.$$

La force de pression sur le boulon est égale en module à $|R_x|$ et est dirigée dans le sens opposé. Sa valeur maximum sera $\frac{pa\omega^2}{g}$.

Problème 126. La manivelle AB de longueur r et de poids p, tournant à une vitesse angulaire constante ω, met en mouvement une coulisse et un piston D qui lui est relié dont le poids global est égal à P (fig. 304). Au cours du mouvement sur le piston agit une force constante Q. En négligeant le frottement contre les éléments de la glissière, trouver la pression horizontale maximum exercée sur l'axe A de la manivelle.

Solution. Pour exclure les forces qui font tourner la manivelle ainsi que la pression exercée sur elle par la coulisse, examinons le mouvement de tout le système. Alors d'après la première des équations (16'), si l'on désigne la

réaction horizontale de l'axe A par R_x, on aura :

$$M\frac{d_2x_C}{dt^2}=R_x-Q,$$

où, selon les formules (4), $Mx_C = m_1x_1 + m_2x_2$.

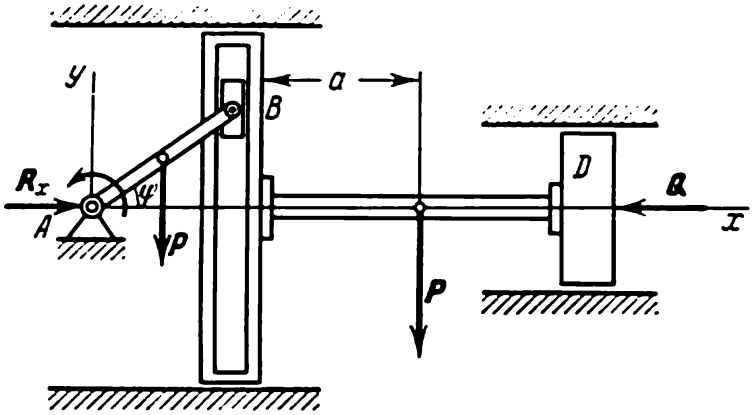


Fig. 304

Dans le cas considéré

$$m_1=\frac{p}{g},\quad x_1=\frac{r}{2}\cos\omega t;\quad m_2=\frac{P}{g},\quad x_2=a+r\cos\omega t,$$

puisque $\varphi = \omega t$. En définitive nous trouvons :

$$R_x=Q+M\frac{d^2x_C}{dt^2}=Q-\frac{r\omega^2}{g}\left(\frac{p}{2}+P\right)\cos\omega t.$$

La force de pression sur l'axe est égale en module à $|R_x|$ et est dirigée dans le sens opposé. La pression sera maximum lorsque $\varphi = 180°$ et sera alors égale à

$$Q+\frac{r\omega^2}{g}\left(\frac{p}{2}+P\right).$$

Chapitre XXV

THÉORÈME DE LA VARIATION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME

§ 138. Quantité de mouvement d'un système. *On appelle quantité de mouvement d'un système la grandeur vectorielle Q égale à la somme géométrique (vecteur résultant) des quantités de mouvement de tous les points du système* (fig. 305) :

$$Q = \sum m_k v_k. \tag{18}$$

On voit sur la figure que, indépendamment des grandeurs des vitesses des différents points du système (si seulement ces vitesses ne

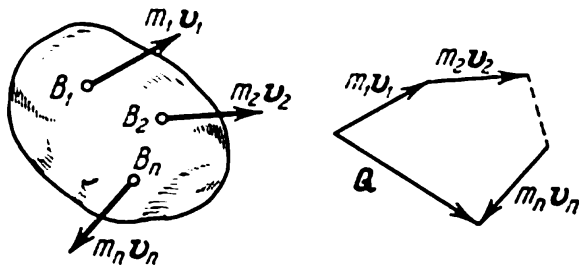


Fig. 305

sont pas parallèles), le vecteur Q peut prendre n'importe quelles valeurs et même devenir égal à zéro lorsque le polygone construit avec les vecteurs $m_k v_k$ se ferme. Donc, on ne peut pas par la grandeur Q définir complètement le mouvement du système.

Etablissons la formule permettant de calculer beaucoup plus aisément la valeur de Q et aussi d'en dégager la signification. Il résulte de l'égalité (5) que

$$\sum m_k r_k = M r_C.$$

Dérivons les deux membres par rapport au temps, nous obtenons

$$\sum m_k \frac{dr_k}{dt} = M \frac{dr_C}{dt} \quad \text{ou} \quad \sum m_k v_k = M v_C.$$

De là nous trouvons que

$$Q = M v_C, \tag{19}$$

c'est-à-dire que *la quantité de mouvement d'un système est égale au produit de la masse de tout le système par la vitesse de son centre d'iner-*

tie. Il est particulièrement commode de se servir de ce résultat lors du calcul des quantités de mouvement des corps solides.

La formule (19) montre que si un corps (ou un système) se déplace de telle manière que son centre d'inertie reste immobile, la quantité de mouvement de ce corps sera nulle. Par exemple, la quantité de mouvement d'un corps en rotation autour d'un axe fixe qui passe par son centre d'inertie sera égale à zéro.

Au contraire, dans le cas d'un mouvement composé du corps la grandeur Q ne caractérisera pas la composante de rotation autour du centre d'inertie. Par exemple, pour une roue qui roule, $Q = Mv_C$ indépendamment de la façon dont tourne la roue autour de son centre d'inertie C.

Ainsi, *la quantité de mouvement ne caractérise que le mouvement de translation du système*. Au cours d'un mouvement composé la grandeur Q ne caractérise que la composante de translation du mouvement du système avec le centre d'inertie.

§ 139. Théorème de la variation de la quantité de mouvement. Considérons un système composé de n points matériels. Formons pour ce système les équations différentielles du mouvement (13) et additionnons-les membre à membre. Nous obtiendrons alors:

$$\sum m_k w_k = \sum F_k^e + \sum F_k^i.$$

La dernière somme, du fait de la nature des forces intérieures, est égale à zéro. De plus,

$$\sum m_k w_k = \frac{d}{dt}\left(\sum m_k v_k\right) = \frac{dQ}{dt}.$$

Soit en définitive:

$$\frac{dQ}{dt} = \sum F_k^e. \tag{20}$$

L'équation (20) est expression du théorème de la variation de la quantité de mouvement d'un système sous forme différentielle: *la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement d'un système est égale à la somme géométrique de toutes les forces extérieures appliquées au système.*

En projections sur les axes de coordonnées nous aurons:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e. \tag{21}$$

Trouvons une autre expression de ce théorème. Admettons qu'à l'instant $t = 0$ la quantité de mouvement du système soit égale à Q_0, et qu'à l'instant t_1 elle devienne égale à Q_1. Alors, multipliant

les deux membres de l'égalité (20) par dt et intégrant, nous obtenons :

$$Q_1 - Q_0 = \sum \int_0^{t_1} F_k^e \, dt$$

ou

$$Q_1 - Q_0 = \sum S_k^e, \tag{22}$$

car les intégrales se trouvant à droite sont les impulsions des forces extérieures.

L'équation (22) exprime le théorème de la variation de la quantité de mouvement d'un système sous forme intégrale: *la variation de la quantité de mouvement d'un système durant un intervalle de temps déterminé est égale à la somme des impulsions des forces extérieures appliquées au système durant ce même intervalle de temps.*

En projections sur les axes des coordonnées nous aurons :

$$\left.\begin{aligned} Q_{1x} - Q_{0x} &= \sum S_{kx}^e, \\ Q_{1y} - Q_{0y} &= \sum S_{ky}^e, \\ Q_{1z} - Q_{0z} &= \sum S_{kz}^e. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Montrons la relation qui existe entre le théorème démontré et le théorème du mouvement du centre d'inertie. Puisque $Q = Mv_C$, en portant cette valeur dans l'égalité (20) et en tenant compte de ce que $\frac{dv_C}{dt} = w_C$, nous obtenons $Mw_C = \Sigma F_k^e$, c'est-à-dire l'équation (16).

Par conséquent, le théorème du mouvement du centre d'inertie et le théorème de la variation de la quantité de mouvement d'un système sont, au fond, deux formes différentes d'un même théorème. Quand on étudie le mouvement d'un corps solide (ou d'un système de corps), on peut aussi bien se servir de l'une ou de l'autre de ces formes, toutefois il est d'habitude plus commode d'utiliser l'équation (16).

Néanmoins, pour un milieu continu (liquide, gaz) la notion de centre d'inertie du système tout entier perd pratiquement son sens. Dans ces cas, pour résoudre les problèmes, on utilise le théorème de la variation de la quantité de mouvement d'un système. Ce théorème a également des conséquences importantes pour la théorie du choc (chapitre XXXI) ainsi que pour l'étude de la propulsion à jet (§ 142).

L'intérêt pratique du théorème réside dans la possibilité d'exclure de l'examen les forces intérieures a priori inconnues (par exemple, les forces de pression mutuelle des particules du liquide).

§ 140. Loi de la conservation de la quantité de mouvement. On peut obtenir du théorème de la variation de la quantité de mouvement d'un système les importantes conséquences suivantes:

1) Admettons que la somme de toutes les forces extérieures qui agissent sur un système soit égale à zéro:

$$\sum \boldsymbol{F}_k^e = 0.$$

Alors, il résulte de l'équation (20) que $\boldsymbol{Q}$ = const. Ainsi, *si la somme de toutes les forces extérieures appliquées au système est égale à zéro, le vecteur de la quantité de mouvement du système sera constant en module et en direction.*

2) Admettons que les forces extérieures agissant sur le système soient telles que la somme de leurs projections sur un axe quelconque (par exemple, Ox) est égale à zéro:

$$\sum \boldsymbol{F}_{kx}^e = 0.$$

Alors, il résulte des équations (21) que Q_x = const. Ainsi, *si la somme des projections de toutes les forces extérieures en action sur un axe quelconque est égale à zéro, la projection de la quantité de mouvement du système sur cet axe est une grandeur constante.*

Ces résultats expriment *le principe de la conservation de la quantité de mouvement d'un système.* Il en résulte que les forces intérieures ne peuvent pas modifier la quantité globale de mouvement du système. Examinons quelques exemples.

a) Effet de recul. Si l'on considère le fusil et la balle comme un seul système, la pression des gaz lors du coup de feu sera une force intérieure. Cette force ne peut pas modifier la quantité de mouvement globale du système. Mais puisque les gaz dégagés par la poudre en agissant sur la balle lui communiquent une certaine quantité de mouvement dirigée vers l'avant, ils doivent en même temps communiquer au fusil la même quantité de mouvement dans le sens opposé. Cela provoquera un mouvement du fusil vers l'arrière, ou ce que l'on appelle le recul. Un effet analogue se produit lors du tir au canon.

b) Travail d'une hélice propulsive. Une hélice communique à une certaine masse d'air (ou d'eau) un mouvement le long de l'axe de l'hélice, en rejetant cette masse vers l'arrière.

Si l'on considère la masse rejetée et l'avion (ou le bateau) comme un seul système, les forces d'action mutuelles entre l'hélice et le milieu sont intérieures, elles ne peuvent modifier la quantité de mouvement globale de ce système. Le rejet de la masse d'air (d'eau) vers l'arrière communique à l'avion (ou au bateau) une certaine vitesse dirigée vers l'avant telle que la quantité de mouvement globale du système considéré reste nulle puisqu'elle l'était avant l'amorçage du mouvement.

Un effet analogue est obtenu dans le cas de l'action des avirons ou des roues à palettes.

c) Propulsion à jet. Dans une fusée les produits gazeux de la combustion du carburant sont rejetés à une grande vitesse de l'orifice se trouvant à l'arrière de l'engin (tuyère propulsive). Les forces de pression qui agissent alors sont des forces intérieures et elles ne peuvent pas modifier la quantité de mouvement globale du système fusée — produits de combustion. Mais puisque les gaz d'échappement ont une quantité déterminée de mouvement dirigée vers l'arrière, la fusée acquiert alors une vitesse correspondante dirigée vers l'avant. La grandeur de cette vitesse sera déterminée au § 142.

Attirons l'attention sur le fait qu'une hélice propulsive (exemple précédent) communique au mobile, par exemple à l'avion, un mouvement par un rejet vers l'arrière de particules du milieu dans lequel il se déplace. Dans le vide un tel mouvement serait impossible. Un propulseur à jet communique un mouvement au mobile par le rejet vers l'arrière de masses qu'il a lui-même élaborées (produits de la combustion). Ce mouvement est possible aussi bien dans l'air que dans le vide.

§ 141. Résolution des problèmes. On utilise habituellement le théorème de la variation de la quantité de mouvement pour étudier le mouvement d'un milieu (liquide, gaz).

L'application du théorème permet d'exclure de l'examen toutes les forces intérieures. C'est pourquoi il faut tâcher de choisir le système de manière que toutes ou certaines des forces a priori inconnues soient intérieures.

Il est commode d'appliquer le principe de la conservation de la quantité de mouvement dans les cas où, connaissant la variation de la vitesse de translation d'une partie du système, il faut déterminer la vitesse de l'autre partie. En particulier, cette loi est fréquemment utilisée dans la théorie du choc.

Problème 127. Une balle de poids p se déplaçant horizontalement à une vitesse u vient buter une caisse remplie de sable placée sur un chariot (fig. 306). A quelle vitesse se déplacera le chariot après le choc si le poids du chariot et de la caisse est égal à P?

Solution. Considérons la balle et le chariot comme un seul système. Ceci nous permet de ne pas tenir compte pendant la résolution du problème des forces qui apparaissent au moment du choc de la balle contre le sable. La somme des projections sur l'axe horizontal Ox des forces extérieures appliquées au système est égale à zéro. Donc, $Q_x = \text{const.}$ ou $Q_{0x} = Q_{1x}$, où Q_0 est la quantité de mouvement du système avant le choc et Q_1, après le choc. Puisque avant le choc le chariot était immobile,

$$Q_{0x} = \frac{p}{g} u.$$

Après le choc, le chariot et la balle se déplaceront avec la même vitesse que nous désignerons par v. Alors

$$Q_{1x} = \frac{p+P}{g} v.$$

Egalant les membres droits des expressions Q_{0x} et Q_{1x}, nous trouvons

$$v = \frac{p}{p+P} u.$$

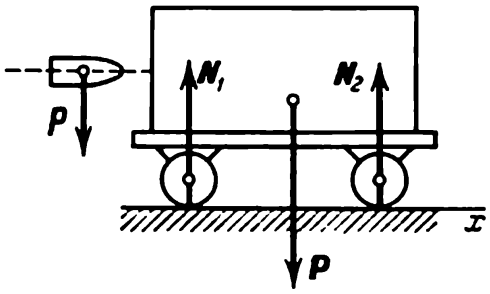


Fig. 306

Problème 128. Déterminer la vitesse de recul libre d'un canon dont le corps est horizontal, si le poids de toutes les pièces en recul est P, le poids de l'obus p et si la vitesse de l'obus par rapport au tube du canon est égale, à la sortie de l'âme, à u.

Solution. Pour exclure les forces inconnues de pression des gaz dégagés par la poudre, considérons l'obus et les pièces qui reculent comme un seul système.

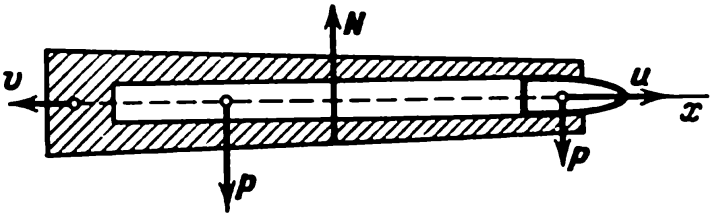


Fig. 307

En négligeant pendant le mouvement de l'obus dans l'âme du canon la résistance au recul, nous trouvons que la somme des projections sur l'axe Ox des forces extérieures appliquées au système est égale à zéro (fig. 307). Alors $Q_x = \text{const}$ et puisque avant le tir le système est immobile ($Q_0 = 0$), on aura pour n'importe quel moment $Q_x = 0$.

Désignons la vitesse de recul à l'instant final par v. Alors, la vitesse absolue de l'obus à ce moment est égale à $u + v$. Par conséquent,

$$Q_x = \frac{P}{g} v_x + \frac{p}{g}(u_x + v_x) = 0. \qquad \text{(a)}$$

De là nous trouvons:

$$v_x = -\frac{p}{p+P} u_x.$$

Si la vitesse absolue de l'obus à la sortie du tube u_a était connue, dans l'égalité (a) au lieu de $u_x + v_x$ entrerait directement la grandeur u_{ax}, d'où

$$v_x = -\frac{p}{P} u_{ax}.$$

Le signe moins indique que dans les deux cas le sens de v est opposé à celui de u.

Soulignons que pendant le calcul de la quantité de mouvement globale du système il faut tenir compte des vitesses absolues du mouvement de ses parties.

Problème 129. Pression d'un jet d'écoulement. Un jet d'eau jaillissant d'une pompe à incendie avec la vitesse $u = 10$ m/s vient heurter à angle droit un mur (fig. 308). Le diamètre du jet d'eau est $d = 4$ cm. Négligeant le resserrement du jet, déterminer la force de pression qu'il exercera sur le mur.

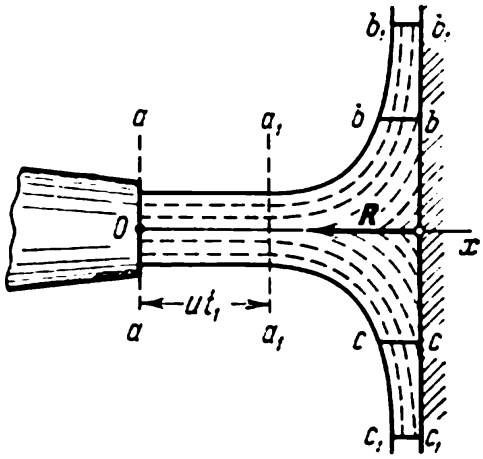


Fig. 308

Solution. Pour exclure de l'examen les forces intérieures de pression mutuelles des particules du liquide au moment de leur contact avec le mur, appliquons la première des équations (23)

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S^e_{kx} \qquad \text{(a)}$$

à la portion du jet se trouvant à l'instant donné à l'intérieur du volume abc. Calculons pour le volume choisi la différence $Q_{1x} - Q_{0x}$ correspondant à un certain intervalle de temps t_1. Pendant le temps t_1 ce volume se déplace et vient occuper la position $a_1b_1c_1$. La valeur de Q_x diminue alors de la grandeur mu, où m est la masse du volume aa_1. Le liquide qui afflue dans les volumes bb_1 et cc_1 se déplace alors perpendiculairement à l'axe Ox et n'augmente pas la grandeur Q_x. Comme nous n'avons qu'une diminution de Q_x,

$$Q_{1x} - Q_{0x} = -mu.$$

La force extérieure, agissant sur le volume délimité plus haut et donnant une projection sur l'axe x, ne peut être que la réaction du mur $\boldsymbol{R}$. Admettant que la grandeur R est constante, on obtient:

$$\sum S^e_{kx} = R_x t_1 = -Rt_1.$$

En définitive, l'équation (a) donne:

$$mu = Rt_1. \qquad \text{(b)}$$

Calculons la grandeur m. Puisque le déplacement $aa_1 = ut_1$,

$$m = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi d^2}{4} ut_1,$$

où γ est le poids de l'unité de volume et, par conséquent, $\frac{\gamma}{g}$ est la masse de l'unité de volume du liquide. Portant cette valeur dans l'égalité (b) et tenant compte du fait que pour l'eau $\gamma = 1000$ kgf/m^3, nous trouvons en définitive:

$$R = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi d^2}{4} u^2 = 12{,}8 \text{ kgf}.$$

La force de pression du jet contre le mur est égale à cette même grandeur.

§ 142. Corps de masse variable. Mouvement d'une fusée. En mécanique classique la masse de chaque point ou particule d'un système est estimée constante au cours du mouvement. Néanmoins, dans certains cas la composition de particules du système ou du corps donné peut varier par rapport au temps (certaines particules peuvent se détacher du corps ou s'ajouter à lui de l'extérieur) ; en conséquence, la masse globale du corps considéré variera. Nous avons déjà examiné les problèmes présentant de semblables adjonction ou séparation de masses unitaires (voir ci-dessus les problèmes 127, 128 ou bien le problème 94 au § 103). Dans ce paragraphe nous

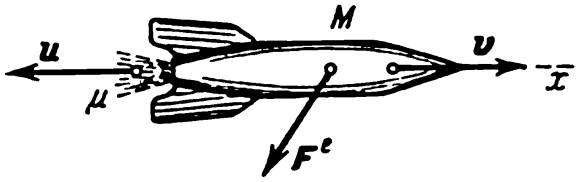


Fig. 309

étudierons un autre cas d'une grande importance pratique, quand le processus de séparation ou d'adjonction des particules s'effectue d'une façon continue. Un corps dont la masse M est en variation continuelle en fonction du temps du fait de l'adjonction ou de la séparation de particules matérielles est appelé *corps de masse variable* [1]. Pour un corps de masse variable

$$M = F(t),$$

où $F(t)$ est une fonction continue du temps.

Comme exemples de tels corps on peut citer la fusée ou l'avion à réaction dont la masse diminue pratiquement sans interruption du fait de la consommation de carburant.

Si pendant le mouvement d'un corps de masse variable on peut négliger ses dimensions par rapport aux distances parcourues, ce corps peut être considéré comme un point matériel de masse variable.

Trouvons l'équation du mouvement d'une fusée dont la masse diminue continuellement en l'assimilant au sens indiqué ci-dessus à un point matériel de masse variable. Désignons la vitesse relative (par rapport au cours de la fusée) d'écoulement des produits de combustion par u. Pour exclure les forces de pression expulsant les produits de combustion, nous les supposerons intérieures, en considérant à un certain instant t le système composé de la fusée elle-même et de la particule qui s'en détache pendant l'intervalle de temps dt (fig. 309). La masse μ de cette particule est numériquement égale

[1] La variation de masse a ici un sens tout à fait différent de celui qu'elle reçoit en mécanique relativiste, elle est la conséquence de la modification du nombre de particules constituant le corps étudié.

à la grandeur dM dont la masse de la fusée a varié pendant dt. Puisque M est une grandeur décroissante, $dM < 0$ et, par conséquent, $\mu = |dM| = -dM$.

Pour le système considéré, on peut écrire l'équation (20) sous la forme

$$dQ = F^e dt, \tag{24}$$

où F^e est la somme géométrique des forces extérieures appliquées à la fusée.

Si la vitesse v de la fusée varie pendant l'intervalle de temps dt de la grandeur dv, la quantité de mouvement du système considéré reçoit alors un accroissement $M\,dv$. La particule qui se sépare de la fusée acquiert pendant ce temps une vitesse supplémentaire u (par rapport à celle qu'elle avait auparavant), ce qui fait que la quantité de mouvement du système se trouve accrue de la grandeur $u\mu = -u\,dM$. Donc, $dQ = M\,dv - u\,dM$. Portant cette valeur dans l'égalité (24) et divisant les deux membres de cette égalité par dt, nous obtenons:

$$M\frac{dv}{dt} = F^e + u\frac{dM}{dt}. \tag{25}$$

L'équation (25) constitue la forme vectorielle de *l'équation différentielle du mouvement d'un point de masse variable, appelée également l'équation de Mechtcherski* [1].

En tenant compte du fait que le dernier terme du membre droit de (25) est une force, et en le désignant par Φ, nous pouvons encore écrire l'équation (25) sous la forme

$$M\frac{dv}{dt} = F^e + \Phi. \tag{26}$$

Ainsi, l'effet de réaction se traduit pendant le mouvement de la fusée par l'apparition d'une force supplémentaire Φ appelée *force de réaction.*

La grandeur $\frac{dM}{dt}$ est numériquement égale à la masse de carburant dépensé au cours de l'unité de temps, c'est-à-dire à la dépense de carburant G_s durant une seconde.

De cette façon, si l'on tient compte du signe, on a

$$\frac{dM}{dt} = -G_s.$$

D'où il résulte que

$$\Phi = -uG_s, \tag{27}$$

[1] I. Mechtcherski (1859-1935), mathématicien russe. L'équation (25) est donnée dans l'ouvrage de 1897. Voir I. Mechtcherski *Travaux sur la mécanique des corps de masse variable*, 2e éd., « Gostekhizdat », 1952.

c'est-à-dire que *la force de réaction est égale au produit de la masse de carburant dépensé en une seconde par la vitesse relative d'écoulement des produits de combustion et est dirigée dans le sens opposé à cette vitesse.*

Remarque. Les résultats obtenus seraient rigoureusement exacts si les particules éjectées n'exerçaient pas d'action l'une sur l'autre (par exemple, si elles n'étaient que de petits grains rejetés les uns après les autres).

En réalité, dans une fusée les produits de combustion sont éjectés sous forme d'un flux continu de gaz dont les particules exercent les unes sur les autres une pression mutuelle. C'est pourquoi, au cours d'un vol dans l'atmosphère, deux forces supplémentaires agiront sur la fusée : l'une égale à $p_g\sigma$ et dirigée dans le sens du mouvement, l'autre égale à $p_a\sigma$ et dirigée dans le sens contraire du mouvement (σ désignant la surface de la section d'échappement de la tuyère du moteur : p_g, la pression du gaz dans cette section et p_a, la pression atmosphérique). Puisque $p_g > p_a$, la force de la réaction sera supérieure à celle qui est donnée par formule (27) de la grandeur $(p_g - p_a)\sigma$ (au cours du vol dans le vide $p_a = 0$). On tient compte de cette circonstance en introduisant à la place de u une certaine vitesse effective u_e supérieure à u (par exemple, si $u = 1\,900$ m/s, $u_e = 2\,200$ m/s).

Etablissons comment s'effectue le mouvement d'une fusée soumise à la seule force de réaction, en admettant que $F^e = 0$ et que la vitesse d'écoulement u est constante. Dirigeons l'axe des coordonnées x dans le sens du mouvement (voir fig. 309). Alors $v_x = v$, $u_x = -u$ et l'équation (25) en projections sur l'axe x deviendra si l'on y pose $F^e = 0$

$$M\frac{dv}{dt} = -u\frac{dM}{dt} \quad \text{ou} \quad dv = -u\frac{dM}{M}.$$

En intégrant cette équation et en admettant qu'au moment initial la masse $M = M_0$ et la vitesse $v = v_0$ et est dirigée suivant l'axe Ox, nous obtenons;

$$v = v_0 + u \operatorname{Log}\frac{M_0}{M}. \tag{28}$$

Désignons la masse globale du corps de la fusée et de son appareillage par M_f et la masse totale du carburant par M_c. Alors, il est évident que $M_0 = M_f + M_c$ et que la masse de la fusée, lorsque tout le carburant sera dépensé, sera égale à M_f. En portant ces valeurs dans l'égalité (28), nous obtenons la *formule de Tsiolkovski* [1] qui donne la vitesse de la fusée lorsque tout le carburant sera dépensé (la vitesse à la fin de la partie de la *trajectoire* dite *active*) :

$$v_1 = v_0 + u \operatorname{Log}\left(1 + \frac{M_c}{M_f}\right). \tag{29}$$

Ce résultat est rigoureusement vrai dans le vide et en l'absence d'un champ de forces. La formule (29) montre que la vitesse limite de

[1] C. Tsiolkovski (1857-1935), grand savant et inventeur russe. L'ouvrage dans lequel est donnée la formule (29) a été publié en mai 1903 dans la « Revue scientifique ».

la fusée dépend : 1) de sa vitesse initiale v_0 ; 2) de la vitesse relative d'écoulement (d'échappement) des produits de combustion u; 3) de la réserve relative de carburant M_c/M_f (nombre de Tsiolkovski). Il est très intéressant de noter que la vitesse de la fusée à la fin de la période de la combustion ne dépend pas du régime de travail du moteur de la fusée, c'est-à-dire de la vitesse plus ou moins rapide de la combustion du carburant. Pour donner une idée de la relation qui existe entre v_1/u et M_c/M_f (si $v_0 = 0$) on a formé le tableau 1.

Tableau 1

M_c/M_f	v_1/u	M_c/M_f	v_1/u
1	0,69	5	1,79
2	1,10	10	2,40
3	1,39	20	3,00
4	1,61		

Le grand intérêt pratique de la formule de Tsiolkovski réside dans le fait qu'elle indique les différents moyens d'obtenir les grandes vitesses nécessaires aux vols dans l'espace interplanétaire. Ces moyens consistent dans l'augmentation de M_c/M_f, u et v_0; de plus, l'augmentation de u et v_0 donne des résultats plus efficaces. L'augmentation de u et M_c/M_f est liée au type de carburant et à la construction de la fusée (pour les grandes fisées utilisant un carburant liquide $M_c/M_f = 3 \div 4$, $u = 2\,000 \div 2\,500$ m/s). L'augmentation de v_0 est possible grâce à l'utilisation d'une fusée composée (à plusieurs étages) dont les parties (les étages) sont larguées automatiquement au fur et à mesure que le carburant qu'elles contiennent est dépensé, de sorte que le dernier étage reçoit ainsi une vitesse (initiale) supplémentaire.

C'est une de ces fusées à plusieurs étages qui a été utilisée pour le lancement en U.R.S.S. des premiers au monde satellites artificiels de la Terre (4 octobre et 3 novembre 1957), ainsi que des premiers au monde vaisseaux cosmiques avec à bord Gagarine et Titov.

Chapitre XXVI

THÉORÈME DE LA VARIATION DU MOMENT CINÉTIQUE D'UN SYSTÈME

§ 143. Moment cinétique résultant d'un système. La notion de moment cinétique pour un point matériel a été introduite au § 116. *On appelle moment cinétique (ou moment angulaire) résultant d'un système par rapport à un centre donné O la grandeur* $\boldsymbol{K}_O$ *égale à la somme géométrique des moments cinétiques de tous les points du système par rapport à ce centre* [1] :

$$\boldsymbol{K}_O = \sum \boldsymbol{m}_O (m_k \boldsymbol{v}_k). \qquad (30)$$

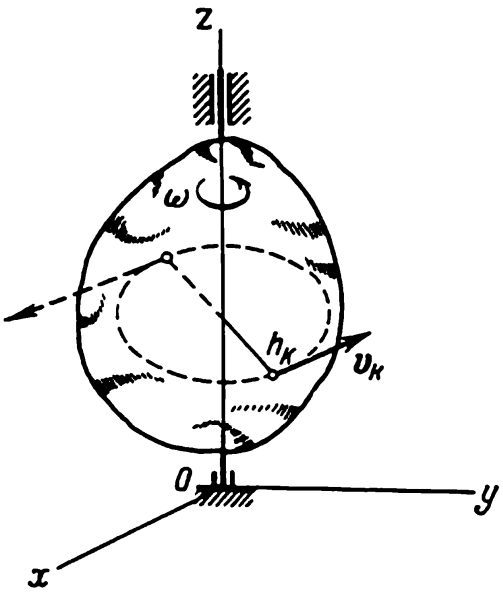


Fig. 310

On définit d'une manière analogue les moments angulaires d'un système par rapport aux axes de coordonnées :

$$K_x = \sum m_x (m_k \boldsymbol{v}_k),$$
$$K_y = \sum m_y (m_k \boldsymbol{v}_k),$$
$$K_z = \sum m_z (m_k \boldsymbol{v}_k). \qquad (31)$$

Dans ce cas, en vertu du théorème démontré au § 43, K_x, K_y, K_z sont en même temps les projections du vecteur $\boldsymbol{K}_O$ sur les axes de coordonnées.

Pour expliciter la signification mécanique de la grandeur $\boldsymbol{K}_O$, calculons le moment angulaire d'un corps en rotation par rapport à son axe de rotation. Si le corps tourne autour d'un axe fixe Oz (fig. 310), pour tout point de ce corps situé à la distance h_k de l'axe la vitesse $v_k = \omega h_k$. Donc, pour ce point $m_z (m_k \boldsymbol{v}_k) = m_k v_k h_k = m_k \omega h_k^2$. Alors, pour tout le corps, en mettant ω en facteur, nous obtenons :

$$K_z = \sum m_z (m_k \boldsymbol{v}_k) = \left(\sum m_k h_k^2\right) \omega.$$

La grandeur qui figure entre parenthèses est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe z (§ 131). En définitive, nous trouvons

$$K_z = J_z \omega. \qquad (32)$$

[1] Souvent, pour simplifier, nous appellerons la grandeur $\boldsymbol{K}_O$ simplement moment angulaire du système.

Ainsi, *le moment angulaire d'un corps en rotation par rapport à l'axe de rotation est égal au produit du moment d'inertie du corps par rapport à cet axe par sa vitesse angulaire.*

Dans le cas général d'un corps en rotation le vecteur $\boldsymbol{K}_O$ n'est pas numériquement égal à K_z et n'est pas dirigé suivant l'axe Oz car $\boldsymbol{K}_O$ possède en outre des composantes non nulles $\boldsymbol{K}_x$ et $\boldsymbol{K}_y$. Néanmoins, si l'axe de rotation est un axe de symétrie du corps, les points symétriquement disposés (voir fig. 310) auront des quantités de mouvement égales en module et de sens opposés et les sommes des moments angulaires par rapport aux axes x et y s'annuleront ($K_x = K_y = 0$). Par conséquent, dans ce cas le vecteur $\boldsymbol{K}_O$ sera dirigé suivant l'axe de rotation et numériquement égal à K_z, c'est-à-dire à $J_z\omega$.

Si le système est composé de plusieurs corps tournant autour d'un même axe, on aura évidemment

$$K_z = J_{1z}\omega_1 + J_{2z}\omega_2 + \ldots + J_{nz}\omega_n. \qquad (32')$$

On remarque aisément l'analogie entre les formules (19) et (32): la quantité de mouvement est égale au produit de la masse (grandeur qui caractérise l'inertie d'un corps au cours d'un mouvement de translation) par la vitesse; le moment angulaire est égal au produit du moment d'inertie (grandeur qui caractérise l'inertie d'un corps au cours d'un mouvement de rotation) par la vitesse angulaire.

De même que la quantité de mouvement d'un système est la caractéristique de son mouvement de translation (voir § 138), *le moment angulaire résultant d'un système est la caractéristique du mouvement de rotation du système.*

§ 144. Théorème de la variation du moment angulaire résultant d'un système (théorème des moments). Le théorème des moments démontré pour un point matériel (§ 116) sera vérifié également pour chaque point d'un système. Par conséquent, si l'on considère le point du système de masse m_k animé de la vitesse $\boldsymbol{v}_k$ on aura pour ce point

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{m}_O(m_k\boldsymbol{v}_k)] = \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_k^e) + \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_k^i),$$

où $\boldsymbol{F}_k^e$ et $\boldsymbol{F}_k^i$ sont les résultantes de toutes les forces extérieures et intérieures qui agissent sur le point donné.

Formant ces équations pour tous les points du système et les additionnant membre à membre, nous obtenons:

$$\frac{d}{dt}[\sum \boldsymbol{m}_O(m_k\boldsymbol{v}_k)] = \sum \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_k^e) + \sum \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_k^i).$$

Mais la dernière somme est égale à zéro d'après la propriété des forces intérieures d'un système (§ 129). Alors, en tenant compte de

l'égalité (30), nous trouvons en définitive:

$$\frac{dK_O}{dt} = \sum m_O(F_k^e). \tag{33}$$

L'équation obtenue exprime le théorème des moments pour un système. Ce théorème s'énonce comme suit: *la dérivée par rapport au temps du moment angulaire résultant d'un système par rapport à un centre immobile est égale à la somme des moments de toutes les forces extérieures du système par rapport à ce même centre.*

Projetant les deux membres de l'égalité (33) sur les axes immobiles *Oxyz* et tenant compte du théorème démontré au § 43, nous obtenons:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum m_x(F_k^e), \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum m_y(F_k^e), \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(F_k^e). \tag{34}$$

Les équations (34) expriment le théorème des moments par rapport à un axe immobile quelconque.

Il est important de remarquer (nous omettons la démonstration de cette assertion) que *les équations* (33) et (34) *seront également vérifiées par rapport à un système d'axes de coordonnées mobiles, mais dans le cas seulement où ces axes auront leur origine au centre d'inertie du système et seront animés de même que le centre d'inertie d'un mouvement de translation.*

On utilise fréquemment ce théorème lorsqu'on étudie le mouvement de rotation d'un corps autour d'un axe fixe, ainsi que les effets gyroscopiques et ceux du choc. Mais l'importance de ce théorème ne se limite pas à ces applications. Il a été démontré en cinématique que le mouvement d'un solide se compose dans le cas général d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation autour d'un certain pôle. Si on choisit le centre d'inertie pour pôle, le mouvement de translation du corps peut être étudié à l'aide du théorème du mouvement du centre d'inertie, et le mouvement de rotation, à l'aide du théorème des moments. D'où l'importance du théorème pour l'étude du mouvement d'un corps libre (avion en vol, obus, fusée) et, en particulier, pour l'étude du mouvement plan (§ 156).

L'intérêt pratique du théorème des moments réside en outre, de même que du théorème de la variation de la quantité de mouvement, dans la possibilité d'exclure pendant l'étude du mouvement de rotation d'un système toutes les forces intérieures a priori inconnues.

§ 145. Principe de la conservation du moment angulaire résultant. On peut obtenir du théorème démontré les importantes conséquences suivantes:

1) Admettons que la somme des moments par rapport au centre O de toutes les forces extérieures qui agissent sur le système soit égale à zéro :

$$\sum m_O(F_k^e) = 0.$$

Alors, il résulte de l'équation (33) que K_O = const. Ainsi, *si la somme des moments par rapport à un centre donné de toutes les forces extérieures appliquées au système est égale à zéro, le moment angulaire résultant du système par rapport à ce centre sera constant en module et en direction.* Une application de ce résultat au cas du mouvement d'une planète a déjà été étudiée au § 116.

2) Admettons que les forces extérieures qui agissent sur un système soient telles que la somme de leurs moments par rapport à un certain axe fixe Oz soit nulle :

$$\sum m_z(F_k^e) = 0.$$

Alors il résulte des équations (34) que K_z = const. Ainsi, *si la somme des moments par rapport à un axe quelconque de toutes les forces extérieures qui agissent sur un système est égale à zéro, le moment angulaire résultant du système par rapport à cet axe sera une grandeur constante.*

Ces résultats sont l'expression du *principe de la conservation du moment angulaire résultant d'un système.* Il en résulte que les forces intérieures ne peuvent modifier le moment angulaire résultant d'un système.

Cas d'un système en rotation. Considérons un système en mouvement autour d'un axe Oz fixe (ou passant par le centre d'inertie). Alors, d'après la formule (32), $K_z = J_z\,\omega$. Si dans ce cas $\sum m_z(F_k^e) = 0$, on aura

$$J_z\omega = \text{const}.$$

D'où on tire les conclusions suivantes.

a) Si le système est *indéformable* (corps absolument dur), J_z = = const, et, par conséquent, ω = const., autrement dit, le solide lié à l'axe tourne dans ce cas à une vitesse angulaire constante.

b) Si le système *se déforme* lorsqu'on lui applique des forces intérieures (ou extérieures), certains de ses points peuvent s'éloigner de l'axe, ce qui aboutit à un accroissement de J_z, ou se rapprocher de l'axe, ce qui provoque une diminution de J_z. Comme $J_z\omega$ reste constant, lorsque le moment d'inertie augmente la vitesse angulaire du système diminue, et lorsque le moment d'inertie diminue la vitesse angulaire augmente. Ainsi, l'action des forces intérieures peut modifier la vitesse angulaire de rotation du système, car si K_z est constant cela ne signifie pas, en général, que ω est aussi constant.

Examinons certains exemples.

a) Expériences avec la plate-forme de Joukovski. Pour la démonstration de la loi de la conservation du moment angulaire il est commode de se servir d'un dispositif simple appelé « plate-forme de Joukovski ». C'est une plate-forme horizontale de forme circulaire reposant sur un système de roulements à billes qui lui permet de pivoter avec un faible frottement autour d'un axe vertical z. Pour une personne se tenant sur une telle plate-forme $\Sigma m_z (F_k^e) = 0$ et, par conséquent, $J_z\omega = \text{const}$. Si la personne, en écartant les bras, se communique dans un élan un mouvement de rotation autour de l'axe vertical puis abaisse les bras, la grandeur J_z diminuera tandis que la vitesse angulaire de rotation augmentera. C'est un procédé d'accroissement de la vitesse angulaire de rotation qui est largement utilisé par les danseurs (fouettés), les acrobates (saut périlleux), etc.

De même, une personne se tenant immobile sur la plate-forme ($K_z = 0$) peut tourner dans n'importe quel sens en faisant dans le sens opposé des ré olutions avec son bras tendu horizontalement. La vitesse angulaire de rotation de la personne sera alors telle que la grandeur K_z reste nulle pour le système en entier.

b) Mouvement d'une balançoire. Une personne se tenant sur une balançoire ne peut mettre cette dernière en mouvement par la seule pression de ses jambes (force intérieure). Elle peut le faire de la façon suivante. Lorsque la balançoire se trouve dans la position supérieure gauche A_0 la personne s'accroupit. Puis en passant par la verticale elle se redresse rapidement. Alors les masses se rapprochent de l'axe de rotation z, la grandeur J_z diminue et la vitesse angulaire ω augmente brusquement. Cet accroissement de ω conduit, en fin de compte, à ce que la balançoire montera plus haut que le niveau initial A_0. Dans la position supérieure droite, lorsque $\omega = 0$, la personne s'accroupit de nouveau (ce qui, évidemment, ne produit aucune influence sur la grandeur ω) ; en passant par la verticale, elle se redresse de nouveau, etc. Au résultat, l'amplitude des oscillations de la balançoire augmentera.

Ces oscillations forcées de la balançoire sont dites *paramétriques* car elles ne s'accomplissent pas sous l'action d'une force qui varie périodiquement (§ 126), mais du fait d'une variation périodique des paramètres du système (le moment d'inertie et la position du centre de gravité).

c) Rotation d'un obus dans l'âme d'un canon. Si l'on considère le canon et l'obus comme un seul système, les forces de pression des gaz émis par la poudre pendant le coup de feu seront des forces intérieures ; elles ne peuvent pas modifier la grandeur du moment angulaire du système qui au départ était égal à zéro. Par conséquent, si au cours du tir l'obus, grâce à la présence de rainures, commence à tourner, par exemple, vers la droite, tout

le canon aura alors tendance à tourner vers la gauche de telle manière qu'à chaque instant on ait $J_{ob}\omega_{ob}=J_{can}\omega_{can}$. Cet effet rotationnel est contrecarré par les tourillons qui calent le canon sur son affût. Au résultat, il apparaît sur les tourillons une pression supplémentaire.

d) Moment de réaction d'une hélice. Si l'on considère l'hélicoptère (avec le moteur) et son hélice comme un système mécanique unique, on devra admettre que les forces d'interaction entre le moteur et l'hélice sont des forces intérieures et pour cette raison ne peuvent pas modifier le moment angulaire global du système qui était nul avant le lancement du moteur. Une fois le moteur en marche, l'hélicoptère commence à tourner dans le sens contraire de la rotation de l'hélice. Le moment de rotation qui agit alors sur l'hélicoptère s'appelle *moment de réaction*.

Pour contrecarrer la rotation de réaction du corps d'un hélicoptère muni d'un seul rotor, on fixe à sa queue une hélice de gouvernail appropriée. Dans le cas d'un hélicoptère à plusieurs rotors, on fait tourner ces derniers dans des sens opposés.

L'apparition du moment de réaction peut être utilisée pour la détermination expérimentale du moment de rotation d'un moteur d'avion, car ces moments sont égaux en modules, quant au moment de réaction, il peut être mesuré en plaçant le moteur avec l'hélice en rotation sur une balance appropriée.

§ 146. Résolution des problèmes. On utilise le théorème des moments pour l'étude du mouvement de rotation des corps (§ 153) ou pour l'étude du mouvement des systèmes qui comportent des corps en rotation et des corps effectuant un mouvement de translation (problème 133).

Le principe de la conservation du moment angulaire permet, connaissant la grandeur ou la vitesse de déplacement d'une partie du système, de déterminer la variation de la vitesse angulaire (ou bien l'angle de rotation) de l'autre partie de ce système. Dans ce cas toutes les forces intérieures a priori inconnues sont exclues de l'examen ainsi que les forces extérieures qui coupent l'axe de rotation ou qui lui sont parallèles.

Problème 130. Deux disques sont montés sur un arbre commun (fig. 311). A un certain moment on fait subir à l'arbre une légère torsion, puis on l'abandonne à lui-même. En négligeant la masse de l'arbre, trouver la relation qui existe entre les vitesses angulaires et les angles de torsion des disques au cours de leurs oscillations de torsion si les moments d'inertie des disques J_1 et J_2 sont connus.

Solution. Pour exclure les forces élastiques qui nous sont inconnues et qui provoquent les oscillations des disques, nous considérons les deux disques et l'arbre comme un seul système. Les forces extérieures (les réactions des paliers et la force de pesanteur) qui agissent sur ce système coupent l'axe x ; c'est pourquoi $\sum m_x(F_k^e) = 0$ et $K_x = \text{const}$. Mais puisque à l'instant initial $K_x = 0$, pendant toute la durée des oscillations on doit avoir $K_x = J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = 0$

(le moment angulaire du système par rapport à l'axe x est égal à la somme des moments angulaires de chacun des disques par rapport à ce même axe). C'est pourquoi

$$\omega_1 = -\frac{J_2}{J_1}\omega_2 \quad \text{et} \quad \varphi_1 = -\frac{J_2}{J_1}\varphi_2,$$

où φ_1 et φ_2 sont les angles de torsion des disques mesurés à partir de la position initiale (le dernier résultat s'obtient en intégrant la première égalité).

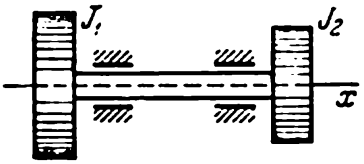


Fig. 311

Ainsi, les oscillations s'effectueront dans des sens opposés et les amplitudes angulaires des oscillations seront inversement proportionnelles aux moments d'inertie des disques. La section immobile sera plus proche du disque dont le moment d'inertie est plus grand.

Problème 131. Dans un régulateur AB qui possède un axe vertical de rotation Oz (la grandeur J_z du régulateur est connue) se trouvent, symétriquement disposés, deux poids de masse égale m fixés à des ressorts (fig. 312). A l'instant $t_0 = 0$

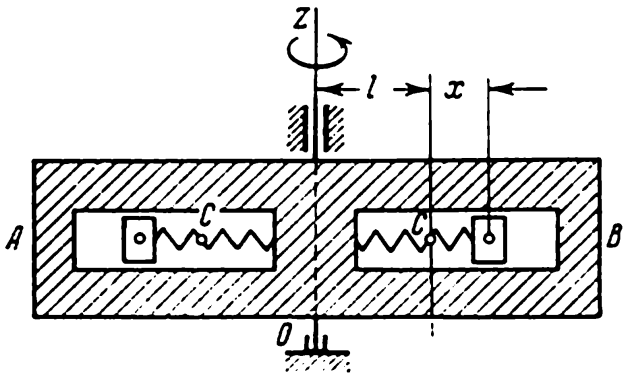


Fig. 312

la vitesse angulaire du régulateur est ω_0 et chacun des poids commence alors à effectuer les mêmes oscillations amorties autour du centre C (la distance entre le centre C et l'axe Oz est égale à l). En négligeant le frottement dans l'axe et en assimilant les poids à des points matériels, trouver comment variera la vitesse angulaire ω du régulateur en fonction des positions des poids.

Solution. Pour exclure les forces élastiques des ressorts qui nous sont inconnues, considérons le régulateur et les poids comme un seul système. Alors $\sum m_z(F_k^e) = 0$ et on doit avoir $K_z = \text{const}$. A l'instant $t_0 = 0$ la distance $x = 0$ et $K_{z0} = (J_z + 2ml^2)\,\omega_0$. A un instant arbitraire t la grandeur $K_z = [J_z + 2m(l + x)^2]\,\omega$. Puisque $K_z = K_{z0}$, on a donc

$$\omega = \frac{J_z + 2ml^2}{J_z + 2m(l+x)^2}\,\omega_0.$$

Par conséquent, quand $x > 0$, la valeur de $\omega < \omega_0$, et quand $x < 0$, $\omega > \omega_0$, c'est-à-dire que la vitesse angulaire ω oscille autour de sa valeur moyenne ω_0. Avec le temps, lorsque les oscillations des poids s'amortissent, x tend vers zéro et ω tend vers ω_0.

Problème 132. Le long du bord d'une plate-forme horizontale de forme circulaire de poids P et de rayon R sont disposés des rails (fig. 313). La plate-forme avec un wagonnet de poids p posé sur les rails est en mouvement autour de l'axe vertical Oz à une vitesse angulaire ω_0. A un certain moment le wagonnet

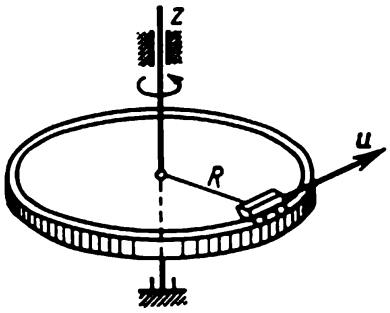


Fig. 313

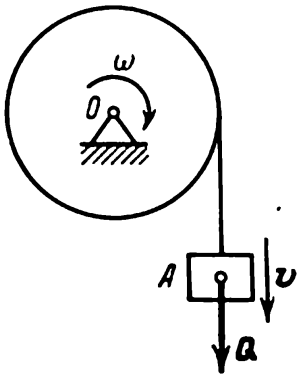


Fig. 314

commence à se déplacer sur les rails avec une vitesse relative (par rapport à la plate-forme) u dans le sens de la rotation de la plate-forme. Comment variera alors la vitesse angulaire de la plate-forme?

Solution. Pour exclure les forces de frottement inconnues entre les roues du wagonnet et la plate-forme, nous considérerons la plate-forme et le wagonnet comme un seul système. Les moments par rapport à l'axe z des forces extérieures qui agissent sur ce système sont égaux à zéro. Donc, $K_z = \text{const}$. Nous admettrons que la plate-forme est un disque circulaire homogène ($J_z = 0{,}5\,MR^2$) et que le wagonnet est un point matériel. Alors

$$K_{z0} = \left(0{,}5\frac{P}{g}R^2 + \frac{p}{g}R^2\right)\omega_0.$$

Lorsque le wagonnet commence à se déplacer, sa vitesse absolue sera égale à $v_a = u + \omega R$, où ω est la nouvelle vitesse angulaire de la plate-forme. Le moment angulaire du wagonnet par rapport à l'axe z est égal à $mv_aR = m(uR + \omega R^2)$ et nous obtiendrons pour tout le système:

$$K_{z1} = 0{,}5\frac{P}{g}R^2\omega + \frac{p}{g}(uR + R^2\omega).$$

Puisque $K_z = \text{const.}$, donc $K_{z1} = K_{z0}$ et nous obtenons:

$$\omega = \omega_0 - \frac{p}{0{,}5P + p}\frac{u}{R}.$$

Nous constatons ainsi que la vitesse angulaire de la plate-forme diminue. Quand le wagonnet se déplacera dans le sens contraire, la valeur de ω augmentera.

Attirons l'attention sur le fait qu'au cours du calcul de la grandeur K_z il faut prendre les *vitesses absolues* de tous les points ou de tous les corps du système en mouvement.

Problème 133. Sur un cylindre de poids P et de rayon r (fig. 314) est enroulé un fil à l'extrémité duquel est fixée une masse A de poids Q. En négligeant la

masse du fil et le frottement sur l'axe, déterminer l'accélération angulaire du cylindre lorsque la masse se déplace verticalement et si le rayon de giration du cylindre par rapport à son axe est égal à ρ_g.

Solution. En appliquant le théorème des moments par rapport à l axe O, nous aurons

$$\frac{dK_O}{dt} = \sum m_O(F_k^e). \tag{a}$$

Le système en mouvement est composé de deux corps. Par conséquent,

$$K_O = K_{cyl} + K_m.$$

Considérons la masse qui effectue un mouvement de translation comme un point matériel. Sa vitesse $v = \omega r$. Le cylindre tourne autour d'un axe fixe. Par conséquent,

$$K_m = \frac{Q}{g} vr = \frac{Q}{g} r^2\omega; \quad K_{cyl} = J_O\omega = \frac{P}{g}\rho_g^2\omega$$

et

$$K_O = (Qr^2 + P\rho_g^2)\frac{\omega}{g}.$$

Portant cette valeur de K_O dans l'égalité (a), nous obtenons

$$\frac{Qr^2 + P\rho_g^2}{g}\frac{d\omega}{dt} = Qr.$$

De là

$$\varepsilon = \frac{Qrg}{Qr^2 + P\rho_g^2}.$$

Chapitre XXVII

THÉORÈME DE LA VARIATION DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE D'UN SYSTÈME

§ 147. Energie cinétique d'un système. *On appelle énergie cinétique d'un système la grandeur scalaire T égale à la somme arithmétique des énergies cinétiques de tous les points du système*

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}. \tag{35}$$

L'énergie cinétique est une caractéristique du mouvement de translation et de rotation du système, c'est pourquoi on applique très souvent le théorème de la variation de l'énergie cinétique au cours de la résolution des problèmes. La différence essentielle entre la grandeur T et les caractéristiques $\boldsymbol{Q}$ et $\boldsymbol{K}_O$ introduites auparavant consiste en ce que l'énergie cinétique est une grandeur scalaire qui, de plus, est essentiellement positive. Donc, elle ne dépend pas des directions du mouvement absolu des parties du système et ne caractérise pas les variations de ces directions.

Notons encore le fait important suivant. Les forces intérieures agissent sur les différentes parties du système suivant des directions mutuellement opposées. C'est pour cette raison que, comme nous l'avons vu, elles ne modifient pas les caractéristiques vectorielles $\boldsymbol{Q}$ et $\boldsymbol{K}_O$. Mais si les modules des vitesses des points du système varient sous l'action des forces intérieures, la grandeur T changera aussi. Par conséquent, l'énergie cinétique d'un système diffère également des grandeurs $\boldsymbol{Q}$ et $\boldsymbol{K}_O$ par le fait qu'elle varie sous l'action des forces extérieures et intérieures.

Si le système est composé de plusieurs corps, son énergie cinétique est égale, évidemment, à la somme des énergies cinétiques de ces corps :

$$T = \sum T_k.$$

Trouvons les formules permettant de calculer l'énergie cinétique d'un corps dans le cas de différents mouvements.

1. Mouvement de translation. Dans ce cas tous les points du corps se déplacent avec une vitesse égale à celle du centre d'inertie. Donc, pour tout point $v_k = v_C$ et la formule (35) donne

$$T_{\text{trans}} = \sum \frac{m_k v_C^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum m_k\right) v_C^2$$

ou

$$T_{\text{trans}} = \frac{1}{2} M v_C^2. \tag{36}$$

Ainsi, *l'énergie cinétique d'un corps en mouvement de translation est égale au demi-produit de la masse du corps par le carré de la vitesse du centre d'inertie.* La valeur de T ne dépend pas de la direction du mouvement.

2. Mouvement de rotation. Si un corps est en mouvement autour d'un axe Oz (voir fig. 310), la vitesse d'un point quelconque de ce corps est $v_k = \omega h_k$, où h_k désigne la distance entre le point et l'axe de rotation et ω, la vitesse angulaire du corps. Portant cette valeur dans la formule (35) et mettant en facteur $\frac{1}{2}\omega^2$, nous obtenons:

$$T_{\text{rot}} = \sum \frac{m_k \omega^2 h_k^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum m_k h_k^2\right)\omega^2.$$

La quantité entre parenthèses exprime le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe z. Ainsi, nous trouvons en définitive:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \tag{37}$$

autrement dit, *l'énergie cinétique d'un corps en mouvement de rotation est égale au demi-produit du moment d'inertie de ce corps par rapport à l'axe de rotation par le carré de sa vitesse angulaire.* La valeur de T ne dépend pas du sens de la rotation.

3. Mouvement plan[1]. Durant ce mouvement, les vitesses de tous les points du corps sont à chaque instant réparties de manière que si le corps tournait autour d'un axe perpendiculaire au plan du mouvement et passant par le centre instantané des vitesses P (fig. 315). Par conséquent, d'après la formule (37)

$$T_{\text{plan}} = \frac{1}{2} J_P \omega^2, \tag{37'}$$

où J_P désigne le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe instantané et ω, la vitesse angulaire du corps.

La grandeur J_P figurant dans la formule (37') sera une quantité variable puisque la position du centre P, pendant le mouvement du corps, change constamment. Introduisons à la place de J_P le moment d'inertie constant J_C calculé par rapport à l'axe passant par le centre d'inertie C du corps. Selon le théorème de Huygens (§ 133) $J_P = J_C + Md^2$ où $d = PC$. Portons cette expression de J_P dans (37').

[1] Ce cas peut être considéré comme un cas particulier du cas général du mouvement d'un solide étudié au point suivant.

En tenant compte du fait que le point P est le centre instantané des vitesses et que, par conséquent, $\omega d = \omega \cdot PC = v_C$, où v_C est la vitesse du centre d'inertie C, nous trouvons en définitive:

$$T_{\text{plan}} = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2. \tag{38}$$

Donc, *pendant un mouvement plan l'énergie cinétique d'un corps est égale à la somme de l'énergie du mouvement de translation avec la vitesse du centre d'inertie et de l'énergie cinétique du mouvement autour du centre d'inertie.*

4. Cas général du mouvement. Si l'on prend pour pôle le centre d'inertie C du corps (fig. 316), le mouvement du corps,

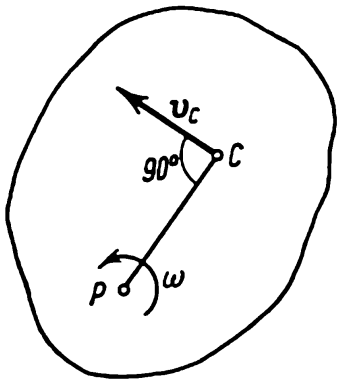


Fig. 315

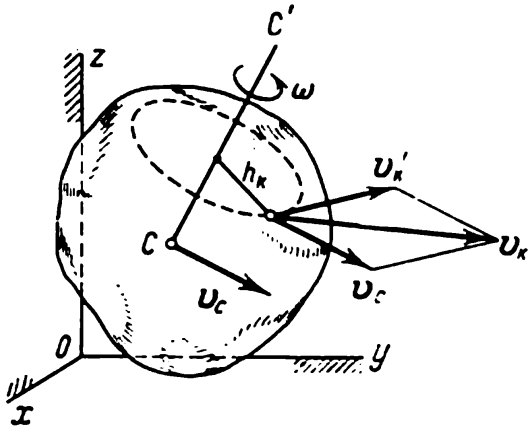


Fig. 316

dans le cas général, se composera d'un mouvement de translation de vitesse du pôle $\boldsymbol{v}_C$ et d'une rotation autour de l'axe instantané CC' passant par ce pôle (voir § 88). Alors, comme il a été démontré en cinématique, la vitesse $\boldsymbol{v}_k$ de tout point du corps sera égale à la somme géométrique de la vitesse du pôle $\boldsymbol{v}_C$ et de la vitesse $\boldsymbol{v}_k'$ que le point acquiert pendant sa rotation avec le corps autour de l'axe CC'

$$\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_k'.$$

De plus, on a $v_k' = \omega h_k$, où h_k désigne la distance entre le point considéré et l'axe CC' et ω, la vitesse angulaire *absolue* de rotation du corps autour de cet axe. Il en résulte que [1]

$$v_k^2 = \boldsymbol{v}_k^2 = (\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_k')^2 = v_C^2 + v_k'^2 + 2\boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{v}_k'.$$

[1] En algèbre vectorielle on définit le produit scalaire de deux vecteurs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ comme le produit de leurs modules par le cosinus de l'angle α qu'ils forment, autrement dit, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = uv \cos \alpha$. Il en résulte que $\boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = vv \cos 0° = v^2$, autrement dit, le carré scalaire d'un vecteur est égal au carré de son module. C'est ce résultat qui est appliqué ici.

Portant cette valeur dans l'égalité (35) et tenant compte de ce que $v'_k = \omega h_k$, nous trouvons :

$$T = \frac{1}{2}\left(\sum m_k\right) v_C^2 + \frac{1}{2}\left(\sum m_k h_k^2\right)\omega^2 + v_C \cdot \sum m_k v'_k,$$

où l'on a mis en facteurs les expressions correspondantes.

Dans l'égalité obtenue la première parenthèse exprime la masse M du corps, et la seconde est égale au moment d'inertie du corps $J_{CC'}$ par rapport à l'axe instantané CC'. La grandeur $\Sigma m_k v'_k = 0$

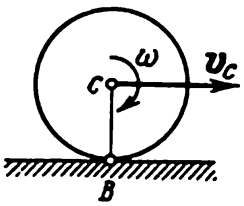


Fig. 317

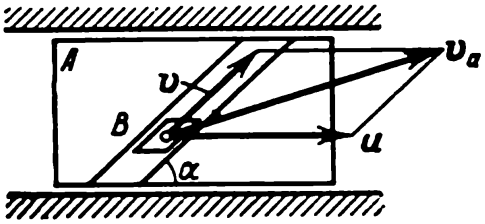


Fig. 318

car elle représente la quantité de mouvement communiquée au corps pendant sa rotation autour de l'axe CC' passant par son centre d'inertie (voir § 138).

Nous obtenons en définitive :

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_{CC'} \omega^2. \qquad (38')$$

Par conséquent, *l'énergie cinétique d'un corps dans le cas général du mouvement* (et en particulier pendant un mouvement plan) *est égale à la somme de l'énergie cinétique du mouvement de translation avec la vitesse du centre d'inertie et de l'énergie cinétique du mouvement autour de l'axe passant par le centre d'inertie.*

Si on prend pour pôle non pas le centre d'inertie mais un autre point quelconque A et que, de plus, l'axe AA' ne passe pas par le centre d'inertie, alors la quantité $\Sigma m_k v' \neq 0$ par rapport à cet axe et nous n'obtiendrons pas la formule du type (38') (voir problème 136).

Notons une fois de plus que dans toutes les formules obtenues figurent les vitesses *absolues* des points ou des corps. Dans les problèmes 135 et 136 on a attiré l'attention sur les fautes typiques qui sont quelquefois commises au cours des calculs.

Problème 134. Calculer l'énergie cinétique d'une roue pleine en forme de cylindre dont la masse est M et qui roule sans glissement si la vitesse de son centre est égale à v_C (fig. 317).

S o l u t i o n. La roue effectue un mouvement plan. D'après la formule (38)

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2.$$

Admettant que la roue est un cylindre plein, homogène, nous aurons (voir § 132) $J_C = 0{,}5\,MR^2$, où R est le rayon de la roue. D'autre part, puisque le point B est, pour la roue, un centre instantané des vitesses, $v_C = \omega \cdot BC = \omega R$, d'où $\omega = \frac{v_C}{R}$.

Substituant ces diverses valeurs, nous trouvons:

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{4} MR^2 \frac{v_C^2}{R^2} = \frac{3}{4} M v_C^2.$$

Problème 135. Une pièce A qui effectue un mouvement de translation à la vitesse u comporte des glissières suivant lesquelles se déplace le corps B de masse M à la vitesse v. Connaissant l'angle α (fig. 318), déterminer l'énergie cinétique du corps B.

S o l u t i o n. Le mouvement absolu du corps B sera un mouvement de translation avec une vitesse $v_a = u + v$ (voir § 94). Alors

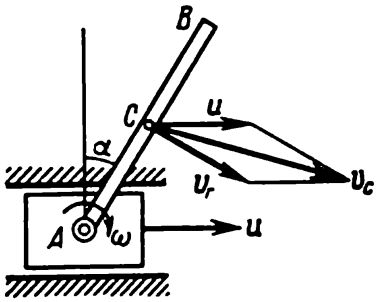
$$T = \frac{1}{2} M v_a^2 = \frac{1}{2} M\,(u^2 + v^2 + 2uv \cos\alpha).$$

Une faute typique généralement commise dans des cas analogues consiste à considérer l'énergie cinétique du corps comme une somme des énergies de mouvements relatif et d'entraînement

$$T = T_r + T_e = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} M u^2.$$

Dans ce cas, comme on le voit, le terme $Muv \cos\alpha$ disparaît.

Ainsi, *si le corps effectue un mouvement complexe, son énergie cinétique totale n'est pas égale, dans le cas général, à la somme des énergies cinétiques de mouvements relatif et d'entraînement.*



F i g. 319

Problème 136. Le mécanisme (fig. 319) est constitué d'une pièce effectuant un mouvement de translation à la vitesse u et d'une tige AB de longueur l et de masse M fixée à cette pièce par l'intermédiaire d'un axe A. La tige est en mouvement autour de l'axe A à la vitesse angulaire ω. Déterminer l'énergie cinétique de la tige pour un angle donné α.

S o l u t i o n. La tige effectue un mouvement composé (mouvement plan). Selon la formule (38)

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2.$$

La vitesse du point C se compose de la vitesse u et de la vitesse v_r, dont le module $v_r = \omega \frac{l}{2}$. Donc (voir fig. 319), $v_C^2 = u^2 + v_r^2 + 2uv_r \cos\alpha$. La vitesse angulaire de rotation de la tige autour du centre C est la même qu'autour de l'extrémité A car ω ne dépend pas du choix du pôle (voir § 77). De plus, on a démontré au problème 122 (§ 133) que $J_C = \frac{1}{12} Ml^2$.

Substituant ces données, nous obtenons:

$$T = \frac{1}{2} M \left(u^2 + \omega^2 \frac{l^2}{4} + u\omega l \cos\alpha\right) + \frac{1}{24} Ml^2\omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} Mu^2 + \frac{1}{6} Ml^2\omega^2 + \frac{1}{2} Ml\omega u \cos\alpha.$$

L'erreur typique que l'on commet parfois en pareil cas consiste à écrire:

$$T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} Mu^2 + \frac{1}{2} J_A \omega^2 = \frac{1}{2} Mu^2 + \frac{1}{6} Ml^2\omega^2.$$

Ceci est faux car, selon le théorème démontré, la formule $T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}}$ n'est vraie que si l'axe de rotation passe par le centre d'inertie du corps, or l'axe A ne passe pas par ce centre.

§ 148. Théorème de la variation de l'énergie cinétique d'un système. Le théorème démontré au § 114 est vérifié pour tous points d'un système. Donc, si l'on considère dans un système un point arbitraire de masse m_k animé d'une vitesse v_k, on aura pour ce point

$$\frac{m_k v_{k1}^2}{2} - \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = A_k^e + A_k^i,$$

où v_{k0} et v_{k1} désignent respectivement la vitesse du point au début et à la fin du déplacement considéré et A_k^e et A_k^i, les sommes des travaux effectués pendant ce déplacement par toutes les forces extérieures et toutes les forces intérieures appliquées au point.

Formant ces équations pour chaque point du système et en les additionnant membre à membre, nous obtenons:

$$\sum \frac{m_k v_{k1}^2}{2} - \sum \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = \sum A_k^e + \sum A_k^i$$

ou

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i, \tag{39}$$

où T_0 et T_1 désignent respectivement l'énergie cinétique du système au début et à la fin du déplacement.

L'équation obtenue est l'expression du *théorème de la variation de l'énergie cinétique* que l'on formule comme suit: *la variation de l'énergie cinétique d'un système pendant son déplacement est égale à la somme des travaux le long de ce déplacement de toutes les forces extérieures et intérieures appliquées au système.*

Pour un déplacement infiniment petit du système le théorème devient:

$$dT = dA^e + dA^i, \tag{40}$$

où dA^e et dA^i désignent respectivement les travaux élémentaires de toutes les forces extérieures et intérieures appliquées au système.

A la différence des théorèmes précédents, les forces intérieures entrant dans la composition des équations (39) ou (40) ne sont pas exclues. En effet, si F_{12}^i et F_{21}^i sont les forces d'action mutuelle entre les points B_1 et B_2 du système (voir fig. 320), $F_{12}^i + F_{21}^i = 0$. Mais, en même temps, le point B_1 peut se déplacer dans la direction de B_2 et le point B_2 dans la direction de B_1. Le travail de chaque force

sera alors positif et la somme des travaux ne sera pas nulle. Comme exemple on peut citer l'effet de recul (problème 128, fig. 307). Les forces intérieures (les forces de pression) qui agissent sur l'obus et sur les pièces du canon qui subissent l'effet de recul effectuent ici un travail positif. La somme, non nulle, de ces travaux modifie précisément l'énergie cinétique du système et passe de la grandeur $T_0 = 0$ au début du coup de feu jusqu'à la grandeur $T_1 = T_{\text{obus}} + T_{\text{recul}}$ obtenue à la fin.

Cas d'un système indéformable. Nous appellerons *indéformable* un système dans lequel les distances entre les

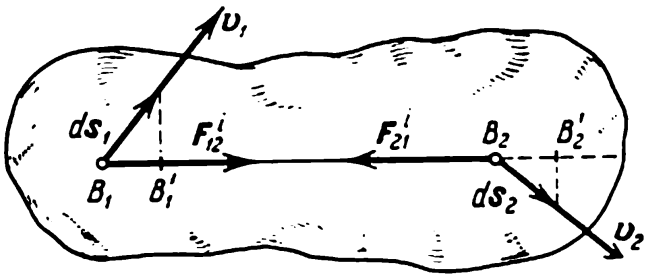


Fig. 320

points d'application des forces intérieures ne varient pas pendant le mouvement du système. En particulier, un corps absolument rigide ou un fil inextensible constituent de tels systèmes.

Supposons que deux points B_1 et B_2 d'un système indéformable (fig. 320) agissant l'un sur l'autre avec les forces F_{12}^i et F_{21}^i ($F_{21}^i = -F_{12}^i$) aient à un moment donné les vitesses v_1 et v_2. Alors, pendant l'intervalle de temps dt ces points effectueront des déplacements élémentaires $ds_1 = v_1 dt$ et $ds_2 = v_2 dt$ dirigés suivant les vecteurs v_1 et v_2. Mais puisque le segment de droite B_1B_2 est indéformable, selon le théorème de cinématique connu les projections des vecteurs v_1 et v_2 et, par conséquent, des déplacements ds_1 et ds_2 sur la direction du segment B_1B_2 seront égales entre elles, c'est-à-dire $B_1B_1' = B_2B_2'$. Alors, les travaux élémentaires des forces F_{12}^i et F_{21}^i seront égaux en modules et de signes opposés et leur somme sera nulle. Ce résultat est vrai pour toutes les forces intérieures quel que soit le déplacement du système.

De là nous concluons que *pour tout système indéformable la somme des travaux de toutes les forces intérieures est égale à zéro* et l'équation (39) devient

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e. \tag{41}$$

Dans les équations (39) — (41) les forces extérieures et intérieures contiennent aussi bien des forces actives que des forces de réaction

des liaisons. Si les surfaces sur lesquelles glissent les corps du système sont lisses, alors, comme il a été montré au § 114, le travail des forces des réactions de telles liaisons, quel que soit le déplacement du système, sera égal à zéro et ces réactions n'entreront pas dans les équations (39) — (41).

Aussi donc, lorsqu'on applique le théorème de la variation de l'énergie cinétique à des systèmes sans frottement, toutes les réactions des liaisons a priori inconnues sont exclues des équations. D'où l'intérêt pratique du théorème.

Remarquons que tous les théorèmes précédents permettaient d'exclure des équations du mouvement les forces intérieures, mais toutes les forces extérieures, y compris les réactions a priori inconnues des liaisons extérieures, étaient conservées dans les équations.

§ 149. Quelques exemples de calcul du travail. Le travail des forces se calcule par les formules obtenues aux §§ 112, 113. Examinons en plus les cas suivants.

1) Travail des forces de pesanteur agissant sur un système. Le travail de la force de pesanteur qui agit sur une particule de poids p_k sera égal à $p_k(z_{k0} - z_{k1})$, où z_{k0} et z_{k1} sont les coordonnées qui définissent la position initiale et finale de la particule (voir § 113). Alors, la somme des travaux de toutes les forces de pesanteur qui agissent sur le système, d'après les formules (74) du § 53, sera égale à

$$A = \sum p_k z_{k0} - \sum p_k z_{k1} = P(z_{C_0} - z_{C_1}) = \pm P h_C,$$

où P est le poids du système; h_C, le déplacement vertical du centre de gravité (ou du centre d'inertie). Par conséquent, *le travail des forces de pesanteur qui agissent sur un système se calcule comme le travail de leur résultante P sur le déplacement du centre de gravité (ou du centre d'inertie) du système.*

2) Travail des forces appliquées à un corps en rotation. Le travail élémentaire de la force F appliquée au corps (fig. 321) sera égal à (voir § 112)

$$dA = F_\tau\, ds = F_\tau h\, d\varphi,$$

car $ds = h\, d\varphi$, où $d\varphi$ est l'angle de rotation du corps.

Mais, comme il est facile de le voir, $F_\tau h = m_z(F)$. Nous appellerons la grandeur $M_z = m_z(F)$ *moment de rotation.* Nous obtenons alors:

$$dA = M_z\, d\varphi. \tag{42}$$

Par conséquent, dans le cas considéré, *le travail élémentaire est égal au produit du moment de rotation par l'angle élémentaire de rotation.* La formule (42) est vérifiée également dans le cas où agissent plusieurs forces à condition d'admettre que $M_z = \Sigma m_z(F_k)$.

Pendant la rotation d'un angle fini φ_1, le travail sera égal à

$$A = \int_0^{\varphi_1} M_z \, d\varphi, \tag{43}$$

et dans le cas d'un moment constant (M_z = const.)

$$A = M_z \varphi_1. \tag{44}$$

Si sur le corps agit un couple de forces situé dans le plan perpendiculaire à l'axe Oz, M_z désignera évidemment, dans les formules (42) — (44), le moment de ce couple.

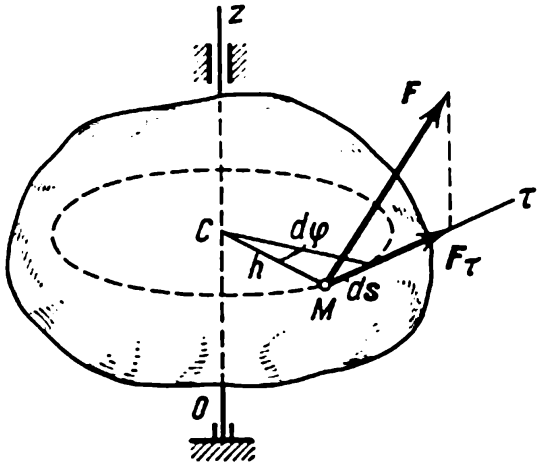


Fig. 321

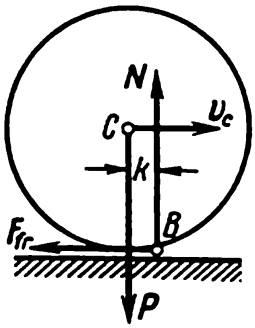


Fig. 322

Montrons encore comment, dans ce cas, doit être déterminée la puissance (voir § 112). Utilisant l'égalité (42), nous trouvons:

$$W = \frac{dA}{dt} = \frac{M_z \, d\varphi}{dt} = M_z \omega.$$

Par conséquent, lorsque des forces agissent sur un corps en rotation, *la puissance est égale au produit du moment de rotation par la vitesse angulaire du corps.* Pour une même puissance, le moment de rotation sera d'autant plus grand que la vitesse angulaire sera plus petite.

3) Travail des forces de frottement agissant sur un corps qui roule. Sur une roue de rayon R (fig. 322) qui roule sur un plan (une surface) sans glisser agit la force de frottement F_{fr} qui empêche le glissement du point de contact B le long du plan. Le travail élémentaire de cette force $dA = -F_{fr} \cdot ds_B$. Mais, dans ce cas, le point B est le centre instantané des vitesses (§ 81) et $v_B = 0$. Puisque $ds_B = v_B \, dt$, donc $ds_B = 0$ et pour chaque déplacement élémentaire $dA = 0$.

Par conséquent, *pendant un roulement sans glissement le travail de la force de frottement qui empêche le glissement est égal à zéro pour un déplacement quelconque du corps.* Pour la même raison le travail de la réaction normale N est aussi, dans ce cas, égal à zéro.

La résistance au roulement est créée par le couple (N, P) dont le moment $M = kN$, où k est le coefficient de frottement de roulement (voir § 40). Alors, selon la formule (42), tenant compte que pendant le roulement l'angle de rotation de la roue $d\varphi = \frac{ds_C}{R}$, nous obtenons:

$$dA_{\text{roul}} = -kN\,d\varphi = -\frac{k}{R}N\,ds_C, \tag{45}$$

où ds_C est le déplacement élémentaire du centre C de la roue.

Si $N = \text{const.}$, le travail total des forces de résistance au roulement sera égal à

$$A_{\text{roul}} = -kN\varphi_1 = -\frac{k}{R}Ns_C. \tag{45'}$$

Du moment que la grandeur k/R est petite, en présence d'autres résistances, on peut, en première approximation, négliger la résistance au roulement.

§ 150. Résolution des problèmes. Dans les cas où le système en mouvement est indéformable il est recommandé d'avoir recours au théorème de la variation de l'énergie cinétique. Dans ce cas, le théorème permet d'exclure de l'examen toutes les forces intérieures inconnues et aussi, en l'absence de frottement, toutes les forces a priori inconnues des réactions des liaisons extérieures.

Dans le cas d'un système déformable le théorème ne donne une solution du problème que lorsque les forces intérieures sont a priori connues. Si, au contraire, ces forces sont inconnues (problèmes 124, 128 et problèmes similaires), il est impossible d'obtenir la solution à l'aide du seul théorème de l'énergie.

L'équation (41) permet de résoudre facilement les problèmes dans lesquels au nombre des grandeurs données et cherchées se trouvent: 1) les forces agissantes; 2) *le déplacement du système*; 3) les vitesses des corps (linéaires ou angulaires) au début et à la fin du déplacement. Avec cela il faut que les forces agissantes soient constantes ou ne dépendent que des déplacements (des distances).

Il est également très important d'avoir en vue qu'à l'aide du théorème de la variation de l'énergie cinétique on peut former les *équations différentielles du mouvement d'un système* et, en particulier, trouver les accélérations des corps en mouvement. Il faut pour cela, après avoir posé l'équation (41), dériver ses deux membres par rapport au temps et éliminer la vitesse (voir problèmes 139, 140). Lorsque les forces agissantes sont quelconques, il est plus commode de poser l'équation sous la forme (40), c'est-à-dire sous forme différentielle (voir problèmes 141, 148).

Problème 137. Une tige AB de longueur l est suspendue au moyen d'une charnière au point A (fig. 323). En négligeant le frottement dans la charnière, trouver quelle vitesse angulaire minimum ω_0 faut-il communiquer à la tige pour qu'elle vienne en position horizontale.

Solution. Au nombre des grandeurs données et cherchées dans le problème se trouvent ω_0, $\omega_1 = 0$ et le *déplacement du système* défini par l'angle B_0AB_1. Par conséquent, pour résoudre le problème, il est plus commode d'utiliser l'équation (41)

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e. \qquad \text{(a)}$$

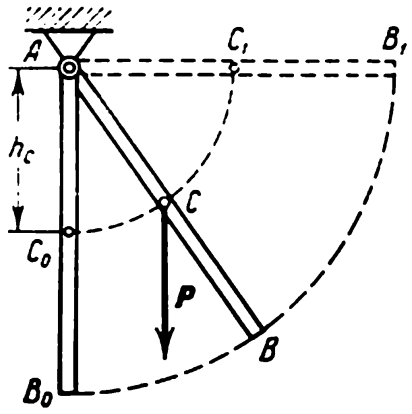


Fig. 323

Désignant le poids de la tige par P, calculons toutes les grandeurs qui entrent dans cette équation. D'après les formules (37) et (9) nous trouvons:

$$T_0 = \frac{1}{2} J_A \omega_0^2 = \frac{1}{6} \frac{P}{g} l^2 \omega_0^2.$$

Puisque dans la position finale la vitesse de la tige est égale à zéro, alors $T_1 = 0$. Le travail n'étant effectué que par la force P, $A^e = -Ph_C = -P\frac{l}{2}$. Portant ces diverses valeurs dans l'équation (a), nous trouvons:

$$-\frac{1}{6}\frac{P}{g} l^2 \omega_0^2 = -P\frac{l}{2},$$

d'où

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

Problème 138. Deux poulies A et B réunies par une courroie (fig. 324) continuent à tourner après l'arrêt du moteur de sorte que la poulie A possède une

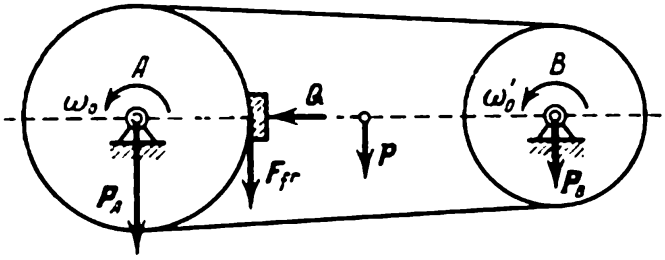


Fig. 324

vitesse angulaire ω_0. Le poids global des poulies est égal à P et le poids de la courroie est p. Pour empêcher la rotation, on applique avec une force Q contre la poulie A de rayon R un sabot de frein; le coefficient de frottement du sabot contre la poulie est égal à f. En négligeant le frottement aux axes et en assimilant les poulies à des disques pleins, trouver le nombre de tours effectué par la poulie A jusqu'à l'arrêt.

Solution. Pour déterminer le nombre de tours demandé N_t, utilisons l'équation (41)

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e. \qquad \text{(a)}$$

Pendant le calcul de l'énergie cinétique il faut toujours avoir en vue que l'*énergie cinétique d'un système est égale à la somme des énergies cinétiques de tous les corps le composant*. D'après les conditions du problème $T_1 = 0$ et $T_0 = T_A + T_B + T_C$. Tenant compte de ce que les vitesses initiales de tous les points de la courroie $v_{C0} = \omega_0 R = \omega_0' r$, où ω_0' et r désignent la vitesse angulaire initiale et le rayon de la poulie B, nous trouvons d'après les formules (37) et (11):

$$T_A = \frac{1}{2}\left(\frac{P_A}{2g} R^2\right)\omega_0^2,\ T_B = \frac{1}{2}\left(\frac{P_B}{2g} r^2\right)\omega_0'^2 = \frac{1}{4}\frac{P_B}{g} R^2\omega_0^2.$$

$$T_C = \frac{1}{2}\frac{P}{g} v_{C0}^2 = \frac{1}{2}\frac{p}{g} R^2\omega_0^2.$$

La dernière égalité résulte du fait que tous les points de la courroie se déplacent à la même vitesse. En définitive, puisque $P_A + P_B = P$, nous obtenons:

$$T_0 = \frac{P+2p}{4g} R^2\omega_0^2.$$

Calculons les travaux des forces. Dans le cas considéré le travail des forces de pesanteur est égal à zéro, car les centres de gravité des roues et de la courroie pendant le mouvement du système ne se déplacent pas. La force de frottement $F_{fr} = fQ$. Nous trouvons le travail de cette force par la formule (44)

$$A_{fr} = -(fQR)\cdot\varphi_1 = -fQR\cdot 2\pi N_t.$$

Portant toutes les valeurs trouvées dans l'équation (a), nous obtenons définitivement:

$$N_t = \frac{(P+2p)\,R\omega_0^2}{8\pi g f Q}.$$

Problème 139. On hisse un chariot le long d'un plan incliné formant un angle au niveau $\alpha = 30°$ en lui appliquant une force constante $Q = 16$ kgf (fig. 325). Le poids de la plate-forme du chariot $P = 18$ kgf, le poids de chacune

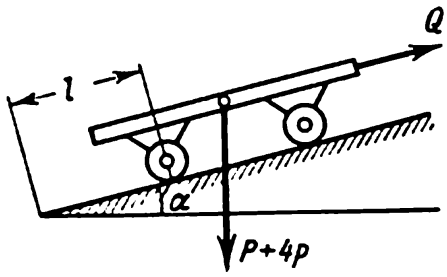


Fig. 325

de ses quatre roues pleines $p = 2$ kgf. Déterminer: 1) quelle sera la vitesse de translation v_1 du chariot lorsqu'il aura parcouru la distance $l = 4$ m si $v_0 = 0$; 2) avec quelle accélération se déplace le chariot. Les roues roulent sans glisser; négliger la résistance au roulement.

Solution. 1) Pour déterminer v_1 utilisons l'équation (41)

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e. \qquad \text{(a)}$$

Dans le cas considéré $T_0 = 0$ et $T_1 = T_{pl} + 4T_r$. Le chariot effectue un mouvement de translation et l'énergie cinétique d'une roue pleine en mouvement a été calculée au problème 134; par conséquent,

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{P}{g} v_1^2 + 4\left(\frac{3}{4}\frac{p}{g} v_1^2\right) = \frac{1}{2g}(P+6p)v_1^2.$$

Le travail est effectué par la force Q et la force de pesanteur égale à $(P + 4p)$. Le travail des forces de frottement qui empêchent le glissement et des forces des réactions normales est égal à zéro (§ 149). Le calcul nous donne:

$$A\ (Q) = Ql;\quad A\ (P_1) = -(P + 4p)\ h_C = -(P + 4p)\ l \sin \alpha.$$

Portant toutes ces données dans l'équation (a), nous obtenons:

$$\frac{1}{2g}(P+6p)\,v_1^2=[Q-(P+4p)\sin\alpha]\,l, \tag{b}$$

d'où

$$v_1=\sqrt{\frac{2gl\,[Q-(P+4p)\sin\alpha]}{P+6p}}=2{,}8\ \text{m/s}.$$

2) Pour déterminer l'accélération w, nous admettrons que dans l'égalité (b) les grandeurs v_1 et l sont variables. Alors, en dérivant par rapport au temps les deux membres de l'égalité, nous trouvons:

$$\frac{1}{g}(P+6p)\,v\,\frac{dv}{dt}=[Q-(P+4p)\sin\alpha]\,\frac{dl}{dt}.$$

Mais $\frac{dl}{dt} = v$ et $\frac{dv}{dt} = w$. Divisant par v, nous aurons finalement:

$$w=\frac{Q-(P+4p)\sin\alpha}{P+6p}\,g=0{,}98\ \text{m/s}^2.$$

Attirons l'attention sur le fait que, dans ce problème, pour déterminer l'accélération nous nous sommes servis du théorème de la variation de l'énergie cinétique.

Problème 140. Sur un rouleau cylindrique de rayon R et de poids P est enroulé un fil qui passe par la poulie O (fig. 326) et à l'extrémité duquel est fixée une masse D de poids Q. Déterminer la vitesse v_C et l'accélération w_C du centre

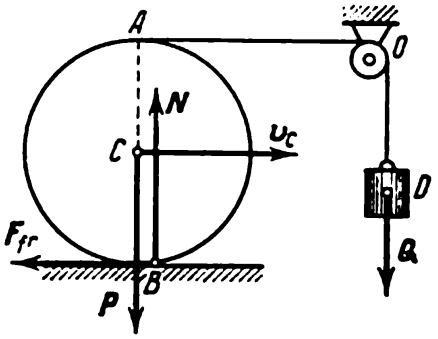


Fig. 326

de ce rouleau C lorsqu'il aura parcouru le chemin s si $v_{C0} = 0$. Le coefficient de frottement de roulement du rouleau est égal à k, le rayon de giration du rouleau par rapport à son axe est ρ_g. Négliger la masse du fil et de la poulie O.

Solution. 1) Pour déterminer la vitesse v_C, utilisons l'équation (41)

$$T-T_0=\sum A_k^e. \tag{a}$$

Dans le cas donné $T_0 = 0$ et $T = T_{\text{roul}} + T_D$, et de plus, selon les formules (36), (38) et (7),

$$T_D=\frac{1}{2}\frac{Q}{g}v_D^2,\quad T_{\text{roul}}=\frac{1}{2}\frac{P}{g}\cdot v_C^2+\frac{1}{2}\left(\frac{P}{g}\rho_g^2\right)\omega^2.$$

Puisque le point B est le centre instantané des vitesses, $\omega = \frac{v_C}{R}$ et $v_D = v_A = 2v_C$. Donc

$$T = \frac{1}{2g}\left[4Q + P\left(1 + \frac{\rho_g^2}{R^2}\right)\right] v_C^2.$$

Le travail est effectué par la force Q et le couple (N, P). Puisque $v_D = 2v_C$, le déplacement de la masse D, c'est-à-dire $h = 2s$ et $A(Q) = Q \cdot 2s$. Nous calculons le travail des forces de résistance au roulement par la formule (45') car $N = P = \text{const}$. Alors

$$\sum A_k^e = 2Qs - \frac{k}{R} Ps.$$

Portant les valeurs trouvées dans l'équation (a), nous obtenons:

$$\frac{1}{2g}\left[4Q + P\left(1 + \frac{\rho_g^2}{R^2}\right)\right] v_C^2 = \left(2Q - \frac{k}{R} P\right) s, \qquad \text{(b)}$$

d'où

$$v_C = \sqrt{\frac{2g\,(2QR - kP)\,Rs}{4QR^2 + P\,(R^2 + \rho_g^2)}}.$$

2) Pour déterminer w_C, comme dans le problème précédent, nous dérivons les membres de l'égalité (b) par rapport au temps. Tenant compte du fait que $\frac{ds}{dt} = v_C$, nous trouvons en définitive:

$$w_C = \frac{(2QR - kP)\,R}{4QR^2 + P\,(R^2 + \rho_g^2)} g.$$

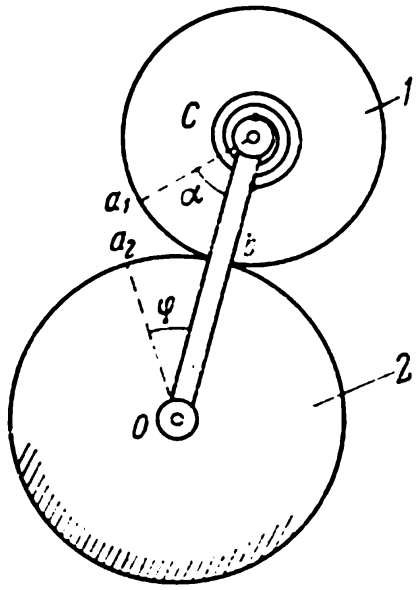


Fig. 327

Problème 141. Un pignon *1*, de rayon r et de poids P, emmanché sur la manivelle OC de longueur l et de poids Q et lié à elle par un ressort à spirale peut rouler sur le pignon fixe *2* de rayon $R = l - r$ (fig. 327). Le moment du ressort $M_{res} = c\alpha$, où α est l'angle de rotation du pignon *1* par rapport à la manivelle. En négligeant le frottement dans les axes, trouver la période des oscillations qu'effectuera la manivelle si on l'écarte de sa position d'équilibre. Le mécanisme est disposé dans un plan horizontal.

Solution. Nous définirons la position de la manivelle par l'angle φ mesuré à partir de la position d'équilibre. Pour exclure de l'examen la réaction inconnue de l'axe C, considérons le pignon *1* et la manivelle comme un seul système et formons l'équation différentielle de son mouvement à l'aide de l'équation (40).

Calculons d'abord l'énergie cinétique T du système en l'exprimant par la vitesse angulaire ω_{man} de la manivelle (car c'est la loi du mouvement de la manivelle qu'on cherche). Nous obtenons:

$$T = T_{tan} + T_{pign} = \frac{1}{2} J_{Oman}\omega_{man}^2 + \frac{1}{2}\frac{P}{g} v_C^2 + \frac{1}{2} J_{Cpign}\omega_{pign}^2. \qquad \text{(a)}$$

Admettant que la manivelle est une tige homogène et que le pignon est un disque et tenant compte du fait que le point de contact est pour le pignon *I* le centre instantané des vitesses, nous aurons:

$$J_{O\,man}=\frac{1}{3}\frac{Q}{g}l^2,\quad J_{C\,pign}=\frac{1}{2}\frac{P}{g}r^2,$$

$$v_C=\omega_{man}l,\quad \omega_{pign}=\frac{v_C}{r}=\frac{l}{r}\omega_{man}.$$

Soulignons une fois de plus que dans la formule (38), d'après laquelle on calcule T_{pign}, entre la vitesse angulaire *absolue* du pignon et non pas sa vitesse de rotation relative par rapport à la manivelle. Portant toutes les valeurs trouvées dans l'égalité (a), nous trouvons en définitive

$$T=\frac{1}{12g}(2Q+9P)\,l^2\omega_{man}^2. \qquad \text{(b)}$$

Calculons maintenant le travail élémentaire. Dans notre cas, les forces extérieures n'effectuent aucun travail, par conséquent, $dA^e=0$. Le travail élémentaire de la force élastique du ressort (force intérieure) au cours de la rotation du pignon autour de la manivelle d'un angle α est égal à $dA^i=-M_{res}\,d\alpha=$ $=-c\alpha\,d\alpha$ (le signe moins provient du fait que le moment est dirigé dans le sens contraire de l'angle de rotation du pignon). Pour trouver la loi du mouvement de la manivelle, exprimons l'angle α au moyen de φ. Comme $\widehat{a_2b}=\varphi\cdot\widehat{a_1b}$, alors $R\varphi=r\alpha$, d'où

$$\frac{\alpha}{R}=\frac{\varphi}{r},\quad \alpha=\frac{l-r}{r}\varphi\quad\text{et}\quad dA^i=-c\,\frac{(l-r)^2}{r^2}\varphi\,d\varphi.$$

Formons maintenant l'équation $dT=dA^i$, nous obtenons

$$\frac{1}{6g}(2Q+9P)\,l^2\omega_{man}\cdot d\omega_{man}=-c\,\frac{(l-r)^2}{r^2}\varphi\,d\varphi.$$

Divisant les deux membres de cette égalité par dt et tenant compte du fait que $\frac{d\varphi}{dt}=\omega_{man}$ et $\frac{d\omega_{man}}{dt}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, nous trouvons en définitive l'équation différentielle du mouvement du système sous la forme

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+k^2\varphi=0,$$

où

$$k^2=\frac{6gc\,(l-r)^2}{(2Q+9P)\,l^2r^2}.$$

L'équation obtenue est l'équation différentielle des oscillations harmoniques (§ 123). Donc, la manivelle, écartée de sa position d'équilibre, effectuera des oscillations harmoniques de période τ qui est égale à

$$\tau=\frac{2\pi}{k}=2\pi\,\frac{lr}{l-r}\sqrt{\frac{2Q+9P}{6gc}}.$$

Le problème que nous venons de résoudre fournit un exemple d'énormes possibilités que présente pour l'étude du mouvement d'un système le théorème de la variation de l'énergie cinétique.

§ 151. Champ de forces. Notion d'énergie potentielle. Parmi les forces susceptibles d'agir sur un point matériel au cours de son interaction avec d'autres corps se trouvent des forces qui ne dépendent que de la position du point, c'est-à-dire de ses coordonnées

x, y, z. Pour de telles forces on peut introduire la notion de champ de forces. On appelle *champ de forces* une portion de l'espace en chaque point duquel toute particule matérielle qui y est introduite est soumise à une force bien déterminée en module et en direction. Comme exemple de champ de forces on peut citer le champ de gravitation d'une planète ou du Soleil.

Si le travail effectué par les forces du champ pendant le mouvement d'un point matériel à l'intérieur de ce dernier ne dépend que des positions initiale et finale de ce point et ne dépend pas de la trajectoire le long de laquelle se déplace le point, un tel champ de forces est dit *champ potentiel* et les forces qui agissent dans ce champ sont appelées *forces potentielles*. La force de pesanteur, la force élastique (§ 113), la force de gravitation newtonienne sont des exemples de forces potentielles.

Les forces dont le travail dépend de la trajectoire ou de la vitesse du mouvement du point d'application de la force sont appelées *forces non potentielles*. Un exemple de telles forces est fourni par les forces de frottement et de résistance du milieu.

On peut introduire pour les forces potentielles la notion d'*énergie potentielle* en tant que grandeur caractérisant la « réserve de travail » que possède le point matériel à l'endroit donné du champ de forces. Pour comparer entre eux ces « réserves de travail », il faut choisir un point O en lequel on admet conventionnellement que la « réserve de travail » est égale à zéro (le choix du point origine, de même que de tout autre point de repère, est arbitraire). *On appelle l'énergie potentielle d'un point matériel dans la position donnée M la grandeur scalaire* Π *égale au travail que doivent effectuer les forces du champ pendant le déplacement du point de la position M à la position zéro* :

$$\Pi = A_{(MO)}.$$

Il résulte de la définition que l'énergie potentielle Π dépend des coordonnées x, y, z du point M, c'est-à-dire que $\Pi = \Pi(x, y, z)$. Pour trouver $\Pi(x, y, z)$ il faut calculer la grandeur $A_{(MO)}$ par les formules du § 112. S'il est impossible de calculer le travail $A_{(MO)}$ sans connaître la trajectoire MO ou la loi du mouvement le long de cette trajectoire, cela signifie que la force en action n'est pas potentielle.

Donnons des exemples. Des résultats obtenus au § 113 il découle que pour la force de pesanteur, si l'on prend pour point zéro l'origine des coordonnées et si l'on dirige l'axe Oz vers le haut suivant la verticale, on aura (§ 113)

$$\Pi = pz,$$

où p est le poids de la particule qui se trouve dans le champ de pesanteur.

Pour la force élastique d'un ressort qui ne s'étire que dans la direction de l'axe Ox, si l'on prend pour point zéro l'extrémité du ressort non étiré, on aura $\Delta l_{\text{init}} = x$, $\Delta l_{\text{fin}} = 0$. C'est pourquoi selon la formule (40) du § 113

$$\Pi = \frac{1}{2} cx^2,$$

où c est le coefficient de rigidité du ressort.

Trouvons l'expression du travail en fonction de l'énergie potentielle. Si le point se déplace dans un champ de forces potentielles

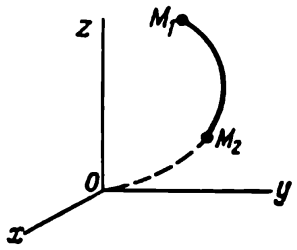


Fig. 328

de la position M_1 à la position M_2 (fig. 328), on aura, puisque le travail ne dépend pas de la forme de la trajectoire, $A_{(M_1O)} = A_{(M_1M_2)} + A_{(M_2O)}$. Mais d'après la définition $A_{(M_1O)} = \Pi_1$, $A_{(M_2O)} = \Pi_2$. De là

$$A_{(M_1M_2)} = \Pi_1 - \Pi_2. \tag{46}$$

Donc, *le travail d'une force potentielle est égal à la différence des valeurs de l'énergie potentielle du point mobile dans ses positions initiale et finale.* Lorsque le déplacement s'effectue suivant une courbe fermée ($\Pi_2 = \Pi_1$), le travail de la force potentielle est évidemment égal à zéro.

Montrons en conclusion que connaissant la fonction $\Pi(x, y, z)$ on peut déterminer la grandeur de la force en un point quelconque du champ. Dans ce but calculons le travail élémentaire dA pendant le déplacement du point $M(x, y, z)$ au point $M_1(x + dx, y + dy, z + dz)$. D'après la formule (46), nous obtenons:

$$dA = -d\Pi(x, y, z),$$

puisque pour le calcul de ce travail il faut prendre la différence entre Π et Π_1 et que la différentielle s'exprime par la différence avec la valeur accrue de la fonction, c'est-à-dire entre Π_1 et la valeur initiale Π.

Remplaçant ici dA par son expression analytique (§ 112) et calculant $d\Pi$ comme la différentielle d'une fonction de trois variables x, y, z, nous aurons:

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Pi}{\partial z}dz\right).$$

D'où, égalant les coefficients de dx, dy, dz, nous trouvons:

$$F_x = -\frac{\partial\Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial\Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial\Pi}{\partial z}. \tag{47}$$

Les formules (47) permettent, connaissant $\Pi(x, y, z)$, de trouver les projections de la force agissant dans le champ de forces potentielles et, par conséquent, de trouver la force elle-même. En particulier, pour la force de pesanteur et la force élastique considérées plus haut, nous obtenons, comme il fallait s'y attendre

$$F_x = F_y = 0, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} = -p;$$

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -cx, \quad F_y = F_z = 0.$$

Parfois, lorsqu'on donne un champ de forces, on introduit à la place de la fonction Π la fonction $U(x, y, z) = -, \Pi(x\ y, z)$ appelée *fonction de force*. Pour cette fonction $dA = dU$ et les égalités telles que (47) ne contiennent pas de signes moins.

§ 152. Principe de la conservation de l'énergie mécanique. Supposons que toutes les forces extérieures et intérieures qui agissent sur un système soient potentielles. Alors pour tout point du système, le travail des forces appliquées est égal à

$$A_k = \Pi_{k0} \quad \Pi_{k1}.$$

Par conséquent, pour toutes les forces extérieures et intérieures

$$\sum A_k = \sum \Pi_{k0} - \sum \Pi_{k1} = \Pi_0 - \Pi_1,$$

où $\Pi = \Sigma \Pi_k$ est l'énergie potentielle de tout le système.

Substituant cette expression du travail dans l'équation (39), nous obtenons :

$$T_1 - T_0 = \Pi_0 - \Pi_1$$

ou

$$T_1 + \Pi_1 = T_0 + \Pi_0 = \text{const}.$$

Donc, *pour un mouvement accompli sous l'effet de forces potentielles, la somme des énergies cinétique et potentielle d'un système en chacune de ses positions reste une grandeur constante.*

C'est l'expression du *principe de la conservation de l'énergie mécanique*, qui est un cas particulier de la loi physique générale de la conservation de l'énergie. La grandeur $T + \Pi$ est appelée énergie mécanique totale du système.

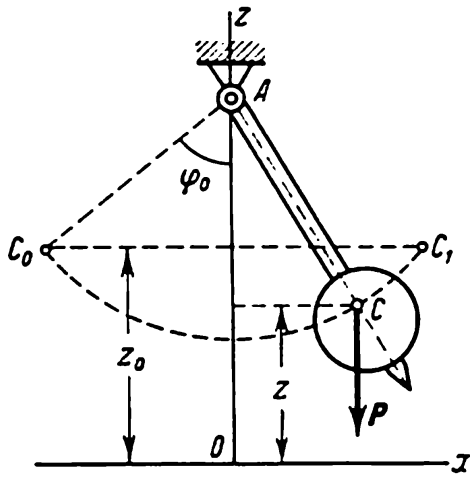
Si parmi les forces présentes se trouvent des forces non potentielles, par exemple des forces de frottement, l'énergie mécanique totale du système pendant le mouvement diminuera, en se transformant en d'autres formes d'énergie, par exemple en chaleur.

Toute l'importance de la loi obtenue apparaît lorsqu'on la considère en liaison avec la loi physique générale de la conservation de l'énergie. Mais pour la résolution de problèmes purement mécaniques on peut toujours utiliser directement le théorème de la variation de l'énergie cinétique d'un système.

E x e m p l e. Considérons un pendule (fig. 329) écarté de la verticale d'un angle φ_0 et abandonné sans vitesse initiale. Alors, dans sa position initiale $\Pi_0 = Pz_0$ et $T_0 = 0$, où P désigne le poids du pendule et z, la coordonnée de son centre de gravité. Donc, si l'on néglige toutes les résistances, dans toute autre position arbitraire on aura $\Pi + T = \Pi_0$ ou

$$Pz + \frac{1}{2} J_A \omega^2 = Pz_0.$$

En conséquence, le centre de gravité du pendule ne peut s'élever plus haut que la position z_0. Pendant la descente du pendule son énergie potentielle décroît



F i g. 329

et l'énergie cinétique augmente, pendant la remontée, au contraire, l'énergie potentielle croît et l'énergie cinétique décroît.

Il résulte de cette équation que

$$\omega^2 = \frac{2P}{J_A}(z_0 - z).$$

Ainsi, pour chaque instant pris arbitrairement la vitesse angulaire du pendule ne dépend que de la position occupée par son centre de gravité et, dans la position donnée, prend toujours la même valeur. Les relations de ce genre n'ont lieu que pendant un mouvement déclenché par des forces potentielles.

Pour le frottement de l'axe et la résistance de l'air (forces non potentielles) les relations obtenues plus haut ne sont pas vérifiées; l'énergie mécanique totale du pendule diminuera avec le temps et ses oscillations s'amortiront.

Chapitre XXVIII

QUELQUES CAS DE MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE

§ 153. Mouvement de rotation d'un corps solide. Examinons les applications des théorèmes généraux de la dynamique à quelques problèmes relatifs au mouvement d'un corps absolument rigide. Puisque l'étude du mouvement de translation d'un solide se ramène à des problèmes de la dynamique du point, nous commencerons directement par l'examen du mouvement de rotation.

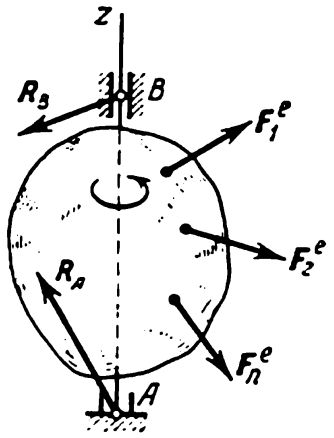


Fig. 330

Admettons que sur un solide ayant un axe de rotation fixe z (fig. 330) agit un système de force $F_1^e, F_2^e, \ldots, F_n^e$. Mais en même temps lui sont appliquées les réactions de paliers R_A et R_B. Pour exclure de l'équation du mouvement ces forces a priori inconnues, utilisons le théorème des moments par rapport à l'axe z (§ 144). Puisque les moments des forces R_A et R_B par rapport à l'axe z sont égaux à zéro, nous aurons:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e,$$

où

$$M_z^e = \sum m_z(F_k^e).$$

Par la suite, nous appellerons la grandeur M_z^e *moment de rotation*. Portant dans l'égalité précédente la valeur $K_z = J_z\omega$, nous obtenons:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e \text{ ou } J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^e. \tag{48}$$

L'équation (48) est *l'équation différentielle du mouvement de rotation d'un solide*. Il en résulte que *le produit du moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de rotation par l'accélération angulaire est égal au moment de rotation*:

$$J_z\varepsilon = M_z^e. \tag{48'}$$

L'égalité (48') montre que pour une valeur de M_z^e donnée l'accélération angulaire est d'autant plus petite que le moment d'inertie du corps est plus grand et inversement. Donc, le moment d'iner-

tie d'un corps joue effectivement pendant le mouvement de rotation le même rôle que la masse pendant le mouvement de translation, c'est-à-dire qu'il est la mesure de l'inertie du corps pendant le mouvement de rotation (voir § 131).

L'équation (48) permet : 1) connaissant le moment de rotation, de trouver $\varphi = f(t)$, c'est-à-dire la loi de la rotation du corps ou sa vitesse angulaire ω ; 2) connaissant la loi de la rotation, c'est-à-dire $\varphi = f(t)$, de trouver le moment de rotation M_z^e. En résolvant le premier problème, il faut avoir en vue qu'en général M_z^e peut être une variable et dépendre ainsi de t, φ et $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

Pour l'étude d'un mouvement de rotation on peut également, au lieu de l'équation (48), utiliser le théorème de la variation de l'énergie cinétique : $T_1 - T_0 = A^e$, où T et A^e sont définis par les formules (37) et (43).

Notons les cas particuliers suivants :

1) Si $M_z^e = 0$, on a $\omega = \text{const.}$, c'est-à-dire que le corps effectue un *mouvement de rotation uniforme.*

2) Si $M_z^e = \text{const.}$, on a $\varepsilon = \text{const.}$, c'est-à-dire que le corps effectue un *mouvement de rotation uniformément varié.*

L'équation (48) ressemble à l'équation différentielle du mouvement rectiligne d'un point (§ 104). C'est pourquoi les méthodes d'intégration de ces équations sont également similaires (voir problème 143).

Pendant la résolution des problèmes il est rationnel de se servir de l'équation (48) seulement si le système est composé d'un seul corps en rotation. Si, outre un corps en rotation, le système comprend d'autres corps mobiles (voir, par exemple, les problèmes 133, 138 et autres), il est préférable de former l'équation du mouvement en appliquant les théorèmes généraux ou d'autres méthodes qui seront exposées aux §§ 160, 167.

Au cours de la résolution de problèmes du type 133 à l'aide de l'équation (48) on commet souvent une faute typique en écrivant l'équation de la forme $J_O\varepsilon = Qr$. Dans ce cas, ce n'est pas la force Q qui agit sur le cylindre, mais la tension de la corde F non égale à Q, et l'équation (48) devient $J_O\varepsilon = Fr$. Pour la résoudre il faut déterminer en outre la force F, en formant l'équation du mouvement de la masse A, ce qui allonge le calcul.

Problème 142. Une roue de poids P tourne autour de l'axe O à la vitesse angulaire ω_0 (fig. 331). A un certain moment on applique contre la roue un sabot de frein avec une force Q. Le coefficient de frottement du sabot contre la roue est égal à f, le rayon de la roue est égal à R. En négligeant le frottement dans l'axe et le poids des rayons, déterminer le temps en secondes que met la roue pour s'arrêter.

S o l u t i o n. Formons l'équation (48) en posant que le moment est positif quand il est dirigé dans le sens de la rotation de la roue ; nous obtenons :

$$J_O \frac{d\omega}{dt} = -fQr, \qquad \text{(a)}$$

puisque la force de frottement $F = fQ$. De là, en intégrant, nous trouvons:

$$J_O\omega = -fQrt + C_1.$$

D'après les données initiales, $\omega = \omega_0$ quand $t = 0$, donc $C_1 = J_O\omega_0$ et en définitive

$$\omega = \omega_0 - \frac{fQr}{J_O}t. \qquad \text{(b)}$$

Au moment d'arrêt, quand $t = t_1$, $\omega = 0$. Substituant cette valeur et tenant compte de ce que pour la jante (anneau) $J_O = \frac{P}{g}r^2$, nous obtenons:

$$t_1 = \frac{J_O\omega_0}{fQr} = \frac{Pr\omega_0}{fQg}.$$

Si l'on doit trouver le nombre de tours accomplis par la roue jusqu'à l'arrêt, il sera plus facile de ne pas intégrer une seconde fois l'équation (b), mais d'appliquer le théorème de la variation de l'énergie cinétique.

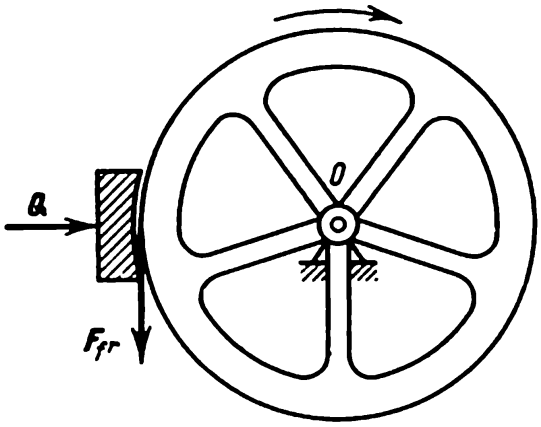


Fig. 331

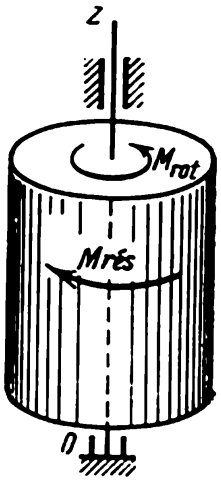


Fig. 332

Problème 143. Un rotor vertical de forme cylindrique dont le moment d'inertie par rapport à l'axe est égal à J_z (fig. 332) tourne sous l'effet du moment M_{rot}. Trouver comment varie au cours du mouvement la vitesse angulaire ω du rotor si $\omega_0 = 0$ et si le moment des forces de résistance de l'air est proportionnel à ω, c'est-à-dire $M_{rot} = \mu\omega$.

Solution. L'équation différentielle de la rotation du rotor (48) est (nous estimerons positifs les moments dirigés dans le sens de la rotation):

$$J_z\frac{d\omega}{dt} = M_{rot} - \mu\omega.$$

Séparant les variables et posant $\frac{\mu}{J_z} = n$, nous obtenons

$$-\mu\frac{d\omega}{M_{rot} - \mu\omega} = -n\,dt.$$

De là, intégrant, nous trouvons:

$$\text{Log}\,(M_{rot} - \mu\omega) = -nt + \text{Log}\,C.$$

Puisque, lorsque $t = 0$, la grandeur $\omega = 0$, donc $C = M_{rot}$ et

$$\operatorname{Log} \frac{M_{rot} - \mu\omega}{M_{rot}} = -nt \quad \text{ou} \quad \frac{M_{rot} - \mu\omega}{M_{rot}} = e^{-nt}.$$

Nous aurons en définitive:

$$\omega = \frac{M_{rot}}{\mu}(1 - e^{-nt}).$$

La vitesse angulaire du rotor augmente avec le temps, tendant vers la valeur limite $\omega_{lim} = \frac{M_{rot}}{\mu}$.

§ 154. Pendule composé. On appelle *pendule composé* un corps solide qui peut effectuer des oscillations autour d'un axe fixe horizontal sous l'action de la force de pesanteur.

Représentons la section du pendule par un plan perpendiculaire à l'axe de suspension et passant par le centre d'inertie du pendule C (fig. 333).

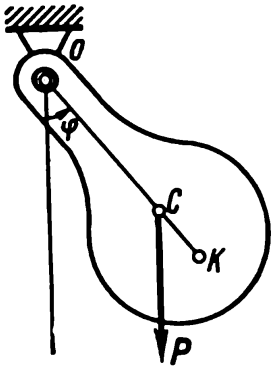


Fig. 333

Adoptons les notations suivantes: P, poids du pendule; a, distance OC séparant le centre d'inertie de l'axe de suspension; J_O, moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de suspension. Nous définirons la position du pendule par l'angle φ d'écartement de la droite OC de la verticale.

Pour déterminer la loi des oscillations du pendule, utilisons l'équation différentielle du mouvement de rotation (48). Dans le cas donné $M_z = M_O = -Pa \sin\varphi$ (on a pris le signe moins parce que le sens du moment est opposé au sens positif adopté pour l'angle φ) et l'équation (48) devient:

$$J_O \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Pa \sin\varphi.$$

Divisant les deux membres de l'égalité par J_O et introduisant la notation

$$\frac{Pa}{J_O} = k^2,$$

nous obtenons l'équation différentielle des oscillations du pendule sous la forme

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2 \sin\varphi = 0.$$

Cette équation a le même aspect que l'équation différentielle des oscillations du pendule simple (§ 123). Par conséquent, les oscillations des pendules composé et simple sont de même nature.

Si l'on se limite au cas des oscillations de faible amplitude, pour lesquelles $\sin\varphi \approx \varphi$, on obtient l'équation différentielle des petites oscillations du pendule sous la forme

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\varphi = 0.$$

C'est l'équation différentielle des oscillations harmoniques simples. Donc, les oscillations de faible amplitude du pendule composé, comme celles du pendule simple, sont harmoniques. La période des petites oscillations est égale à:

$$T_c = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{J_O}{Pa}}. \tag{49}$$

Comparant la formule (49) avec la formule de la période des petites oscillations du pendule simple

$$T_s = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

nous trouvons que pour une longueur

$$l_1 = \frac{J_O g}{Pa} = \frac{J_O}{Ma}, \tag{50}$$

la période des oscillations du pendule simple coïncide avec la période des oscillations du pendule composé correspondant.

La longueur l_1 du pendule simple dont la période des oscillations est égale à la période des oscillations du pendule composé donné s'appelle *longueur synchrone du pendule composé*. Le point K distant de $OK = l_1$ de l'axe de suspension est appelé *centre d'oscillations* du pendule composé (voir fig. 333).

En remarquant qu'en vertu du théorème de Huygens $J_O = J_C + Ma^2$, nous pouvons mettre la formule (50) sous la forme

$$l_1 = a + \frac{J_C}{Ma}. \tag{50'}$$

Il en résulte que la distance OK est toujours supérieure à $OC = a$, c'est-à-dire que le centre d'oscillations d'un pendule composé est toujours situé plus bas que son centre d'inertie.

La formule (50') montre que $KC = J_C/Ma$. C'est pourquoi, si l'on fixe l'axe de suspension au point K, la longueur synchrone l_2 du pendule obtenu sera, selon (50'), égale à

$$l_2 = KC + \frac{J_C}{M(KC)} = \frac{J_C}{Ma} + a = l_1.$$

Par conséquent, les points K et O sont réciproques, autrement dit, si l'axe de suspension passe par le point K, le centre d'oscillation sera le point O (puisque $l_2 = l_1$) et la période des oscillations du pendule ne sera pas modifiée. Cette propriété est utilisée dans le pendule dit réversible qui sert à la détermination de l'accélération de la force de pesanteur.

§ 155. Détermination expérimentale des moments d'inertie. L'une des méthodes expérimentales de détermination des moments d'inertie des corps (méthode des oscillations du pendule) s'appuie sur la formule (49) donnant la période des petites oscillations du pendule.

Supposons qu'il soit nécessaire de déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz du corps (bielle) représenté sur la figure 334 et dont le poids P est connu. En suspendant le corps de manière que l'axe Oz soit horizontal, on trouve à l'aide d'un chronomètre la période T de ses petites oscillations. Ensuite, par la méthode de la pesée (voir § 55, fig. 129) on détermine la distance $OC = a$. Portant ces diverses valeurs dans la formule (49), nous obtenons:

$$J_{Oz} = \frac{PaT^2}{4\pi^2}.$$

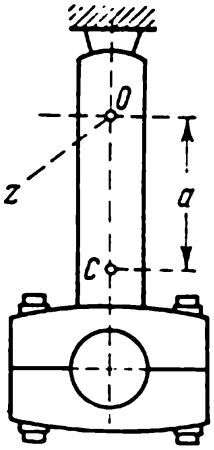


Fig. 334

S'il s'agit de déterminer le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe Ox passant par son centre de gravité, on peut suspendre le corps à deux tiges de telle manière que l'axe Ox soit horizontal (fig. 335) et trouver expérimentalement le moment d'inertie J_{AB} par rapport à l'axe AB

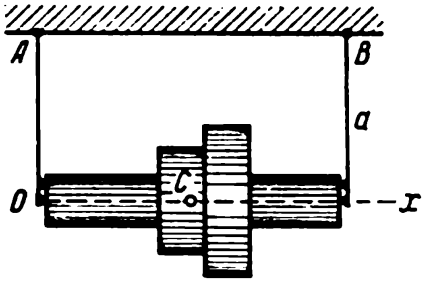


Fig. 335

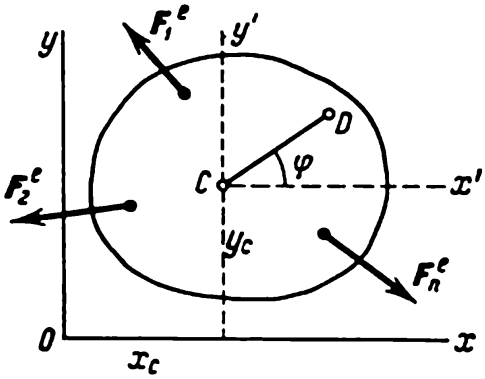


Fig. 336

(la grandeur a, dans ce cas, est a priori connue). Le moment d'inertie cherché se calcule alors par le théorème de Huygens:

$$J_{Ox} = J_{AB} \quad \frac{P}{g} a^2.$$

§ 156. Mouvement plan d'un corps solide. La position d'un corps qui effectue un mouvement plan se définit à tout moment par la position du pôle et l'angle de rotation du corps autour de ce pôle (§ 77). Les problèmes de la dynamique se résolveront plus simplement

si l'on prend pour pôle le centre d'inertie C du corps (fig. 336) et si l'on définit la position du corps par les coordonnées x_C, y_C et l'angle φ.

Supposons qu'on applique au corps les forces extérieures F_1^e, F_2^e, . . ., F_n^e. Nous trouverons alors les équations du mouvement du point C par le théorème du mouvement du centre d'inertie

$$M\boldsymbol{w}_C = \sum \boldsymbol{F}_k^e, \tag{51}$$

et le mouvement de rotation autour du centre C sera défini par l'équation (48) puisque le théorème servant à établir cette équation est applicable au mouvement d'un système autour du centre d'inertie. Projetant les deux membres de l'égalité (51) sur les axes de coordonnées, nous obtenons en définitive:

$$Mw_{Cx} = \sum F_{kx}^e, \quad Mw_{Cy} = \sum F_{ky}^e, \quad J_C\varepsilon = \sum m_C(\boldsymbol{F}_k^e) \tag{52}$$

ou

$$M\frac{d^2x_C}{dt^2} = \sum F_{kx}^e, \quad M\frac{d^2y_C}{dt^2} = \sum F_{ky}^e, \quad J_C\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum m_C(\boldsymbol{F}_k^e). \tag{52'}$$

Les équations (52) sont les *équations différentielles du mouvement plan d'un solide*. A l'aide de ces équations on peut, les forces étant données, déterminer la loi du mouvement du corps ou bien, connaissant la loi du mouvement du corps, trouver le vecteur résultant et le moment résultant des forces agissantes.

Dans le cas d'un mouvement gêné, lorsque la trajectoire du centre d'inertie est connue, il est plus commode de former les équations du mouvement du point C en projections sur la tangente τ et la normale principale n à cette trajectoire. Alors, à la place du système (52), nous obtenons:

$$M\frac{dv_C}{dt} = \sum F_{k\tau}^e, \quad M\frac{v_C^2}{\rho_C} = \sum F_{kn}^e,$$

$$J_C\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum m_C(\boldsymbol{F}_k^e), \tag{53}$$

où ρ_C est le rayon de courbure de la trajectoire du centre d'inertie.

Remarquons que dans le cas du mouvement gêné, les membres de droite des équations (52) ou (53) comportent encore des réactions inconnues des liaisons. Pour les déterminer il faudra former les équations complémentaires qui traduiront les conditions auxquelles sera soumis le mouvement du corps du fait des liaisons (voir problème 144 et autres). Souvent les équations d'un mouvement gêné peuvent être formées plus facilement à l'aide du théorème de la variation de l'énergie cinétique qui peut être utilisé au lieu de l'une des équations (52) ou (53).

Problème 144. Un cylindre plein de forme circulaire roule sans glisser le long d'un plan incliné (fig. 337). Déterminer l'accélération du centre du cylindre et la force minimale de frottement pour laquelle le roulement est possible sans glissement. Négliger la résistance au roulement.

Solution. Désignons par α l'angle d'inclinaison du plan; par P, le poids du cylindre; par R, son rayon et par F, la force de frottement minimale pour laquelle le roulement F est possible. Dirigeons l'axe Ox suivant le plan incliné et l'axe Oy, perpendiculairement au plan.

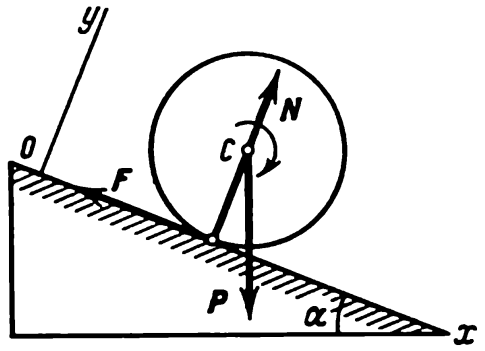


Fig. 337

Puisque le centre d'inertie du cylindre ne se déplace pas suivant l'axe Oy, $w_{Cy} = 0$, et la somme des projections de toutes les forces sur cet axe est également nulle. On a donc

$$N = P \cos \alpha.$$

En formant les deux autres équations du système (52), nous tiendrons compte du fait que $w_{Cx} = w_C$. Négligeant la résistance au roulement et admettant que le sens positif du moment de la force est celui de la rotation du cylindre, nous trouvons:

$$Mw_C = P \sin \alpha - F, \quad J_C \varepsilon = FR. \tag{a}$$

Les équations (a) contiennent 3 inconnues: w_C, ε et F (on ne peut pas poser ici que $F = fN$, car cette égalité n'a lieu que lorsque le point de contact *glisse* le long du plan; en l'absence de glissement $F \leqslant fN$; voir § 36). Nous trouverons une relation supplémentaire entre les grandeurs inconnues en tenant compte du fait que pendant un roulement sans glissement $v_C = \omega R$, d'où, en dérivant, nous trouverons $w_C = \varepsilon R$. Alors, la deuxième des égalités (a), si l'on tient compte de ce que pour un cylindre plein $J_C = 0{,}5\, MR^2$, deviendra

$$\frac{1}{2} Mw_C = F. \tag{b}$$

Portant cette valeur de F dans la première des égalités (a), nous obtenons:

$$w_C = \frac{2}{3} g \sin \alpha. \tag{c}$$

Maintenant, de l'expression (b) nous tirons

$$F = \frac{1}{3} P \sin \alpha. \tag{d}$$

La force de frottement agissant sur le cylindre en mouvement doit avoir cette valeur pour qu'il roule sans glissement. On a indiqué plus haut que $F \leqslant fN$.

Par conséquent, le roulement sans glissement aura lieu lorsque

$$\frac{1}{3} P \sin \alpha \leqslant fP \cos \alpha$$

ou

$$f \geqslant \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha.$$

Si le coefficient de frottement est inférieur à cette grandeur, la force F ne peut prendre la valeur définie par l'égalité (d) et le cylindre roulera en glissant de temps à autre. Dans ce cas v_C et ω ne sont pas liés par la relation $v_C = \omega R$ (le point de contact n'est pas le centre instantané des vitesses), mais, par contre, la grandeur F a une valeur limite, c'est-à-dire $F = fN = fP \cos \alpha$, et les équations (a) deviennent

$$\frac{P}{g} w_C = P (\sin \alpha - f \cos \alpha), \quad \frac{1}{2} \frac{P}{g} R^2 \varepsilon = fPR \cos \alpha,$$

d'où

$$w_C = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) ; \quad \varepsilon = \frac{2gf}{R} \cos \alpha. \tag{e}$$

Dans ce cas, le centre du cylindre se déplace avec l'accélération w_C, et le cylindre lui-même tourne avec l'accélération angulaire ε, dont les valeurs respectives sont définies par les égalités (e).

Problème 145. Résoudre le problème précédent en tenant compte de la résistance au roulement et en prenant le coefficient de frottement pendant le roulement égal à k.

Solution. Pour donner un exemple d'application d'un autre procédé de calcul, exprimons w_C, à l'aide du théorème de la variation de l'énergie cinétique, c'est-à-dire à l'aide de l'équation

$$dT = dA^e. \tag{a}$$

Dans le cas donné (voir problème 134 au § 147)

$$T = \frac{3}{4} M v_C^2.$$

Le travail n'est effectué que par la force P et le moment de résistance. Pendant le roulement le travail des forces F et N est égal à zéro (voir § 149). Alors, tenant compte de la formule (45), nous obtenons (voir fig. 337 sur laquelle on suppose maintenant que la force N est décalée de la grandeur k du côté du mouvement) :

$$dA^e = P \sin \alpha \cdot ds_C - \frac{k}{R} N \, ds_C = P \left(\sin \alpha - \frac{k}{R} \cos \alpha \right) ds_C.$$

Portant les valeurs trouvées dans l'égalité (a) et divisant les deux membres par dt, nous aurons

$$\frac{3}{2} \frac{P}{g} v_C \frac{dv_C}{dt} = P \left(\sin \alpha - \frac{k}{R} \cos \alpha \right) \frac{ds_C}{dt}.$$

Le dernier facteur est égal à v_C et nous trouvons en définitive

$$w_C = \frac{2}{3} g \left(\sin \alpha - \frac{k}{R} \cos \alpha \right).$$

Lorsque $k = 0$, la formule donne le résultat du problème précédent.

On peut trouver maintenant la force de frottement à partir de l'équation $Mw_C = P \sin \alpha - F$ qui ne change pas d'aspect.

Problème 146. Sur une surface cylindrique de rayon R (fig. 338) à partir de la position définie par l'angle φ_0 commence à rouler sans glissement un cylindre plein de poids P et de rayon r.

Déterminer : 1) la force de pression du cylindre sur la surface pour un angle arbitraire φ ; 2) la loi du mouvement du centre du cylindre lorsque l'angle φ_0 est petit. Négliger la résistance au roulement.

Solution. 1) Dans une position arbitraire, sur le cylindre agissent : la force P, la réaction normale N et la force de frottement F sans laquelle le roulement est impossible. La trajectoire du centre C nous est connue ; c'est une

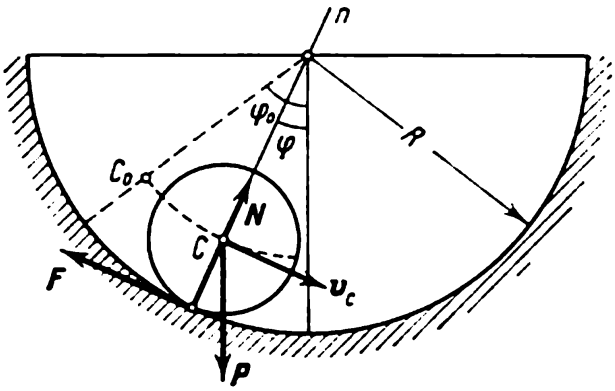


Fig. 338

circonférence de rayon $R - r$. Alors, pour déterminer N, utilisons la deuxième des équations (53). En orientant la normale Cn vers la concavité de la trajectoire, nous obtenons :

$$M\frac{v_C^2}{R-r}=N-P\cos\varphi. \qquad \text{(a)}$$

Trouvons la grandeur v_C qui entre dans cette relation par le théorème de la variation de l'énergie cinétique (comparer avec le § 118) :

$$T-T_0=\sum A_k^e. \qquad \text{(b)}$$

Dans le cas donné $T_0 = 0$ et $T=\frac{3}{4}Mv_C^2$ (voir problème 134). Le travail n'est effectué que par la force P. Donc,

$$\sum A_k^e=Ph=P(R-r)(\cos\varphi-\cos\varphi_0),$$

et l'équation (b) devient

$$\frac{3}{4}Mv_C^2=P(R-r)(\cos\varphi-\cos\varphi_0). \qquad \text{(c)}$$

Retranchant de cette quantité la grandeur Mv_C^2 et en la portant dans l'égalité (a), nous trouvons en définitive

$$N=\frac{P}{3}(7\cos\varphi-4\cos\varphi_0).$$

Si, par exemple, $\varphi_0 = 60°$ et $\varphi = 0°$, alors $N = \frac{5}{3}P$.

2) Pour déterminer la loi du mouvement du point C, dérivons l'égalité (c) par rapport au temps. Nous obtenons:

$$\frac{3}{2}\frac{P}{g}v_C\frac{dv_C}{dt}=-P(R-r)\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}.$$

Dans le cas donné, pendant le mouvement du cylindre l'angle φ décroît et $\frac{d\varphi}{dt}<0$. Alors

$$v_C=(R-r)\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|=-(R-r)\frac{d\varphi}{dt},\quad \frac{dv_C}{dt}=-(R-r)\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Portant ces diverses valeurs dans l'égalité précédente, nous trouvons en définitive:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{2}{3}\frac{g}{R-r}\sin\varphi=0.$$

Si l'angle φ_0 est petit, du moment que $\varphi\leqslant\varphi_0$, on peut admettre que $\sin\varphi\approx\approx\varphi$ et l'équation obtenue devient

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+k^2\varphi=0,$$

où

$$k^2=\frac{2}{3}\frac{g}{R-r}.$$

Par conséquent (voir § 123), le centre du cylindre effectue des oscillations harmoniques de période

$$\tau=\frac{2\pi}{k}=2\pi\sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}.$$

Problème 147. Un corps s'appuie au point B sur un capteur piézo-électrique d'un dispositif de mesure de la force de pression et est maintenu au point A par le fil AD (fig. 339). En équilibre la ligne AC est horizontale et la pression

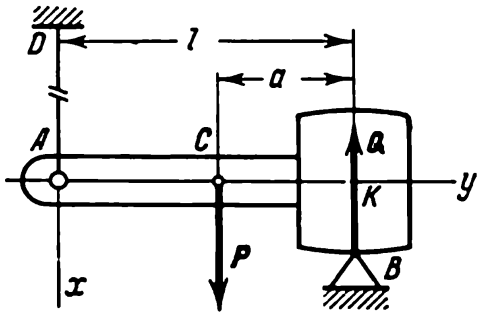


Fig. 339

au point B est égale à Q_0. Calculer le moment d'inertie J_C du corps par rapport à l'axe passant par son centre d'inertie C, si, lorsqu'on coupe le fil, la pression au point B devient égale à Q_1. La distance l est connue. Le poids du corps est P.

Solution. 1) Dans la position d'équilibre $Q_0l=P(l-a)$. De là on tire:

$$a=\frac{P-Q_0}{P}l.$$

2) Lorsqu'on coupe le fil, le corps amorce un mouvement plan. Pour un intervalle de temps élémentaire initial on peut négliger la variation de la position du corps. Alors, les équations (52) qui ne sont vérifiées que pour cet intervalle de temps, seront

$$Mw_{Cx}=P-Q_1,\ w_{Cy}=0,\ J_C\varepsilon=Q_1a. \qquad \text{(a)}$$

Puisque $w_{Cy}=0$, le point C commence à se déplacer vers le bas suivant la verticale et le point B glisse horizontalement (on suppose très faible le frottement sur le support). En élevant des perpendiculaires aux directions de ces déplacements, nous voyons que le point K sera le centre instantané des vitesses. Par conséquent, $v_C=a\omega$. En supposant que pendant l'intervalle de temps élémentaire considéré $a=$ const., nous obtenons en dérivant cette égalité $w_C=a\varepsilon$. Alors, la première des équations (a) donne:

$$\frac{P}{g}a\varepsilon=P-Q_1.$$

De là, en déterminant ε, nous trouvons en définitive

$$J_C=\frac{Q_1a}{\varepsilon}=\frac{P}{g}\frac{Q_1}{P-Q_1}a^2.$$

Le résultat obtenu peut être utilisé pour la détermination expérimentale des moments d'inertie.

Problème 148. Le poids d'une automobile avec les roues est égal à P (fig. 340); le poids de chacune de ses quatre roues est égal à p et le rayon à r.

Aux roues arrières (motrices) est appliqué le moment de rotation M_{rot}. L'automobile, commençant à se déplacer à partir de la position de repos, surmonte la résistance de l'air qui est proportionnelle au carré de sa vitesse de

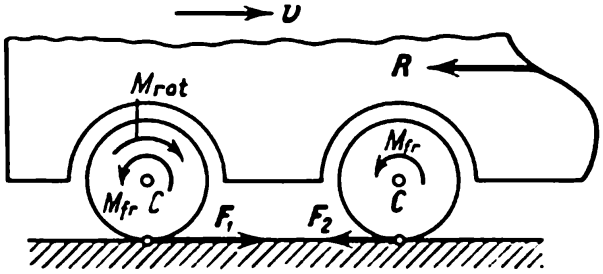


Fig. 340

translation $R=\mu v^2$. Le moment de frottement sur l'essieu de chacune des roues est égal à M_{fr}. En négligeant la résistance au roulement, déterminer: 1) la vitesse limite de l'automobile; 2) la force de frottement du glissement qui agit sur les roues motrices et porteuses au cours du mouvement.

Solution. 1) Pour déterminer la vitesse limite, formons l'équation différentielle du mouvement de l'automobile en utilisant l'égalité (40):

$$dT=dA^e+dA^i. \qquad \text{(a)}$$

L'énergie cinétique de l'automobile est égale à l'énergie de la carrosserie et des roues. Puisque P est le poids total de l'automobile et $v_C=\omega r$, en désignant le rayon de giration de la roue par ρ_g nous obtenons:

$$T=\frac{1}{2}\frac{P}{g}v_C^2+4\left(\frac{1}{2}J_C\omega^2\right)=\frac{1}{2g}\left(P+4p\frac{\rho_g^2}{r^2}\right)v_C^2.$$

Parmi les forces extérieures seule la force de résistance de l'air effectue un travail, car nous négligeons la résistance au roulement, le travail des forces de frottement F_1 et F_2 des roues contre le sol étant égal dans ce cas à zéro (§ 149). Donc,

$$dA^e = -\mu v_C^2\, ds_C.$$

Le travail des forces intérieures (celles du moment de rotation et des forces de frottement sur les essieux) est égal à

$$dA^i = (M_{rot} - 4M_{fr})\, d\varphi = (M_{rot} - 4M_{fr})\, \frac{ds_C}{r}.$$

Portant ces valeurs dans l'égalité (a) et divisant ses deux membres par dt, nous obtenons :

$$\frac{1}{g}\left(P + 4p\frac{\rho_g^2}{r^2}\right) v_C \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{r}\,(M_{rot} - 4M_{fr} - \mu r v_C^2)\, \frac{ds_C}{dt}.$$

De là, en divisant par $v_C = \frac{ds_C}{dt}$, nous trouvons :

$$\left(P + 4p\frac{\rho_g^2}{r^2}\right) w_C = \frac{g}{r}\,(M_{rot} - 4M_{fr} - \mu r v_C^2). \qquad \text{(b)}$$

Lorsque la vitesse de l'automobile atteint sa valeur limite, l'accélération w_C devient nulle. Par conséquent, v_C^{lim} se déterminera de l'équation

$$M_{rot} - 4M_{fr} - \mu r v_C^2 = 0,$$

d'où

$$v_C^{lim} = \sqrt{\frac{M_{rot} - 4M_{fr}}{\mu r}}.$$

On peut obtenir immédiatement ce résultat, en égalant à zéro la somme des travaux de toutes les forces. Le but des calculs précédents est de montrer comment peut se former l'équation du mouvement (b).

2) Pour déterminer les forces de frottement qui agissent sur chaque roue, formons les équations du mouvement de rotation des roues par rapport à leurs essieux. Pour les roues motrices on tiendra compte du fait que la force de frottement F_1 agissant sur chacune d'elles est dirigée vers l'*avant* (voir § 136, fig. 301), nous obtenons :

$$2\frac{p}{g}\rho_g^2 \varepsilon = M_{rot} - 2M_{fr} - 2F_1 r.$$

Puisque pendant le roulement $w_C = \varepsilon r$, nous trouvons en définitive

$$F_1 = \frac{0{,}5M_{rot} - M_{fr}}{r} - \frac{\rho_g^2}{r^2}\frac{p}{g} w_C. \qquad \text{(c)}$$

La force de frottement F_2 qui agit sur chacune des roues porteuses est dirigée vers l'arrière. Par conséquent, pour la roue porteuse nous aurons :

$$\frac{p}{g}\rho_g^2 \varepsilon = F_2 r - M_{fr},$$

d'où

$$F_2 = \frac{M_{fr}}{r} + \frac{\rho_g^2}{r^2}\frac{p}{g} w_C. \qquad \text{(d)}$$

De l'égalité (b) on voit qu'avec l'augmentation de la vitesse l'accélération w_C décroît et tend vers zéro.

Ainsi, la force de frottement qui agit sur les roues motrices augmente pendant l'accélération et atteint sa valeur maximum lorsque le mouvement devient uniforme ($w_C = 0$). En portant la valeur de w_C de l'égalité (b), il est facile de voir que le dernier terme de la formule (c) sera de beaucoup inférieur au premier, car $P \gg p$. C'est pourquoi, pratiquement, la grandeur F_1 varie très peu.

Sur les roues porteuses, la force de frottement atteint une valeur maximum au début du mouvement, puis elle décroît et pendant le mouvement uniforme ($w_C = 0$) prend la valeur minimum M_{fr}/r.

Si le coefficient de frottement des roues contre le sol est insuffisant pour que la force de frottement prenne la valeur F_1 ou F_2, les roues correspondantes patineront. Comme M_{rot} est beaucoup plus grand que M_{fr}, c'est les roues motrices qui doivent commencer à patiner en premier lieu.

Lorsque le moteur est débrayé, toutes les roues deviennent les roues porteuses et sont aussitôt soumises à l'action de la force de frottement $F = M_{fr}/r$. L'application des sabots de freins est équivalente à une augmentation de l'action du moment M_{fr} sur les essieux et, par conséquent, de la force de frottement qui agit sur chacune des roues, ce qui accélère le freinage de l'automobile (voir § 136).

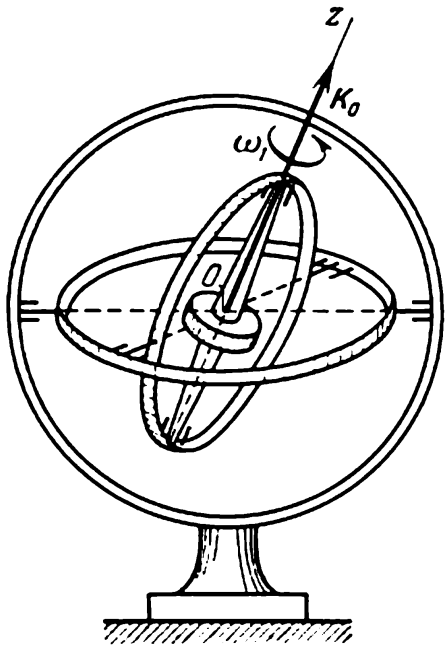


Fig. 341

§ 157. Théorie simplifiée du gyroscope. On appelle gyroscope ou toupie un corps solide possédant un axe de symétrie matérielle et fixé en un certain point O de cet axe. Dans les appareils gyroscopiques on utilise habituellement pour fixation du gyroscope une suspension par cardan (fig. 341) de manière que pendant une rotation quelconque du gyroscope son centre de gravité reste immobile.

Les gyroscopes utilisés en industrie ont une très grande vitesse angulaire de révolution ω_1 autour de l'axe de symétrie. Cela permet de ne pas tenir compte, en première approximation, des mouvements de rotation complémentaires que le gyroscope subit pendant le déplacement de son axe et de formuler une théorie simplifiée du gyroscope.

Pour un corps qui tourne autour d'un axe de symétrie *fixe* Oz, le vecteur $\boldsymbol{K}_O$ est dirigé suivant l'axe de rotation (voir § 143) et se calcule par la formule (32). Dans la théorie élémentaire du gyroscope on estime qu'au cours du *mouvement* lent de l'axe, le vecteur principal du moment angulaire du gyroscope par rapport à son point fixe (le vecteur $\boldsymbol{K}_O$) est à tout moment dirigé suivant l'axe du gyroscope dans le même sens que le vecteur $\boldsymbol{\omega}_1$ et égal à $J_z\omega_1$:

$$K_O = K_z = J_z\omega_1, \tag{54}$$

où J_z est le moment d'inertie du gyroscope par rapport à son axe de symétrie. Cette supposition est d'autant plus légitime que le gyroscope tourne plus vite.

Examinons dans cette hypothèse les propriétés principales du gyroscope.

1. Gyroscope libre. Considérons un gyroscope suspendu de la sorte que son centre de gravité est immobile et l'axe peut tourner en direction quelconque autour de ce centre (voir fig. 341). Alors, en négligeant le frottement sur les axes de suspension, nous aurons $\Sigma m_O (F_k^e) = 0$ et $K_O = \text{const.}$, c'est-à-dire que le module et la direction du vecteur du moment angulaire résultant sont constants (voir § 145). Mais puisque le vecteur K_O est toujours dirigé suivant l'axe du gyroscope, il en résulte que *l'axe d'un gyroscope libre conserve une direction invariable dans l'espace par rapport au système d'inertie référentiel (stellaire)*. C'est là une des propriétés importantes du gyroscope que l'on utilise dans les appareils basés sur l'effet gyroscopique.

En conservant une direction invariable dans le système de référence stellaire, l'axe d'un gyroscope libre effectuera, par rapport à la Terre, une révolution en sens contraire de la rotation de la Terre. Ainsi, on peut se servir du gyroscope libre pour démontrer que la Terre tourne autour de son axe. Cette expérience a été réalisée pour la première fois par Foucault (1852).

2. Action d'une force sur l'axe du gyroscope. Admettons que sur l'axe du gyroscope animé d'une vitesse de rotation très grande commence à agir une force F (fig. 342), dont le moment par rapport au centre O est égal en module à $M_O = Fh$. Alors, d'après le théorème des moments (§ 144)

$$\frac{dK_O}{dt} = M_O \quad \text{ou} \quad \frac{d(\overline{OB})}{dt} = M_O,$$

où B est le point de l'axe qui coïncide avec l'extrémité du vecteur K_O. De là, en tenant compte de ce que la dérivée du vecteur $\overline{OB}$ par rapport au temps est égale à la vitesse v_B du point B, nous obtenons :

$$v_B = M_O. \tag{55}$$

Par conséquent, le point B, et avec lui l'axe du gyroscope, se déplaceront dans la direction du vecteur M_O. En définitive, nous trouvons que *si sur l'axe d'un gyroscope tournant à grande vitesse agit une force, l'axe commence à s'écarter non pas dans le sens de l'action de la force, mais suivant celui du vecteur moment de cette force par rapport au point fixe O du gyroscope, c'est-à-dire perpendiculairement à la force* [1].

[1] Pour la détermination de la direction du vecteur M_O voir § 41.

Remarquons que si le gyroscope tournait dans le sens contraire (voir fig. 342), le vecteur ω_1, et avec lui le vecteur K_O appliqué au point O, seraient dirigés vers le bas; alors, l'extrémité inférieure du gyroscope s'écarterait du côté de M_O, autrement dit, vers l'observateur, et l'extrémité supérieure, vers l'arrière du plan de la figure.

Il résulte également de l'égalité (55) la conclusion suivante. Lorsque l'action de la force cesse, M_O et donc v_B deviennent nuls

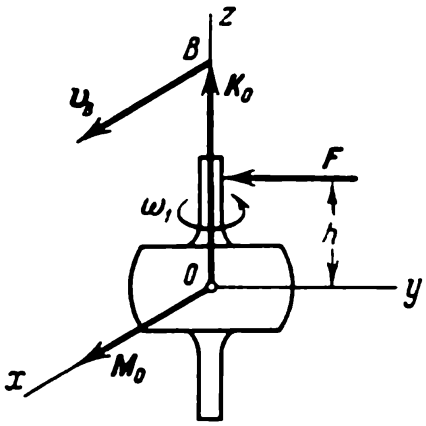


Fig. 342

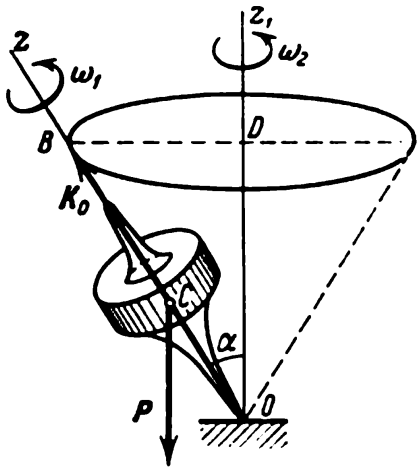


Fig. 343

et l'axe du gyroscope s'arrête. Le gyroscope ne conserve donc pas le mouvement qui lui a été communiqué par la force. Si l'action de la force est de courte durée (impulsion), l'axe du gyroscope ne modifie presque pas sa direction. C'est la manifestation de la propriété de *stabilité* de l'axe d'un gyroscope tournant à grande vitesse.

3. Mouvement de précession d'un gyroscope lourd. Considérons un gyroscope dans lequel le point fixe O ne coïncide pas avec le centre de gravité C (fig. 343). Alors, sur l'axe du gyroscope agira continuellement la force P qui, d'après ce qui a été démontré plus haut, écartera l'axe Oz du gyroscope non pas vers le bas (dans le sens de l'accroissement de l'angle α), mais suivant la direction de $m_O(P)$, c'est-à-dire suivant la direction perpendiculaire au plan Ozz_1. L'axe du gyroscope commencera donc à tourner autour de l'axe vertical Oz_1 en engendrant une surface conique. Un tel mouvement de l'axe du gyroscope est appelé *précession*.

Trouvons la vitesse angulaire de la précession ω_2. D'après l'équation (55) on doit avoir $v_B = M_O$. En introduisant la notation $OC = a$, nous obtenons que dans ce cas $M_O = Pa \sin \alpha$. D'autre part, $v_B = \omega_2 \cdot BD = \omega_2 \cdot OB \sin \alpha = \omega_2 K_O \sin \alpha$ ou, tenant compte de l'égalité (54),

$$v_B = J_z \omega_1 \omega_2 \sin \alpha. \tag{56}$$

Par conséquent, $J_z\,\omega_1\omega_2 \sin\alpha = Pa \sin\alpha$, d'où

$$\omega_2 = \frac{Pa}{J_z\omega_1}. \tag{57}$$

Puisque la grandeur ω_1 est élevée, la vitesse angulaire de la précession sera petite. Lorsque ω_1 diminue, la grandeur ω_2 croît, ce que l'on observe par exemple dans le cas d'une toupie.

Un mouvement de précession analogue anime l'axe de la Terre, car celle-ci n'ayant pas une forme absolument sphérique et son axe étant incliné, les résultantes des forces d'attraction du Soleil et de la Lune ne passent pas par le centre d'inertie de la Terre et engendrent par rapport à ce centre des moments cinétiques. La période de la précession de l'axe terrestre (temps pendant lequel est effectué un tour complet) est approximativement égale à 26 000 années.

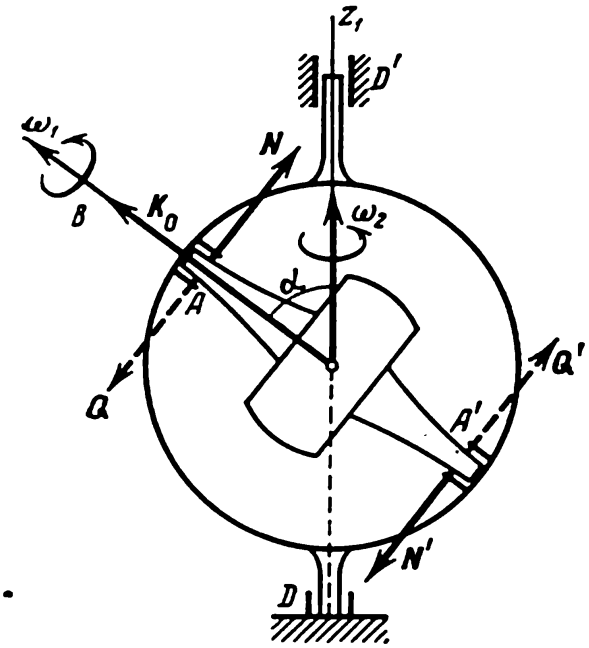


Fig. 344

4. Effet gyroscopique. Considérons un gyroscope tournant à grande vitesse et fixé à l'aide des paliers A et A' dans un anneau qui, à son tour, peut tourner à une certaine vitesse angulaire ω_2 ($\omega_2 \ll \omega_1$) autour de l'axe DD' (fig. 344). Puisque l'axe du gyroscope est aussi assujetti à une précession, le point B (extrémité du vecteur $\boldsymbol{K}_0$), comme dans le cas précédent, aura la vitesse v_B définie par l'égalité (56). La formule (55) nous permet de conclure que l'axe est soumis alors à un moment numériquement égal à

$$M_0 = v_B = J_z\omega_1\omega_2 \sin\alpha.$$

Ce moment est évidemment introduit par les forces $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q}'$, exerçant par l'intermédiaire des paliers A et A' une pression sur l'axe. Puisque le centre d'inertie du gyroscope est immobile, ces forces constituent un couple dont le moment $\boldsymbol{M}_0$ doit être dirigé de la même manière que la vitesse $\boldsymbol{v}_B$, c'est-à-dire vers le haut (sur la fig. 344, vers l'observateur).

Mais en même temps l'axe du gyroscope exercera une pression sur les paliers A et A' avec des forces $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N}'$ égales en module et de direction opposée aux forces $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q}'$.

Le couple de forces (N, N') est appelé *couple gyroscopique* et son moment, *moment gyroscopique*. Puisque en module $M_{gyr} = M_O$, donc,

$$M_{gyr} = J_z \omega_1 \omega_2 \sin \alpha. \tag{58}$$

Nous obtenons ainsi la règle de N. Joukovsky: *si l'on communique à un gyroscope tournant à grande vitesse un mouvement de précession, les paliers dans lesquels est fixé l'axe du gyroscope*

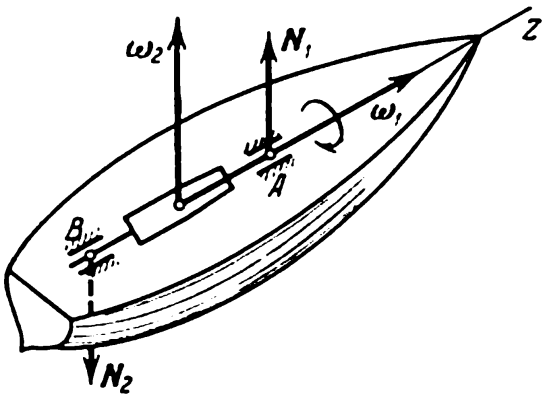


Fig. 345

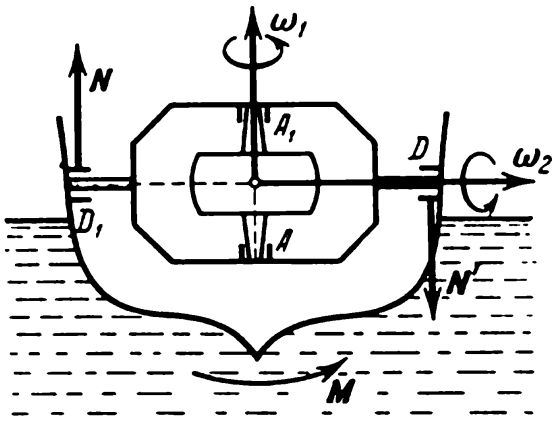


Fig. 346

seront soumis à un couple de forces de moment M_{gyr} qui tendra à amener par la voie la plus courte l'axe de rotation propre parallèlement à l'axe de la précession de manière que les supports des vecteurs ω_1 et ω_2 coïncident.

En plus de la pression sur les paliers, l'effet gyroscopique peut provoquer un mouvement du corps auquel sont liés ces paliers, si seulement ce mouvement n'est pas gêné par des liaisons constantes.

Considérons un exemple. Si un bateau, dont le rotor de la turbine tourne à la vitesse angulaire ω_1 (fig. 345), effectue un mouvement de rotation à la vitesse angulaire ω_2, il s'exercera sur les paliers A et B des pressions gyroscopiques N_1 et N_2 dirigées comme il est indiqué sur la figure [1]. Si en outre $AB = l$ et le moment d'inertie du rotor est égal à J_z, d'après la formule (58)

$$M_{gyr} = Nl = J_z \omega_1 \omega_2 \quad \text{et} \quad N = \frac{J_z \omega_1 \omega_2}{l}.$$

Les valeurs de ces pressions peuvent atteindre plusieurs tonnes et on doit en tenir compte pendant le calcul des paliers. Par l'entremise des paliers les pressions gyroscopiques sont transmises à

[1] Les pressions gyroscopiques sur les paliers apparaissent également à la suite du tangage. Les directions de ces pressions seront évidemment différentes.

la coque du bateau et si le bateau est très léger sa rotation pourrait provoquer l'abaissement de la quille ou de la proue. Un tel effet est observé sur les avions à hélices lors des virages (rotation dans le plan horizontal).

Les propriétés du gyroscope étudiées dans ce paragraphe ont été utilisées pour la construction de différents stabilisateurs gyroscopiques, de boussoles gyroscopiques et autres appareils à destination spéciale.

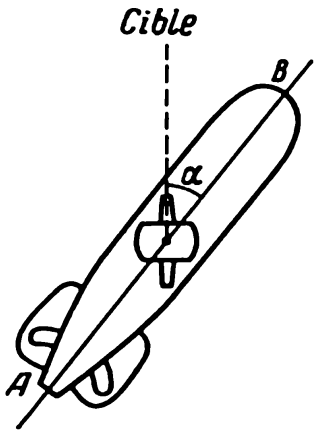


Fig. 347

Un exemple de stabilisateur gyroscopique à action directe est l'amortisseur du roulis. C'est un gyroscope très lourd (fig. 346) tournant autour de l'axe AA_1 fixé dans une armature dont l'axe de rotation DD_1 est solidaire du corps du bateau. Pendant la boule, lorsque le moment M agit sur le bateau, un moteur muni d'un régulateur spécial commence à faire tourner l'armature avec une vitesse angulaire ω_2 (voir figure). De ce fait, sur les paliers D, D_1 agit le couple gyroscopique (N, N') de moment $J\omega_1\omega_2$ qui contribue à diminuer le roulis. Lorsque la direction du moment M change, le moteur fait tourner l'armature dans le sens inverse et la direction du couple (N, N_1') devient également contraire.

Un autre exemple de stabilisateur (à action indirecte) est l'appareil d'Aubry qui stabilise le mouvement d'une torpille dans le plan horizontal. L'élément stabilisateur de l'appareil est un gyroscope libre (voir fig. 341) dont l'axe, au moment du lancement, coïncide avec l'axe de la torpille dirigée vers la cible. Si la torpille à un certain moment est déviée de son chemin d'un angle α (fig. 347), l'axe du gyroscope conservant son azimut primitif (suivant la propriété du gyroscope libre) tournera par rapport au corps de la torpille du même angle. Cette rotation provoquera le déplacement d'un régulateur approprié qui agit sur le gouvernail lequel tournera du bon côté et corrigera la direction de la torpille. C'est sur un principe analogue qu'est basée la construction de différents appareils conservant la direction d'avions sans pilotes : ils enregistrent la déviation de l'avion du cap donné et mettent en action les gouvernails appropriés.

Parmi les appareils gyroscopiques servant à la navigation citons le gyrocompas, le gyrohorizon, l'indicateur de virages et autres. Bien que de construction différente, ils sont tous basés sur les propriétés du gyroscope étudiées plus haut.

Chapitre XXIX

PRINCIPE DE D'ALEMBERT. PRESSION SUR L'AXE D'UN CORPS EN ROTATION

§ 158. Généralisation du principe de d'Alembert à un système. Considérons un système comprenant n points matériels. Choisissons l'un quelconque des points du système de masse m_k et désignons les résultantes de toutes les forces extérieures et intérieures qui lui sont appliquées par $\boldsymbol{F}_k^e$ et $\boldsymbol{F}_k^i$. Si l'on ajoute alors à ces forces la force d'inertie $\boldsymbol{F}_k^{in} = -m_k \boldsymbol{w}_k$, selon le principe de d'Alembert formulé pour un point (§ 119), le système de forces $\boldsymbol{F}_k^e$, $\boldsymbol{F}_e^i$, $\boldsymbol{F}_k^{in}$ se trouvera en équilibre et, par conséquent,

$$\boldsymbol{F}_k^e + \boldsymbol{F}_k^i + \boldsymbol{F}_k^{in} = 0.$$

En répétant les mêmes raisonnements pour chacun des points du système, nous arriverons au résultat qui est la généralisation du principe de d'Alembert à un système: *si à tout moment, à chacun des points du système, en plus des forces extérieures et intérieures, on applique les forces d'inertie correspondantes, le système de forces obtenu se trouvera en équilibre et on pourra lui appliquer toutes les équations de la statique.*

On sait de la statique que la somme géométrique de forces qui se trouvent en équilibre et la somme de leurs moments par rapport à un centre quelconque O sont égales à zéro et, de plus, selon le principe de solidification (§ 3), cela est vrai pour des forces qui agissent non seulement sur un solide, mais également sur un système déformable quelconque. Alors, selon le principe de d'Alembert, on doit avoir:

$$\sum (\boldsymbol{F}_k^e + \boldsymbol{F}_k^i + \boldsymbol{F}_k^{in}) = 0;$$

$$\sum [\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_k^e) + \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_k^i) + \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_k^{in})] = 0.$$

Introduisons les notations:

$$\boldsymbol{R}^{in} = \sum \boldsymbol{F}_k^{in}, \quad \boldsymbol{M}_O^{in} = \sum \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_k^{in}). \tag{59}$$

Les grandeurs $\boldsymbol{R}^{in}$ et $\boldsymbol{M}_O^{in}$ sont respectivemet *le vecteur résultant et le moment résultant par rapport au centre O des forces d'inertie.*

En définitive, puisque la somme géométrique des forces intérieures et la somme de leurs moments sont égales à zéro (§ 129), nous obtenons:

$$\sum \boldsymbol{F}_k^e + \boldsymbol{R}^{in} = 0, \quad \sum \boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_k^e) + \boldsymbol{M}_O^{in} = 0. \tag{60}$$

L'application des équations (60) qui découlent du principe de d'Alembert simplifie la résolution de problèmes car ces équations ne contiennent pas les forces intérieures. En fait, les équations (60) sont équivalentes aux équations qui expriment les théorèmes de la variation de la quantité de mouvement et du moment angulaire résultant d'un système, et n'en diffèrent que par la forme.

Il est particulièrement commode de se servir des équations (60) lorsqu'on étudie le mouvement d'un corps solide ou d'un système de corps solides. Pour une étude approfondie du mouvement d'un système variable quelconque, ces équations seront insuffisantes [1].

En projections sur les axes de coordonnées, les égalités (60) donnent des équations analogues aux équations correspondantes de la statique (voir §§ 24, 48). Pour se servir de ces équations au cours de la résolution des problèmes il faut connaître les expressions donnant le vecteur résultant et le moment résultant des forces d'inertie.

§ 159. Vecteur résultant et moment résultant des forces d'inertie d'un solide. Il résulte des égalités (59) (voir § 46) qu'on peut remplacer le système de forces d'inertie d'un solide par une seule force égale à $\boldsymbol{R}^{\text{in}}$ et appliquée au centre O et par un couple de moment égal à $\boldsymbol{M}_O^{\text{in}}$. Le vecteur résultant d'un système de forces, comme on le sait, ne dépend pas du centre de réduction et peut être calculé à l'avance. Puisque $\boldsymbol{F}_k^{\text{in}} = -m_k \boldsymbol{w}_k$, en prenant en considération l'égalité (15) (§ 135), nous aurons [2]:

$$\boldsymbol{R}^{\text{in}} = -\sum m_k \boldsymbol{w}_k = -\mathcal{M} \boldsymbol{w}_C. \tag{61}$$

Donc, *le vecteur résultant des forces d'inertie d'un corps qui effectue un mouvement quelconque est égal au produit de la masse du corps par l'accélération de son centre d'inertie et est dirigé dans le sens opposé à cette accélération.*

Si l'on décompose l'accélération $\boldsymbol{w}_C$ suivant ses composantes tangentielle et normale, le vecteur $\boldsymbol{R}^{\text{in}}$ se décomposera en

$$\boldsymbol{R}_\tau^{\text{in}} = -\mathcal{M} \boldsymbol{w}_{C\tau}, \quad \boldsymbol{R}_n^{\text{in}} = -\mathcal{M} \boldsymbol{w}_{Cn}. \tag{61'}$$

Trouvons le moment résultant des forces d'inertie pour certains cas particuliers.

1. Mouvement de translation. Dans ce cas le corps n'effectue aucune rotation autour du centre d'inertie C. Nous en concluons que $\Sigma m_C (\boldsymbol{F}_k^e) = 0$ et l'égalité (60) donné $\boldsymbol{M}_C^{\text{in}} = 0$.

---

[1] Cette conclusion résulte de raisonnements identiques à ceux qui ont été développés au § 3 pendant l'étude du principe de solidification. Voir également les remarques relatives aux théorèmes généraux de la dynamique qui ont été formulées au § 134.

[2] Dans ce chapitre, pour éviter toute confusion, la masse d'un corps sera désignée par la lettre $\mathcal{M}$ manuscrite (voir la note en bas de la page 360).

Par conséquent, *pendant un mouvement de translation les forces d'inertie d'un solide se réduisent à une résultante égale à* $\boldsymbol{R}^{\text{in}}$ *et passant par le centre d'inertie du corps.*

2. Mouvement plan. Supposons que le corps ait un plan de symétrie et se déplace parallèlement à lui. En vertu de la symétrie, le vecteur résultant et le couple résultant des forces d'inertie, ainsi que le centre d'inertie C du corps se trouvent dans le plan de symétrie.

Alors, en plaçant le centre de réduction au point C, nous obtenons de l'égalité (60) $M_C^{\text{in}} = -\Sigma\, m_C\,(\boldsymbol{F}_k^{\text{e}})$. D'autre part (voir § 156),

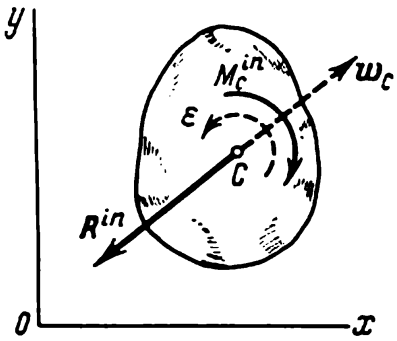


Fig. 348

d'après la dernière des équations (52) $\Sigma m_C\,(\boldsymbol{F}_k^{\text{e}}) = J_C\varepsilon$. Nous en concluons que

$$M_C^{\text{in}} = -J_C\varepsilon. \tag{62}$$

Ainsi donc, dans le cas considéré du mouvement, *le système des forces d'inertie se réduit à la force résultante égale à* $\boldsymbol{R}^{\text{in}}$ [formule (61)] *et appliquée au centre d'inertie C du corps* (fig. 348) *et au couple se trouvant dans le plan de symétrie du corps et dont le moment est défini par la formule* (62). Le signe moins dans la formule montre que le moment M_C^{in} est dirigé dans le sens contraire à celui de l'accélération angulaire du corps.

3. Rotation autour d'un axe passant par le centre d'inertie du corps. Supposons de nouveau que le corps ait un plan de symétrie et que l'axe de rotation Cz soit perpendiculaire à ce plan et passe par le centre d'inertie du corps. Nous obtenons ainsi un cas particulier du mouvement précédent. Mais alors $\boldsymbol{w}_C = 0$ et par conséquent, $\boldsymbol{R}^{\text{in}} = 0$.

Ainsi donc, dans le cas considéré, *le système des forces d'inertie se réduit à un couple se trouvant dans le plan de symétrie du corps et ayant un moment égal à*

$$M_z^{\text{in}} = -J_z\varepsilon. \tag{62'}$$

Pendant la résolution des problèmes, les valeurs absolues des grandeurs appropriées sont calculées à l'aide des formules (61) et (62), leurs directions doivent être indiquées sur le dessin.

§ 160. Résolution des problèmes. Le principe de d'Alembert fournit un procédé général pour former les équations du mouvement d'un système gêné quelconque [1]. A l'aide de ce principe, on résout facilement et d'une manière spectaculaire les problèmes dans lesquels, connaissant le mouvement du système, il faut déterminer les réactions des liaisons appliquées. En ce cas, toutes les forces intérieures a priori inconnues sont exclues de l'examen. S'il faut déterminer les réactions des liaisons intérieures, on doit décomposer le système en des parties par rapport auxquelles les forces cherchées seront extérieures.

De plus, on peut se servir de ce principe pour poser les équations différentielles du mouvement et, en particulier, pour déterminer les accélérations des corps mobiles.

Problème 149. Deux masses de poids P_1 et P_2, reliées par un fil, se déplacent sur un plan horizontal sous l'action de la force Q appliquée à la première des masses (fig. 349, *a*).

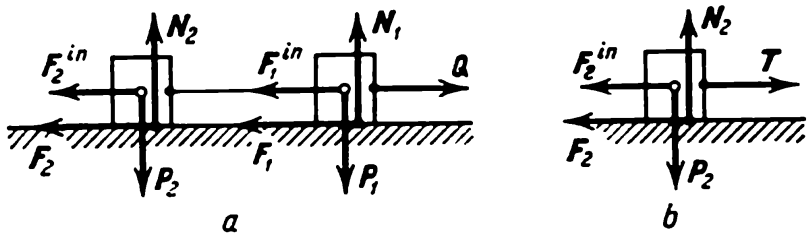


Fig. 349

Le coefficient de frottement des masses contre le plan est égal à f. Déterminer l'accélération des masses et la tension du fil.

Solution. Représentons toutes les forces extérieures qui agissent sur le système. Ajoutons à ces forces les forces d'inertie des masses. Les deux masses exécutent un mouvement de translation avec la même accélération w, on a donc en module

$$F_1^{in} = \frac{P_1}{g} w, \quad F_2^{in} = \frac{P_2}{g} w.$$

Les directions des forces sont indiquées sur la figure. Les forces de frottement sont égales à

$$F_1 = fP_1, \quad F_2 = fP_2.$$

Selon le principe de d'Alembert, le système de forces obtenu doit se trouver en équilibre. Formant l'équation d'équilibre en projections sur l'axe Ox, nous trouvons:

$$Q - f(P_1 + P_2) - \frac{1}{g}(P_1 + P_2) w = 0.$$

[1] Dans ce but on peut se servir très efficacement du principe de d'Alembert en le combinant au principe des déplacements virtuels (voir § 167).

D'où

$$w=\left(\frac{Q}{P_1+P_2}-f\right)g.$$

Il est évident que les masses se déplaceront si $f<\frac{Q}{P_1+P_2}$.

La tension du fil cherchée est dans le système considéré une force intérieure. Pour la déterminer, décomposons le système et appliquons le principe de d'Alembert à l'une des masses, par exemple à la deuxième (fig. 349, *b*). Sur cette masse agissent la force P_2, la réaction normale N_2, la force de frottement F_2 et la tension du fil T. Ajoutant à ces forces la force d'inertie F_2^{in} et formant l'équation d'équilibre en projections sur l'axe Ox, nous aurons:

$$T-fP_2-\frac{P_2}{g}w=0.$$

Portant ici la valeur de w trouvée plus haut, nous obtenons en définitive:

$$T=\frac{QP_2}{P_1+P_2}.$$

Il est intéressant de noter que dans ce cas la tension du fil ne dépend pas de la force de frottement et pour un même poids global du système sera d'autant plus petite que le poids de la deuxième masse (remorquée) sera petit. C'est pourquoi, par exemple, en composant une rame de wagons il est plus avantageux de disposer en tête les wagons plus lourds et en queue, plus légers.

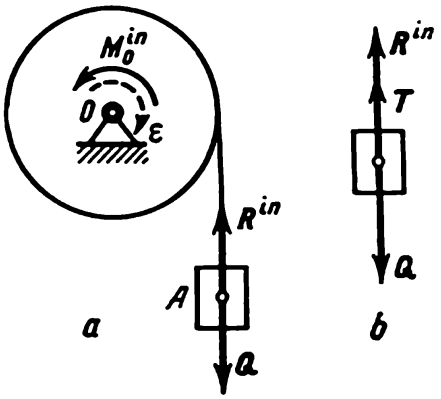


Fig. 350

Examinons un exemple numérique. Soient $Q=20$ kgf, $P_1=40$ kgf, $P_2=10$ kgf. Le mouvement n'est possible que si $f<0{,}4$. La tension du fil est alors égale à 4 kgf. Si l'on invertit les masses, la tension deviendra égale à 16 kgf.

Problème 150. Résoudre le problème 133 (§ 146) en appliquant le principe de d'Alembert et trouver en outre la tension du fil.

Solution. 1) En considérant le cylindre et la masse comme un seul système, ajoutons aux corps du système les forces d'inertie (fig. 350). La masse A effectue un mouvement de translation et pour elle $R^{in}=\frac{Q}{g}w_A=\frac{Q}{g}r\varepsilon$. Les forces d'inertie du cylindre se réduisent à un couple de moment M_O^{in} égal en module à $J_O\varepsilon=\frac{P}{g}\rho_g^2\varepsilon$ et dirigé dans le sens opposé à la rotation (voir § 159). Posant maintenant pour toutes les forces la condition d'équilibre sous la forme $\sum m_O(F_k)=0$, nous obtenons:

$$|M_O^{in}|+R^{in}r-Qr=0$$

ou bien

$$\frac{P}{g}\rho_g^2\varepsilon+\frac{Q}{g}r^2\varepsilon-Qr=0.$$

De là nous trouvons:

$$\varepsilon=\frac{Qgr}{P\rho_g^2+Qr^2}.$$

2) En examinant séparément la masse A et en ajoutant aux forces Q et T qui agissent sur elle la force d'inertie R^{in}, nous obtenons des conditions de l'équilibre que la tension du fil est égale à :

$$T = Q - R^{in} = Q\left(1 - \frac{r\varepsilon}{g}\right) = \frac{PQ\rho_g^2}{P\rho_g^2 + Qr^2}.$$

Problème 151. Déterminer la force qui tend à rompre un volant en rotation de masse $\mathcal{M}$, en admettant que sa masse est répartie suivant la jante. Le rayon du volant est r et la vitesse angulaire ω.

S o l u t i o n. La force cherchée est intérieure. Pour la déterminer, coupons le volant en deux parties et appliquons le principe de d'Alembert à une des moi-

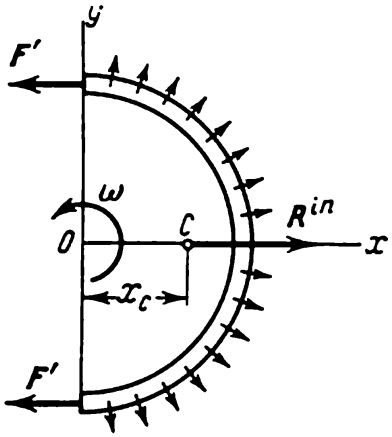


Fig. 351

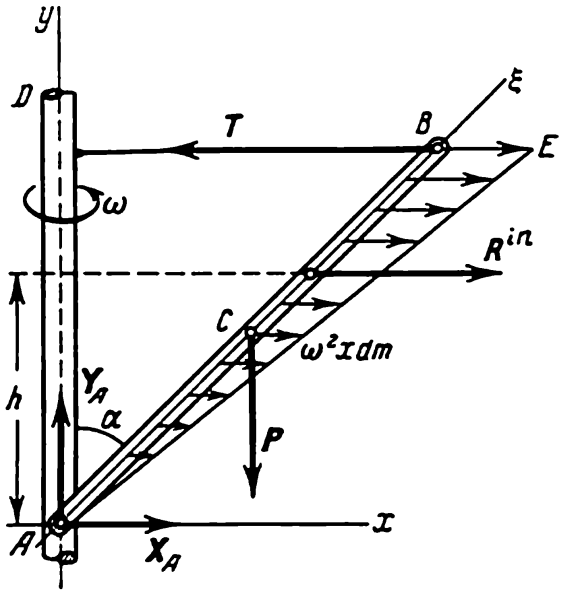


Fig. 352

tiés (fig. 351). Remplaçons l'action de la partie rejetée par des forces F' numériquement égales à la force cherchée F. Dans chaque élément de la jante la force d'inertie (force centrifuge) est dirigée suivant le rayon. Ces forces concourantes au point O ont une résultante égale au vecteur résultant des forces d'inertie R^{in} et dirigée, du fait de la symétrie, le long de l'axe Ox. D'après la formule (61) $R^{in} = 0{,}5\mathcal{M}w_C = 0{,}5\mathcal{M}x_C\omega^2$, où $x_C = \frac{2r}{\pi}$ est la coordonnée du centre d'inertie de l'arc de la demi-circonférence (voir § 56). Par conséquent :

$$R^{in} = \frac{\mathcal{M}r\omega^2}{\pi}.$$

Les conditions d'équilibre donnent $2F = R^{in}$ et en définitive

$$F = \frac{\mathcal{M}r\omega^2}{2\pi}.$$

A l'aide de cette formule on peut trouver la vitesse angulaire limite : si l'on dépasse cette vitesse, le volant d'une matière donnée risque de se rompre.

Problème 152. Une tige homogène AB de longueur l et de poids P est articulée en A à un arbre vertical tournant à la vitesse angulaire ω (fig. 352). Trouver

la tension T du fil horizontal qui maintient la tige de manière qu'elle forme avec l'arbre un angle α.

Solution. Utilisons le principe de d'Alembert en ajoutant les forces d'inertie aux forces extérieures P, T, X_A, Y_A appliquées à la tige. Pour chaque élément de la tige de masse Δm la force d'inertie centrifuge est égale à $\Delta m\omega^2 x$, où x est la distance séparant l'élément de l'axe de rotation Ay. La résultante de ces forces parallèles et rectilignes (voir § 28) passe par le centre de gravité du triangle ABE, c'est-à-dire à la distance $h = \frac{2}{3} l \cos\alpha$ de l'axe Ax. Puisque cette résultante est égale au vecteur résultant des forces d'inertie [1], d'après la formule (61)

$$R^{\text{in}} = \mathcal{M} w_C = \mathcal{M}\omega^2 x_C = \frac{P}{g}\omega^2 \frac{l}{2}\sin\alpha$$

(x_C désigne ici l'abscisse du centre de gravité de la tige). Posant maintenant l'équation de la statique $\sum m_A(F_k) = 0$, nous obtenons:

$$Tl\cos\alpha - R^{\text{in}}h - P\frac{l}{2}\sin\alpha = 0.$$

En portant dans cette dernière équation les valeurs de R^{in} et h, nous trouvons en définitive

$$T = P\left(\frac{l\omega^2}{3g}\sin\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right).$$

Autre solution. On peut résoudre le problème sans se servir des résultats du § 28, mais en calculant la somme des moments des forces d'inertie par rapport au centre A par intégration. Menons le long de la tige AB l'axe $A\xi$. Sur chaque élément de la tige $d\xi$ de coordonnée ξ agit une force d'inertie égale à $\omega^2 x\, dm$. Son moment par rapport au centre A sera égal à $-y\omega^2 x\, dm$. Alors, l'équation des moments donne

$$\sum m_A(F_k) \equiv Tl\cos\alpha - P\frac{l}{2}\sin\alpha - \int_0^l \omega^2 yx\, dm = 0. \qquad \text{(a)}$$

Exprimant toutes les grandeurs qui se trouvent sous le signe de l'intégrale par ξ, nous obtenons

$$x = \xi\sin\alpha,\quad y = \xi\cos\alpha,\quad dm = \frac{\mathcal{M}}{l}d\xi.$$

En définitive nous aurons:

$$\int_0^l \omega^2 yx\, dm = \frac{\mathcal{M}}{l}\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\int_0^l \xi^2\, d\xi = \frac{1}{3}\frac{P}{g}l^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha.$$

En portant cette valeur dans l'égalité (a), nous trouvons pour T l'expression que nous a donnée la solution précédente.

---

[1] On a vu en statique que pour un système de forces quelconque la résultante (si elle existe) est égale au vecteur résultant de ces forces. Par conséquent, la résultante des forces d'inertie, quand elle existe, est égale à R^{in}, mais si le mouvement n'est pas une translation, cette résultante peut ne pas passer par le centre d'inertie du corps, ce qui est justement le cas dans l'exemple considéré.

Problème 153. Une tige homogène AB de masse $\mathcal{M}$ et de longueur l tournant autour d'un axe qui lui est perpendiculaire (fig. 353, *a*) possède au moment donné la vitesse angulaire ω et l'accélération angulaire ε. Trouver les efforts que provoque la rotation à l'intérieur de la section de la tige se trouvant à la distance x de l'axe.

Solution. Les forces cherchées sont intérieures. Pour les trouver, coupons la tige en deux parties et considérons le mouvement de la partie DB de longueur $a = l - x$ (fig. 353, *b*). L'action de la partie rejetée AD sera remplacée par une force appliquée au centre de la section D ; représentons-la par les composantes P et Q et par le couple de moment M_D (voir § 26, fig. 62). Les grandeurs P, Q, M_D définiront précisément les efforts cherchés dans la section D de la tige, c'est-à-dire les forces avec lesquelles les parties AD et DB agissent l'une

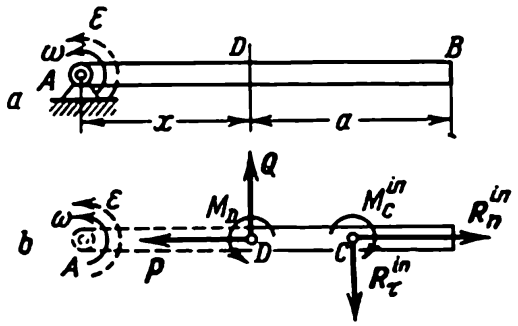


Fig. 353

sur l'autre. Pour calculer ces grandeurs, servons-nous du principe de d'Alembert. Calculons d'abord le vecteur résultant R^{in} des forces d'inertie du segment DB et leur moment résultant M_C^{in} par rapport au centre d'inertie C du segment. La masse m du segment DB et la coordonnée $x_C = AC$ de son centre d'inertie sont évidemment égales à :

$$m = \frac{l-x}{l}\mathcal{M}, \quad x_C = \frac{l+x}{2}.$$

Alors, en vertu des formules (61'), nous obtenons pour les modules des vecteurs $\boldsymbol{R}_\tau^{in}$ et $\boldsymbol{R}_n^{in}$ les valeurs suivantes :

$$|R_\tau^{in}| = m\,|w_{C\tau}| = m x_C\,|\varepsilon| = \mathcal{M}\,|\varepsilon|\,\frac{l^2-x^2}{2l};$$

$$R_n^{in} = m w_{Cn} = m x_C \omega^2 = \mathcal{M}\omega^2 \frac{l^2-x^2}{2l}.$$

De plus, d'après la formule (62) $M_C^{in} = -J_C\varepsilon$. Puisque dans le cas donné (voir problème 122 au § 133) $J_C = \frac{ma^2}{12}$, donc

$$|M_C^{in}| = \mathcal{M}\frac{(l-x)^3}{12l}\,|\varepsilon|.$$

Les directions des forces $\boldsymbol{R}_\tau^{in}$, $\boldsymbol{R}_n^{in}$ et du moment M_C^{in} sont indiquées sur la figure.

Autrement dit, toutes les forces d'inertie du segment DB de la tige sont remplacées par la force $\boldsymbol{R}^{in}$ appliquée au point C dont les composantes sont égales à $\boldsymbol{R}_\tau^{in}$ et $\boldsymbol{R}_n^{in}$ et par le couple de moment M_C^{in}. Posant maintenant pour les

forces qui agissent sur le segment DB et pour les forces d'inertie les conditions d'équilibre $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$, $\sum m_D(F_k) = 0$, nous obtenons:

$$R_n^{\text{in}} - P = 0,\ Q - |R_\tau^{\text{in}}| = 0,\ M_D - |M_C^{\text{in}}| - |R_\tau^{\text{in}}|\frac{a}{2} = 0.$$

On trouve donc que dans la section D de la tige agissent: 1) la force de traction $P = R_n^{\text{in}}$, 2) la force transversale $Q = |R_\tau^{\text{in}}|$, 3) le couple dont le moment de torsion M_D est égal à

$$M_D = |M_C^{\text{in}}| + |R_\tau^{\text{in}}|\frac{a}{2} =$$

$$= \frac{\mathcal{M}|\varepsilon|}{12l}[(l-x)^3 + 3(l+x)(l-x)^2],$$

ou bien, en définitive:

$$M_D = \frac{\mathcal{M}|\varepsilon|}{6l}(l-x)^2(2l+x).$$

Les forces P, Q et le moment de torsion ont des valeurs maxima, comme il est facile de s'en rendre compte, dans la section $x = 0$.

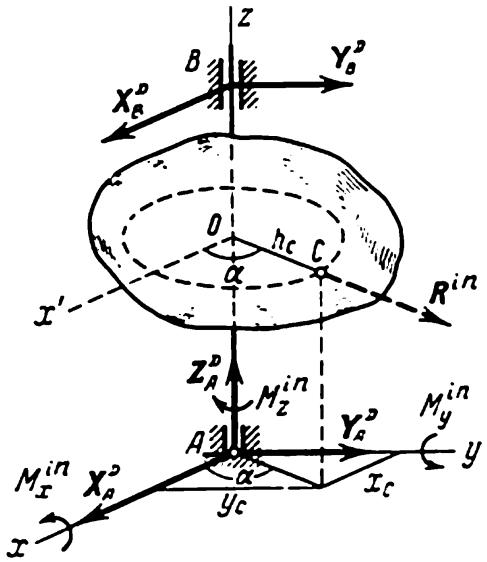


Fig. 354

§ 161. Pressions dynamiques sur l'axe d'un corps en rotation. Considérons un solide quelconque qui tourne d'un mouvement *uniforme* à la vitesse angulaire ω et autour d'un axe fixé dans les paliers A et B (fig. 354). Trouvons les *pressions dynamiques* X_A^D, Y_A^D, Z_A^D, X_B^D, Y_B^D des paliers sur l'axe, c'est-à-dire les pressions apparaissant du fait de la seule rotation du corps. Pour cela, en se servant du principe de d'Alembert, ajoutons aux forces cherchées le vecteur résultant et le moment résultant des forces d'inertie et posons les équations d'équilibre (60) en projections sur les axes de coordonnées qui tournent avec le corps. Dans notre cas ces équations (ou les équations du § 48 qui leur correspondent), si l'on pose $AB = b$, seront

$$\left.\begin{aligned} &X_A^D + X_B^D + R_x^{\text{in}} = 0,\\ &Y_A^D + Y_B^D + R_y^{\text{in}} = 0,\ Z_A^D + R_z^{\text{in}} = 0;\\ &-Y_B^D b + M_x^{\text{in}} = 0,\ X_B^D b + M_y^{\text{in}} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (63)$$

La dernière équation $M_z^{\text{in}} = 0$ est une identité, c'est pourquoi nous l'omettons.

Le vecteur résultant des forces d'inertie $\boldsymbol{R}^{\text{in}} = -\mathcal{M}\boldsymbol{w}_C$. Lorsque $\omega = \text{const.}$, le centre d'inertie C n'a qu'une accélération normale $w_{Cn} = h_C\omega^2$, où h_C est la distance du point C de l'axe de rotation.

Par conséquent, le vecteur $\boldsymbol{R}^{\text{in}}$ est dirigé suivant la droite OC et de plus [1]

$$R_x^{\text{in}} = \mathcal{M}\omega^2 h_C \cos\alpha = \mathcal{M}\omega^2 x_C\,;$$

$$R_y^{\text{in}} = \mathcal{M}\omega^2 h_C \sin\alpha = \mathcal{M}\omega^2 y_C\,;\quad R_z^{\text{in}} = 0,$$

où x_C et y_C sont les coordonnées du centre d'inertie.

Pour trouver M_x^{in} et M_y^{in}, considérons une particule quelconque du corps de masse m_k éloignée de l'axe de la distance h_k. Pour cette particule, lorsque $\omega = \text{const.}$, la force d'inertie se réduit à sa composante centrifuge $F_n^{\text{in}} = m_k\omega^2 h_k$, dont les projections, ainsi que les projections du vecteur $\boldsymbol{R}^{\text{in}}$, sont égales à

$$F_{kx}^{\text{in}} = m_k\omega^2 x_k,\quad F_{ky}^{\text{in}} = m_k\omega^2 y_k,\quad F_{kz}^{\text{in}} = 0.$$

Alors [voir § 42, formules (52)]

$$m_x(\boldsymbol{F}_k^{\text{in}}) = -F_{ky}^{\text{in}} z_k = -m_k\omega^2 y_k z_k\,;\quad m_y(\boldsymbol{F}_k^{\text{in}}) = F_{kx}^{\text{in}} z_k = m_k\omega^2 x_k z_k.$$

En formant ces expressions pour tous les points du système, en les additionnant et en mettant ω^2 en facteur, nous aurons:

$$M_x^{\text{in}} = -\left(\sum m_k y_k z_k\right)\omega^2 = -J_{yz}\omega^2,\quad M_y^{\text{in}} = \left(\sum m_k x_k z_k\right)\omega^2 = J_{xz}\omega^2. \tag{64}$$

Les grandeurs

$$J_{xz} = \sum m_k x_k z_k,\quad J_{yz} = \sum m_k y_k z_k, \tag{65}$$

qui font partie des égalités (64), sont appelées moments d'inertie centrifuges [2]. Des formules (65) on voit que ces grandeurs, ainsi que les moments d'inertie par rapport aux axes, ne dépendent que de la répartition des masses dans le corps; leur signification mécanique sera éclaircie plus bas.

Portant les valeurs trouvées dans les égalités (63) et omettant les grandeurs égales à zéro, nous obtenons:

$$\left.\begin{aligned} &X_A^D + X_B^D = -\mathcal{M}x_C\omega^2,\quad Y_A^D + Y_B^D = -\mathcal{M}y_C\omega^2\,;\\ &X_B^D b = -J_{xz}\omega^2,\quad Y_B^D b = -J_{yz}\omega^2. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Les équations (66) définissent précisément *les pressions dynamiques sur l'axe d'un solide animé d'un mouvement de rotation uniforme* si l'axe de rotation est l'axe Oz.

---

[1] Le vecteur $\boldsymbol{R}^{\text{in}}$ représenté sur la figure est le vecteur résultant des forces d'inertie, mais non pas la résultante de ces forces. Les forces d'inertie, lorsque leur résultante est appliquée au centre C ou O, donnent encore un couple.

[2] Cette appellation résulte du fait que ces grandeurs font partie des expressions des moments des forces d'inertie centrifuges.

Lorsque sur le corps agissent certaines forces F_k^e (qui satisfont évidemment à la condition $\Sigma m_z(F_k^e) = 0$), elles créent, en plus des pressions dynamiques, des pressions statiques définies par les équations (66) du paragraphe 48, c'est-à-dire de la même manière que si le corps était au repos. Les pressions totales sur l'axe seront alors égales à la somme des pressions dynamiques et statiques.

§ 162. Axes principaux d'inertie d'un corps. Equilibre dynamique des masses. L'apparition des pressions dynamiques sur l'axe est conditionnée par le caractère de la répartition des masses par rapport à cet axe. La présence de ces pressions témoigne du déséquilibre dit *déséquilibre dynamique des masses.*

Pour éliminer le déséquilibre dynamique il faut tout d'abord, comme on le voit des équations (66), que l'on ait

$$x_C = 0, \quad y_C = 0, \tag{67}$$

c'est-à-dire que l'axe de rotation passe par le centre d'inertie du corps. On aura alors $X_A^D = -X_B^D$, $Y_A^D = -Y_B^D$, autrement dit, les pressions dynamiques ne disparaîtront pas, mais formeront un couple qui, tournant avec le corps, provoquera des trépidations de l'axe [1].

Ainsi, l'équilibre dynamique (ou le déséquilibre) des masses dépend non seulement de la position du centre d'inertie mais aussi des grandeurs J_{xz}, J_{yz}. D'où leur signification mécanique: *les moments d'inertie centrifuges J_{xz} et J_{yz} caractérisent le degré du déséquilibre dynamique des masses du corps lorsque ce dernier tourne autour de l'axe Oz.*

Pour que l'équilibre dynamique soit complet, il faut encore que soient remplies les conditions

$$J_{xz} = 0, \; J_{yz} = 0. \tag{68}$$

L'axe Oz, pour lequel les moments d'inertie centrifuges J_{xz} et J_{yz} sont nuls, s'appelle *l'axe principal d'inertie du corps par rapport au point O.* Par exemple, si le plan Oxy est le plan de symétrie matérielle du corps, l'axe Oz sera l'axe d'inertie principal par rapport au point O car alors, pour chaque particule du corps de coordonnées x, y, z, il y a une particule symétriquement disposée de coordonnées x, y, $-z$, et par conséquent, les sommes (65) seront égales à zéro. De même, l'axe Ox sera l'axe principal par rapport au point O si pour lui $J_{yx} = J_{zx} = 0$, etc.

L'axe principal d'inertie qui passe par le centre d'inertie du corps est appelé *axe principal d'inertie central* du corps. Par exem-

[1] Ces trépidations, tout en accélérant l'usure des paliers, peuvent provoquer un effet de résonance dans les organes de la machine ou dans le bâti (voir § 126), et elles sont fort gênantes.

ple, si l'axe Oz est un axe de symétrie matérielle du corps, il sera l'axe principal d'inertie central car, alors, pour chaque particule du corps de coordonnées x, y, z il y a une particule symétriquement disposée de coordonnées $-x$, $-y$, z et, par conséquent, les sommes (65) deviennent nulles. Le fait que en même temps $x_C = y_C = 0$ est connu de la statique.

Il résulte de ce qui a été dit précédemment que *les pressions dynamiques sur l'axe d'un corps en rotation sont égales à zéro si cet axe est l'axe principal d'inertie central du corps* (en particulier, l'axe de symétrie matérielle). Cette conclusion reste vraie même dans le cas où le mouvement de rotation du corps est un mouvement non uniforme.

L'équilibre dynamique des masses (ou, comme on dit encore, l'équilibre des forces d'inertie) est un problème technique important qui, comme on le voit, revient à déterminer les axes principaux d'inertie centraux du corps.

Il ne faut pas s'imaginer que seuls les corps symétriques ont des axes principaux d'inertie. On peut démontrer que par tout point arbitraire de chaque corps asymétrique, y compris le centre d'inertie, passent trois axes principaux d'inertie par rapport à ce point, perpendiculaires entre eux.

Démontrons un autre fait pratiquement non moins important: *tout axe quelconque mené par le corps peut être pris pour l'axe principal d'inertie central si l'on ajoute au corps deux masses ponctuelles.* Supposons que pour le corps de masse $\mathcal{M}$ les grandeurs x_C, y_C, J_{xz}, J_{yz} soient connues et non nulles. Ajoutons au corps deux masses m_1 et m_2 aux points de coordonnées (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2). Alors, des formules (4) et (65) il résulte que si l'on a

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M}x_C + m_1x_1 + m_2x_2 = 0, \quad J_{xz} + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 = 0, \\ \mathcal{M}y_C + m_1y_1 + m_2y_2 = 0, \quad J_{yz} + m_1y_1z_1 + m_2y_2z_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

on aura pour le corps obtenu $x'_C = y'_C = J'_{xz} = J'_{yz} = 0$, c'est-à-dire que l'axe Oz sera l'axe principal d'inertie central. En choisissant les masses m_1, m_2 et leurs positions de manière que soient vérifiées les équations (69), le problème posé sera résolu. Il faut évidemment dans ce cas fixer à l'avance certaines grandeurs. On peut, par exemple, fixer les grandeurs m_1, m_2 et z_1, z_2 (mais de manière que $z_1 \neq z_2$) et déterminer x_1, y_1, x_2, y_2 d'après les équations (69), etc.

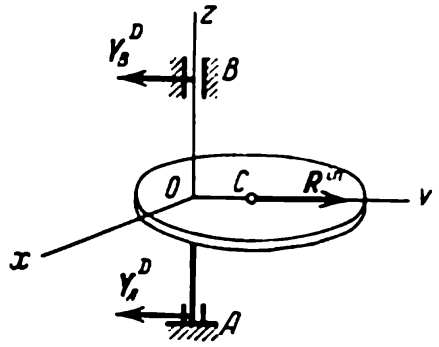
Un tel procédé d'équilibrage des masses est largement utilisé dans l'industrie pour l'équilibrage des arbres vilebrequins, des manivelles, des bielles d'accouplement, etc. Toutefois l'équilibrage définitif s'effectue à l'aide des dispositifs spéciaux.

Pour déterminer les pressions sur l'axe dans des problèmes concrets, on ne se sert que rarement des équations (66) mais on applique directement chaque fois le principe de d'Alembert. On tient alors compte

simultanément de toutes les forces qui agissent sur le corps et on détermine immédiatement les pressions totales sur l'axe, c'est-à-dire la somme des pressions statiques et dynamiques.

Problème 154. L'axe de rotation d'un disque est perpendiculaire au plan de ce dernier (fig. 355) et est décalé du centre d'inertie de la distance a. Le poids du disque est P, la vitesse angulaire ω. Déterminer les pressions dynamiques sur l'axe si $OA = OB$.

S o l u t i o n. L'axe Oz sera l'axe principal d'inertie par rapport au point O puisque le plan Oxy est un plan de symétrie du disque. Alors $J_{xz} = J_{yz} = 0$ et



F i g. 355

des formules (64) il résulte que $M_O^{in} = 0$, c'est-à-dire que la résultante des forces d'inertie passe par le point O et est dirigée suivant la droite OC (l'axe Oy). En module $R^{in} = \mathcal{M}w_{Cn} = \frac{P}{g} a\omega^2$. Alors, comme il est facile de le voir:

$$Y_A^D = Y_B^D = \frac{Pa\omega^2}{2g}.$$

Les forces Y_A^D et Y_B^D se trouvent toujours dans le plan Oyz qui tourne avec le corps.

Aux pressions trouvées s'ajoutent encore les pressions statiques dues à la force de pesanteur P et qui peuvent être calculées si l'on connaît la distance AB.

Problème 155. Deux tiges identiques disposées dans un même plan à la distance h l'une de l'autre (fig. 356) sont soudées à angle droit à un arbre vertical AB de longueur b. La longueur de chacune des tiges est l, la masse m. Trouver les pressions dynamiques sur l'arbre si celui-ci tourne à la vitesse angulaire constante ω.

S o l u t i o n. Les forces d'inertie centrifuges de chacune des tiges sont égales en modules à

$$F_1^{in} = F_2^{in} = m\frac{l}{2}\omega^2$$

et forment un couple qui est évidemment équilibré par le couple des forces X_A^D, X_B^D. Les moments de ces couples sont égaux en module. Par conséquent, $X_A^D b = F_1^{in} h$, d'où

$$X_A^D = X_B^D = \frac{F_1^{in} h}{b} = \frac{mlh}{2b}\omega^2.$$

Le couple est toujours dans le plan Axz qui tourne avec le corps.

Montrons comment on peut aboutir à ce même résultat à partir des équations (66). Dans le cas en question $x_C = y_C = 0$ et $J_{yz} = 0$ car le plan Axz est un plan de symétrie. La grandeur $J_{xz} = J'_{xz} + J''_{xz}$, c'est-à-dire qu'elle est égale à la somme des moments d'inertie centrifuges de chacune des tiges. Pour la tige inférieure tous les $z_k = a$, et pour la tige supérieure tous les $z_k = a + h$. Alors, d'après la formule (65) :

$$J'_{xz} = \left(\sum m_k x_k\right) a = m x'_C a = -m \frac{l}{2} a ;$$

$$J''_{xz} = m x''_C (a+h) = m \frac{l}{2} (a+h),$$

d'où

$$J_{xz} = m \frac{l}{2} h.$$

Portant toutes ces données dans les équations (66), nous trouvons

$$Y_A^D = Y_B^D = 0 ; \; X_A^D = -X_B^D = \frac{mlh}{2b} \omega^2.$$

Le signe moins devant X_B^D provient du fait que les forces X_B^D sur les figures 354 et 356 ont des directions opposées.

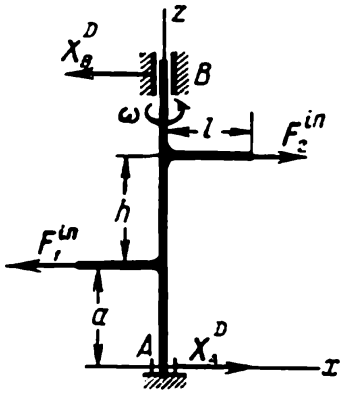


Fig. 356

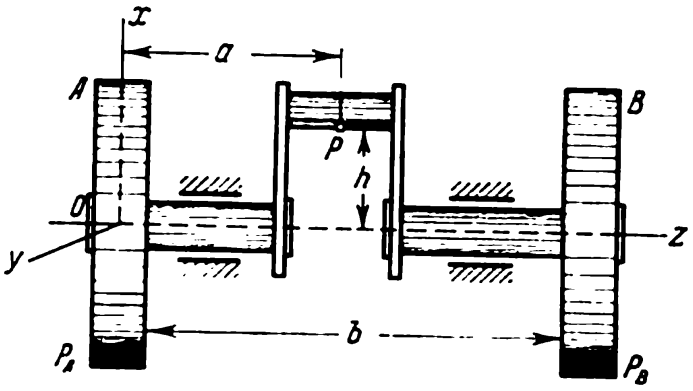


Fig. 357

Problème 156. L'arbre vilebrequin d'un moteur à gaz monocylindrique porte deux volants identiques A et B de rayon $r = 0{,}5$ m. Admettant que les flasques et le maneton de l'arbre sont une masse de poids $p = 21$ kgf disposée à la distance $h = 0{,}2$ m de l'axe, déterminer les poids p_A et p_B des masses qu'il faut disposer sur les jantes des volants pour équilibrer le système si $a = 0{,}6$ m, $b = 1{,}4$ m (fig. 357).

Solution. Menons les axes de coordonnées tournant avec le corps de manière que le coude de l'arbre soit disposé dans le plan Oxz (voir figure). Ce plan sera alors un plan de symétrie. Par conséquent, $y_C = 0$ et, comme l'axe Oy par rapport au point O sera alors un axe principal, $J_{yz} = 0$. De plus, si l'on désigne le poids de tout le système par P, on aura

$$x_C = \frac{ph}{P}, \; J_{xz} = \frac{p}{g} ha.$$

Le dernier résultat est la conséquence de ce que le moment d'inertie centrifuge du système est égal à la somme des moments d'inertie centrifuges de ses parties,

et de ce que pour les volants et les parties adjacentes de l'arbre les moments centrifuges J_{xz} sont nuls (l'axe Oz est un axe de symétrie).

Alors, comme on le voit des équations (69), pour les masses ajoutées les coordonnées $y_A = y_B = 0$ et les poids p_A et p_B doivent vérifier les égalités:

$$Px_C + p_A x_A + p_B x_B = 0, \quad J_{xz} + \frac{p_A}{g} x_A z_A + \frac{p_B}{g} x_B z_B = 0.$$

Puisque les masses sont fixées sur les jantes des volants, donc $z_A = 0$, $z_B = b$ et $x_A = x_B = -r$ (pour le signe plus les équations n'ont pas de solution, et les masses doivent donc être disposées en bas). Résolvant les équations, nous trouvons:

$$p_A = \frac{(b-a)\,h}{rb}\,p = 4{,}8\ \text{kgf}, \quad p_B = \frac{ah}{rb}\,p = 3{,}6\ \text{kgf}.$$

L'adjonction de ces masses rétablit l'équilibre du système et l'axe Oz devient l'axe principal d'inertie central (mais non pas l'axe de symétrie).

Chapitre XXX

PRINCIPE DES DÉPLACEMENTS VIRTUELS ET ÉQUATION GÉNÉRALE DE LA DYNAMIQUE

§ 163. Déplacements virtuels d'un système. Degré de liberté. Dans la première partie de ce cours nous avons étudié les règles de la statique dite géométrique. Pour déterminer à l'aide de ces règles les conditions d'équilibre d'un système de corps, il faut procéder à l'étude de l'équilibre de chaque corps séparément en remplaçant l'effet de l'action de toutes les liaisons appliquées par des forces de réactions a priori inconnues. Lorsque le nombre des corps dans le système est grand, ce procédé devient très compliqué et revient à résoudre un grand nombre d'équations avec plusieurs inconnues.

Nous allons maintenant, en utilisant diverses notions cinématiques et dynamiques, étudier un autre procédé plus général de résolution des problèmes de la statique, procédé qui permet de trouver immédiatement les conditions d'équilibre d'un système mécanique quelconque. La différence fondamentale entre ce procédé et ceux de la statique géométrique consiste à tenir compte de l'effet de l'action des liaisons non pas au moyen de l'introduction des forces de réactions, mais par l'étude des déplacements qu'on pourrait communiquer aux points du système en l'écartant de la position qu'il occupe. En mécanique, ces déplacements sont appelés *déplacements virtuels*.

Les déplacements virtuels des points d'un système doivent satisfaire à deux conditions: 1) ils doivent être *infiniment petits* car si les déplacements sont finis le système passera dans une autre position où les conditions d'équilibre peuvent être différentes; 2) ils doivent être compatibles avec *les liaisons appliquées au système* car dans le cas contraire nous aurions modifié le système mécanique étudié (le système deviendra autre).

Par exemple, pour la bielle-manivelle représentée sur la figure 358, le déplacement des points de la manivelle OA dans la position OA_1 ne satisfait pas aux conditions des déplacements virtuels car dans cette position les conditions d'équilibre du mécanisme sous l'action des forces P et Q seront déjà différentes. De même, on ne peut estimer virtuel le déplacement, même infiniment petit, du point B de la bielle le long de la droite BD ; il serait virtuel si au point B à la place du coulisseau il y avait un manchon oscillant (voir fig. 188, manchon C), c'est-à-dire pour un autre mécanisme.

Ainsi, *nous appellerons déplacement virtuel d'un système tout ensemble de déplacements infiniment petits des points du système qui est, au moment donné, compatible avec les liaisons appliquées à*

ce système. Le déplacement virtuel d'un point quelconque du système sera alors représenté par un vecteur élémentaire δs dirigé dans le sens du déplacement.

Dans le cas général, pour les points et les corps d'un système il peut exister une infinité de déplacements virtuels différents (nous ne considérons pas comme différents les déplacements δs et $-\delta s$). Néanmoins, pour chaque système, le caractère des liaisons qui lui sont appliquées détermine un certain nombre de déplacements

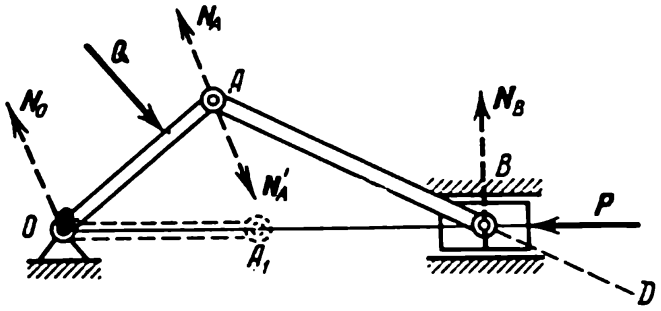


Fig. 358

virtuels indépendants l'un de l'autre et tels que tout autre déplacement virtuel sera égal à leur somme géométrique. Par exemple, une bille placée sur un plan horizontal peut être déplacée sur ce plan dans une infinité de directions. Néanmoins, chacun de ces déplacements virtuels δs peut être obtenu comme étant la somme de deux déplacements δs_1 et δs_2 suivant deux axes horizontaux rectangulaires ($\delta s = \delta s_1 + \delta s_2$).

Le nombre des déplacements virtuels indépendants entre eux d'un système est appelé degré de liberté de ce système. Ainsi, la bille sur le plan (si l'on admet qu'elle est un point matériel) a deux degrés de liberté. La bielle-manivelle aura évidemment un degré de liberté. Un point matériel libre a trois degrés de liberté (les déplacements suivant trois axes perpendiculaires seront indépendants). Un solide libre a 6 degrés de liberté (les déplacements indépendants seront: 3 déplacements de translation suivant les axes de coordonnées et 3 rotations autour de ces axes).

§ 164. Liaisons parfaites. Pour le point matériel assujetti à rester sur une surface lisse ou une courbe, la réaction N de la liaison est dirigée suivant la normale à cette surface (à la courbe) et pour un déplacement virtuel quelconque du point le travail élémentaire de la force N sera égal à zéro (voir § 114). Au § 149 il a été montré que si l'on néglige la résistance au roulement, la somme des travaux des forces de réaction N et F_{fr} sur un déplacement virtuel quelconque du corps roulant est également nulle. Les forces intérieures de tout système indéformable ont la même propriété (§ 148, fig. 320).

Examinons encore un exemple. Dans une bielle-manivelle (voir fig. 358), si l'on néglige le frottement aux axes et le long des glissières, le travail de la réaction N_O sera nul car le point O ne se déplace pas ; le travail de N_B est égal à zéro car la force N_B est perpendiculaire au déplacement virtuel du point B. Le travail de chacune des réactions N_A et N'_A (N_A est la pression de la bielle sur la manivelle, N'_A est la pression de la manivelle sur la bielle) n'est pas égal à zéro, mais la somme de ces travaux est nulle car $N_A = -N'_A$.

Convenons de désigner par la suite le travail élémentaire d'une force active quelconque F^a le long d'un déplacement virtuel quelconque δs par le symbole δA^a ($\delta A^a = F^a\,\delta s \cos\alpha$ où α est l'angle entre la direction de la force et celle du déplacement) et le travail de la réaction d'une liaison N par le symbole δA^N. Alors, pour toutes les liaisons que l'on a examinées ci-dessus

$$\sum \delta A_k^N = 0. \tag{70}$$

Les liaisons pour lesquelles la somme des travaux élémentaires de toutes les forces des réactions sur un déplacement virtuel quelconque du système est égale à zéro seront appelées liaisons parfaites.

On voit aisément que toutes les liaisons sans frottement, lorsque les corps glissent le long de ces liaisons, et les liaisons avec frottement (mais sans résistance au roulement), lorsque les corps roulent le long de ces liaisons, sont des liaisons parfaites.

§ 165. Principe des déplacements virtuels. Considérons un système de points matériels qui sous l'action combinée des forces et des liaisons qui lui sont appliquées se trouve en équilibre. Admettons, en outre, que toutes les liaisons du système sont parfaites. Choisissons un point arbitraire B_k du système et désignons la résultante de toutes les forces actives (extérieures et intérieures) qui lui sont appliquées par F_k^a, et la résultante de toutes les forces des réactions des liaisons (également extérieures et intérieures) par N_k. Alors, puisque le point B_k, de même que tout le système, se trouve en équilibre, $F_k^a + N_k = 0$ ou bien, $N_k = -F_k^a$. Donc, quel que soit le déplacement virtuel du point B_k les travaux δA_k^a et δA_k^N des forces F_k^a et N_k qui lui sont appliquées seront égaux en module et de directions opposées et, par conséquent, leur somme sera nulle [1], c'est-à-dire que l'on aura

$$\delta A_k^a + \delta A_k^N = 0.$$

[1] Le point B_k se trouve au repos et n'effectue aucun déplacement. Nous étudions ici quel serait le travail des forces en action si un déplacement quelconque virtuel était imprimé au point B_k.

En répétant les mêmes raisonnements, nous obtenons des égalités identiques pour tous les points du système. En les additionnant membre à membre, nous aurons:

$$\sum \delta A_k^{\mathrm{a}} + \sum \delta A_k^N = 0.$$

Mais la deuxième somme, d'après la propriété (70) des liaisons parfaites, est égale à zéro. Par conséquent,

$$\sum \delta A_k^{\mathrm{a}} = 0 \tag{71}$$

ou bien

$$\sum (F_k^{\mathrm{a}} \delta s_k \cos \alpha_k) = 0. \tag{71'}$$

Nous avons ainsi démontré que si un système mécanique, soumis uniquement à des liaisons parfaites, se trouve en équilibre, les forces actives qui agissent sur lui satisfont à la condition (71). La réciproque est également vraie, c'est-à-dire que si les forces actives appliquées à un système mécanique satisfont à la condition (71), le système se trouve en équilibre. Il en résulte le principe suivant des déplacements virtuels[1]: *pour qu'un système mécanique soumis uniquement à des liaisons parfaites soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des travaux élémentaires de toutes les forces actives qui lui sont appliquées pour tout déplacement virtuel du système soit égale à zéro.* La condition nécessaire et suffisante de l'équilibre d'un système mécanique quelconque s'exprime mathématiquement par l'égalité (71). Cette condition peut encore être exprimée analytiquement (voir § 112):

$$\sum (F_{kx}^{\mathrm{a}} \delta x_k + F_{ky}^{\mathrm{a}} \delta y_k + F_{kz}^{\mathrm{a}} \delta z_k) = 0. \tag{72}$$

Dans l'égalité (72) δx_k, δy_k, δz_k sont les projections du déplacement virtuel δs_k du point B_k sur les axes de coordonnées. Ils sont égaux aux accroissements élémentaires des coordonnées de ce point au cours de son déplacement et se calculent de la même manière que les différentielles des coordonnées.

Le principe des déplacements virtuels est important parce qu'il nous donne, sous forme générale, la condition de l'équilibre pour un système mécanique quelconque, alors que les méthodes de la statique géométrique exigent qu'on étudie l'équilibre de chaque corps du système séparément. De plus, l'application de ce principe permet de ne tenir compte que des forces actives et d'exclure ainsi à l'avance de l'étude toutes les réactions inconnues des liaisons lorsque ces dernières sont parfaites.

---

[1] Ce principe a été énoncé sous une forme presque identique à sa forme actuelle, mais sans démonstration, par le célèbre mathématicien suisse Jean Bernoulli (1667-1748). Sous sa forme générale, le principe a été pour la première fois énoncé et démontré par J. Lagrange (1788). La généralisation du principe au cas des liaisons non persistantes (liaisons dont le corps peut se libérer) a été donnée par M. Ostrogradski dans ses travaux de 1838-1842.

§ 166. Résolution des problèmes. Dans le cas d'un système à un degré de liberté, les égalités (71) ou (72) donnent immédiatement la condition d'équilibre du système. Si le système a plusieurs degrés de liberté, il faut poser séparément les conditions (71) ou (72) *pour chaque déplacement indépendant du système*; nous obtiendrons alors pour le système autant de conditions d'équilibre qu'il a de degrés de liberté.

Pour certains mécanismes plans on peut, lors de la résolution des problèmes, déterminer pratiquement le nombre de degrés de liberté de la façon suivante. Supposons que le mécanisme soit en mouvement. Si en arrêtant le mouvement de translation ou de rotation quelconque des éléments nous arrêtons en même temps le mouvement de tout le mécanisme, on peut affirmer que ce dernier n'a qu'un degré de liberté. Si après l'arrêt du mouvement de translation ou de rotation d'un élément du mécanisme celui-ci continue à se mouvoir, mais s'arrête quand on retient le mouvement d'un autre élément quelconque, il a alors deux degrés de liberté, etc.

Pour résoudre *géométriquement* un problème il faut: 1) représenter toutes les forces *actives* qui agissent sur le système; 2) communiquer au système un déplacement virtuel et noter sur la figure les vecteurs δs_k des déplacements élémentaires des points d'application des forces ou les angles $\delta\varphi_k$ des rotations élémentaires des corps sur lesquels agissent les forces (si le système a plusieurs degrés de liberté, il faut lui communiquer l'un des déplacements indépendants); 3) calculer les travaux élémentaires de toutes les forces actives pour le déplacement donné à l'aide des formules

$$\delta A_k^{\mathrm{a}} = F_{k\tau}^{\mathrm{a}} \delta s_k \quad \text{ou} \quad \delta A_k^{\mathrm{a}} = m_O(F_k^{\mathrm{a}})\,\delta\varphi_k$$

et poser la condition (71); 4) trouver la relation entre les grandeurs δs_k et $\delta\varphi_k$, incluses dans la condition (71), et exprimer toutes ces grandeurs par une grandeur quelconque, ce qu'on peut toujours faire puisqu'on a communiqué au système un déplacement *indépendant*.

Après avoir exprimé dans la condition (71) toutes les grandeurs δs_k, $\delta\varphi_k$ à l'aide d'une grandeur convenable, nous obtiendrons une équation permettant de déterminer la grandeur ou la relation cherchée dans le problème.

Si le système a plusieurs degrés de liberté, ce calcul doit être répété séparément pour chaque déplacement indépendant.

On peut trouver la relation entre les grandeurs δs_k, $\delta\varphi_k$: a) à partir des considérations purement géométriques (problèmes 157, 162); b) par un procédé cinématique, en déterminant la relation entre les vitesses correspondantes linéaires v_k ou angulaires ω_k qu'auraient les éléments du système s'il se déplaçait et, ensuite, en tenant compte de ce que $\delta s_k = v_k dt$ et $\delta\varphi_k = \omega_k dt$ (problèmes 158, 159 et autres).

On utilise habituellement le *procédé analytique* de calcul lorsqu'on n'arrive pas à trouver la relation entre δs_k, $\delta\varphi_k$ par une voie simple.

On pose dans ce cas la condition d'équilibre sous la forme (72). Pour cela, après avoir choisi les axes de coordonnées, on calcule les projections de toutes les forces actives sur ces axes et les coordonnées x_k, y_k, z_k des points d'application de ces forces en exprimant toutes les coordonnées à l'aide d'un seul paramètre (par exemple, la valeur de l'angle). Après quoi on détermine les grandeurs δx_k, δy_k, δz_k en dérivant les coordonnées x_k, y_k, z_k par rapport à ce paramètre.

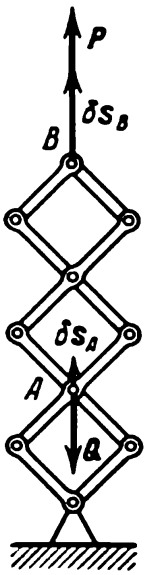


Fig. 359

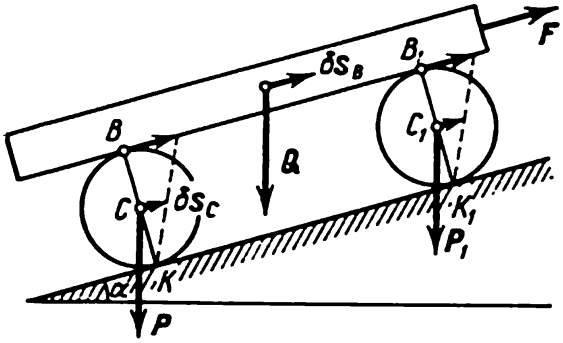


Fig. 360

Si l'on ne parvient pas à exprimer immédiatement toutes les coordonnées x_k, y_k, z_k à l'aide d'un seul paramètre, on introduit plusieurs paramètres et on établit ensuite la relation qui existe entre eux.

Notons en conclusion qu'on peut également se servir des conditions (71) ou (72) pour la résolution des problèmes comportant des frottements, à condition d'inclure la force de frottement au nombre des forces actives. On peut trouver de la même façon les réactions des liaisons si, en rejetant la liaison correspondante, on la remplace par la force de réaction que l'on inclut également au nombre des forces actives.

Problème 157. Trouver la relation qui existe entre les forces P et Q dans le mécanisme représenté sur la figure 359 quand il est en équilibre.

Solution. Si l'on communique au système un déplacement virtuel, toutes les diagonales des parallélogrammes formés par les tiges s'allongeront d'une même grandeur δs. Alors $\delta s_A = \delta s$, $\delta s_B = 3\delta s$. Posant la condition (71), nous obtenons:

$$P\delta s_B - Q\delta s_A = 0 \quad \text{ou} \quad (3P - Q)\,\delta s = 0,$$

d'où $Q = 3P$. Le résultat est obtenu très simplement.

Problème 158. Le poids d'une poutre est égal à Q, le poids de chacun des deux rouleaux cylindriques sur lesquels elle est posée est égal à P. Quelle force F faut-il appliquer à la poutre pour la maintenir en équilibre sur le plan incliné pour un angle α donné (fig. 360)? Le frottement des rouleaux contre le plan et la poutre fait impossible le glissement.

Solution. Si l'on néglige la résistance au roulement, le plan sera pour les rouleaux une liaison parfaite. En communiquant au système un déplacement virtuel, nous obtenons d'après la condition (71):

$$F\delta s_B - Q \sin \alpha \delta s_B - 2P \sin \alpha \delta s_C = 0,$$

où δs_B est le déplacement virtuel de la poutre coïncidant avec le déplacement du point B.

Le point de contact K est le centre instantané des vitesses du rouleau. Par conséquent, $v_B = 2v_C$ et $\delta s_B = 2\delta s_C$ puisque $\delta s_B = v_B\, dt$, $\delta s_C = v_C\, dt$. Portant

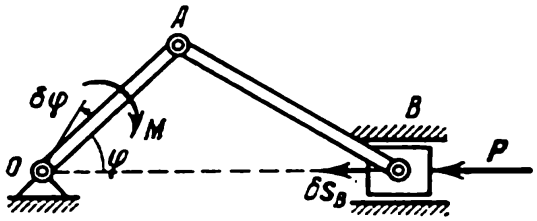


Fig. 361

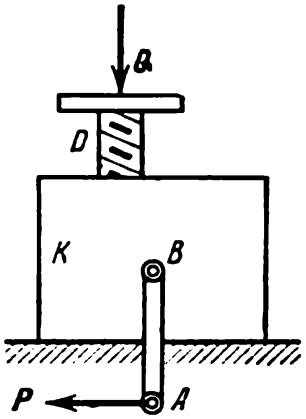


Fig. 362

cette valeur de δs_B dans l'équation précédente, nous trouvons en définitive

$$F = (Q + P) \sin \alpha.$$

Problème 159. Trouver la relation entre le moment M du couple qui agit sur la manivelle d'une bielle-manivelle (fig. 361) et la force de pression P sur le piston à l'état d'équilibre. La longueur de la manivelle $OA = r$ et celle de la bielle $AB = l$.

Solution. La condition d'équilibre (71) donne

$$M\delta\varphi - P\delta s_B = 0 \text{ ou } M\omega_{OA} = Pv_B,$$

puisque $\delta\varphi = \omega_{OA}\, dt$, $\delta s_B = v_B\, dt$. La solution revient à trouver la relation entre v_B et ω_{OA}. Ce problème cinématique a été résolu auparavant (§ 82, problème 71). En utilisant le résultat qui y a été obtenu, nous trouvons:

$$M = Pr\left(1 + \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right)\sin\varphi.$$

Problème 160. Pour le réducteur considéré au problème 91 (voir § 96), trouver la relation entre le moment de rotation M_A appliqué à l'arbre menant A et le moment des résistances M_B appliqué à l'arbre mené B lorsque les deux arbres sont animés d'un mouvement de rotation uniforme.

Solution. Lorsque la rotation est uniforme, la relation entre M_A et M_B sera la même que pendant l'équilibre. Par conséquent, d'après la condition (71) on aura

$$M_A\delta\varphi_A - M_B\delta\varphi_B = 0 \quad \text{ou} \quad M_A\omega_A = M_B\omega_B,$$

puisque $\delta\varphi_A = \omega_A dt$, $\delta\varphi_B = \omega_B dt$. D'où, en utilisant le résultat obtenu au cours de la résolution du problème 91, nous trouvons:

$$M_A = \frac{\omega_B}{\omega_A} M_B = \frac{n_B}{n_A} M_B = 2{,}8 M_B.$$

Problème 161. Trouver la relation entre les forces P et Q dans le mécanisme de levage dont les organes sont dissimulés par la boîte K (fig. 362) si l'on sait qu'à chaque tour de la manivelle AB ($AB = l$) la vis D s'élève de la grandeur h.

Solution. On obtient la condition d'équilibre (71),

$$Pl\delta\varphi_{AB} - Q\delta s_D = 0.$$

En admettant qu'à la rotation uniforme de la manivelle correspond également une rotation uniforme de la vis, nous aurons:

$$\frac{\delta\varphi_{AB}}{2\pi} = \frac{\delta s_D}{h} \text{ ou } \delta\varphi_{AB} = \frac{2\pi}{h}\delta s_D.$$

Portant cette valeur de $\delta\varphi_{AB}$ dans l'égalité précédente, nous trouvons

$$Q = \frac{2\pi l}{h} P.$$

Remarquons que par les méthodes de la statique géométrique il est impossible de résoudre ce problème simple, car les organes du mécanisme sont inconnus.

Problème 162. Une poutre composée de deux barres articulées en C soutient une charge P (fig. 363, *a*). Les dimensions de la poutre et la disposition des supports sont indiquées sur la figure. En négligeant le poids de la poutre, déterminer la pression exercée sur le support B.

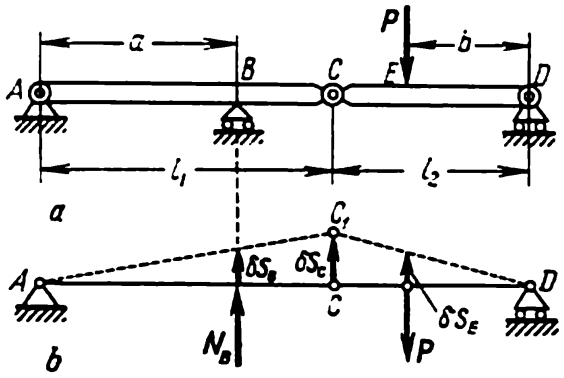


Fig. 363

Solution. Supprimons le support B et remplaçons-le par sa réaction N_B numériquement égale à la pression cherchée (fig. 363, *b*). Communiquons maintenant au système un déplacement virtuel et posons la condition (71)

$$N_B\delta s_B - P\delta s_E = 0.$$

Nous trouvons la relation entre δs_B et δs_E des proportions

$$\frac{\delta s_B}{a} = \frac{\delta s_C}{l_1}, \quad \frac{\delta s_E}{b} = \frac{\delta s_C}{l_2}, \text{ d'où } \delta s_E = \frac{bl_1}{al_2}\delta s_B.$$

Par conséquent,

$$N_B = \frac{bl_1}{al_2} P.$$

Si l'on avait appliqué la méthode de la statique géométrique, la résolution aurait été plus longue (il aurait fallu étudier l'équilibre des éléments de la poutre, introduire en outre les réactions des autres liaisons puis exclure ces réactions du système d'équations d'équilibre).

Problème 163. Dans un mécanisme plan à transmission différentielle (voir § 96), sur l'axe A, indépendamment l'un de l'autre, sont montés le pignon *1* de rayon r_1 et la manivelle AB supportant l'axe B du pignon *2* de rayon r_2 (fig. 364).

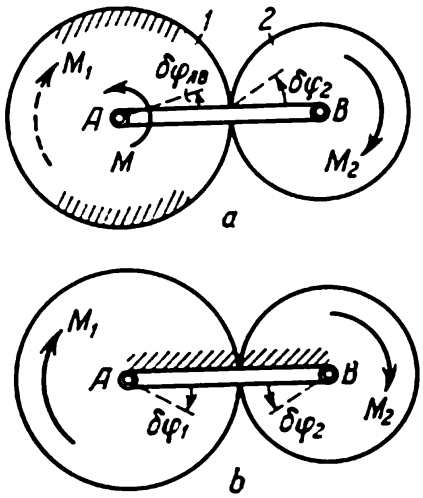


Fig. 364

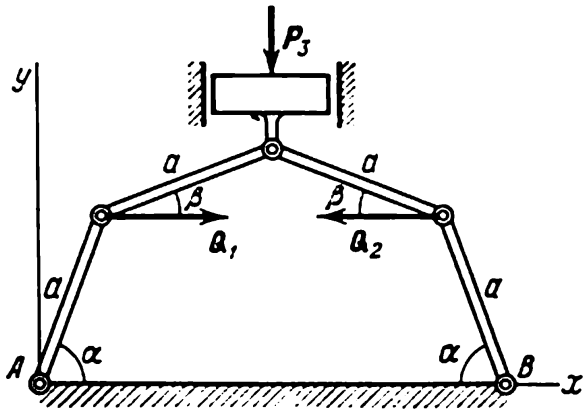


Fig. 365

Sur la manivelle agit le moment de rotation M et sur les pignons *1* et *2* les moments de résistance M_1 et M_2. Trouver les valeurs de M_1 et M_2 lorsque le mécanisme est en équilibre.

Solution. Le mécanisme a deux degrés de liberté car deux déplacements virtuels indépendants sont possibles: a) la rotation de la manivelle AB avec le pignon *1* immobile et b) la rotation du pignon *1* avec la manivelle AB immobile. Communiquons d'abord au système un déplacement virtuel pour lequel le pignon *1* reste immobile (fig. 364, *a*). Pour ce déplacement l'équation (71) donne

$$M\delta\varphi_{AB} - M_2\delta\varphi_2 = 0.$$

Mais lorsque le pignon (*1*) est immobile, le point de contact des pignons est un centre instantané des vitesses pour le pignon *2*. Par conséquent, $v_B = \omega_2 r_2$. En même temps, $v_B = \omega_{AB}(r_1 + r_2)$. D'où $\omega_2 r_2 = \omega_{AB}(r_1 + r_2)$ ou $\delta\varphi_2 r_2 = \delta\varphi_{AB}(r_1 + r_2)$ et nous obtenons:

$$M_2 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} M.$$

Communiquons maintenant au système un autre déplacement virtuel, indépendant du premier, pendant lequel la manivelle AB est immobile (fig. 364, *b*). Pour ce déplacement, d'après la condition (71), nous aurons

$$M_1\delta\varphi_1 - M_2\delta\varphi_2 = 0.$$

Mais lorsque la manivelle est immobile

$$\frac{\delta\varphi_2}{\delta\varphi_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} \text{ et } M_1 = \frac{r_1}{r_2} M_2.$$

Nous trouvons en définitive:

$$M_1=\frac{r_1}{r_1+r_2}M,\ M_2=\frac{r_2}{r_1+r_2}M.$$

Problème 164. Trouver pour la presse représentée sur la figure 365 la relation entre les forces Q_1, Q_2 et P_3 en état d'équilibre sachant que $Q_1 = Q_2 = Q$ et $P_3=P$. Les angles α et β sont donnés. Négliger le poids des tiges.

S o l u t i o n. Afin de fournir un exemple de solution analytique, utilisons la condition d'équilibre (72). Plaçons l'origine au point *immobile A* et menons les axes x et y; nous obtenons:

$$Q_{1x}\delta x_1+Q_{2x}\delta x_2+P_{3y}\delta y_3=0, \qquad \text{(a)}$$

car les autres projections des forces sont nulles.

Pour trouver δx_1, δx_2, δx_3, calculons les coordonnées x_1, x_2, y_3 des points d'application des forces en les exprimant par les angles α et β. Désignons la longueur de la tige par a, nous obtenons: $x_1 = a\cos\alpha$, $x_2 = a\cos\alpha + 2a\cos\beta$, $y_3 = a(\sin\beta + \sin\alpha)$.

En différentiant ces expressions, nous trouvons

$$\delta x_1=-a\sin\alpha\delta\alpha,\quad \delta x_2=-a(\sin\alpha\,\delta\alpha+2\sin\beta\,\delta\beta),$$
$$\delta y_3=a(\cos\beta\,\delta\beta+\cos\alpha\,\delta\alpha).$$

En portant les valeurs obtenues dans l'égalité (a) et en tenant compte de ce que $Q_{1x} = Q$, $Q_{2x} = -Q$, $P_{3y} = -P$, nous aurons:

$$2Q\sin\beta\,\delta\beta - P(\cos\beta\,\delta\beta + \cos\alpha\,\delta\alpha) = 0. \qquad \text{(b)}$$

Pour trouver la relation entre $\delta\alpha$ et $\delta\beta$, utilisons le fait que dans le cas considéré la distance AB = const. Par conséquent, $2a(\cos\alpha + \cos\beta)$ = const. En différentiant cette égalité, nous obtenons

$$\sin\alpha\,\delta\alpha+\sin\beta\,\delta\beta=0 \text{ et } \delta\alpha=-\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\delta\beta.$$

En portant la valeur trouvée de $\delta\alpha$ dans l'égalité (b), nous aurons:

$$2Q\sin\beta - P(\cos\beta - \operatorname{ctg}\alpha\sin\beta) = 0,$$

d'où

$$P=\frac{2Q}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Lorsque l'angle β est voisin de α, la pression P devient très grande.

§ 167. Equation générale de la dynamique. Le principe des déplacements virtuels fournit un procédé général de résolution des problèmes de la statique. D'autre part, le principe de d'Alembert permet d'utiliser les procédés de la statique pour la résolution des problèmes de la dynamique. Par conséquent, en appliquant simultanément ces deux principes, nous pouvons obtenir un procédé général de résolution des problèmes de la dynamique.

Considérons un système de points matériels soumis à des liaisons parfaites. Si à tous les points du système, en plus des forces actives F_k^a et des réactions N_k, on applique les forces correspondantes d'inertie $F_k^{in} = -m_k w_k$, alors, selon le principe de d'Alembert, le système de forces obtenu se trouvera en équilibre. Appliquant alors à ses

forces le principe des déplacements virtuels, nous obtiendrons:

$$\sum \delta A_k^{\mathrm{a}} + \sum \delta A_k^{\mathrm{in}} + \sum \delta A_k^{N} = 0.$$

Mais la dernière somme, d'après la condition (70), est égale à zéro et, en définitive, on aura

$$\sum \delta A_k^{\mathrm{a}} + \sum \delta A_k^{\mathrm{in}} = 0. \tag{73}$$

L'égalité (73) est l'expression de l'équation générale de la dynamique. Il en résulte que *pour un système quelconque en mouvement, soumis à des liaisons parfaites, la somme des travaux élémentaires de toutes les forces actives appliquées et de toutes les forces d'inertie le long d'un déplacement virtuel quelconque du système est à tout moment égale à zéro.*

Sous sa forme analytique, l'équation (73) devient

$$\sum [(F_{kx}^{\mathrm{a}} + F_{kx}^{\mathrm{in}})\, \delta x_k + (F_{ky}^{\mathrm{a}} + F_{ky}^{\mathrm{in}})\, \delta y_k + (F_{kz}^{\mathrm{a}} + F_{kz}^{\mathrm{in}})\, \delta z_k] = 0. \tag{74}$$

Les équations (73) ou (74) permettent d'écrire les équations différentielles du mouvement d'un système mécanique quelconque.

Si le système se compose de plusieurs solides, pour poser les équations il faut ajouter aux forces actives qui agissent sur chaque corps une force égale au vecteur résultant des forces d'inertie appliquée en un centre quelconque, et un couple de moment égal au moment résultant des forces d'inertie par rapport à ce centre, puis on applique le principe des déplacements virtuels.

Problème 165. Dans un régulateur centrifuge qui tourne uniformément autour d'un axe vertical à la vitesse angulaire ω (fig. 366) le poids de chacune des sphères A_1 et A_2 est égal à p et le poids du manchon C_1C_2 est égal à Q. En négligeant le poids des tiges, déterminer l'angle α si $OA_1 = OA_2 = l$; $OB_1 = OB_2 = B_1C_1 = B_2C_2 = a$.

Solution. Ajoutons aux forces actives $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ et $\boldsymbol{Q}_3$ les forces centrifuges d'inertie $\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{in}}$ et $\boldsymbol{F}_2^{\mathrm{in}}$ (la force d'inertie du manchon sera, évidemment, égale à zéro) et posons l'équation générale de la dynamique sous la forme (74). Alors, en calculant les projections de toutes les forces sur les axes de coordonnées, nous aurons:

$$p_1\delta x_1 + p_2\delta x_2 - F_1^{\mathrm{in}}\delta y_1 + F_2^{\mathrm{in}}\delta y_2 + Q_3\delta x_3 = 0. \tag{a}$$

D'autre part

$$Q_3 = Q\,; \quad p_1 = p_2 = p\,; \quad F_1^{\mathrm{in}} = F_2^{\mathrm{in}} = \frac{p}{g}\, w_A = \frac{p}{g}\,\omega^2\, l \sin\alpha.$$

Les coordonnées des points d'application des forces sont

$$x_1 = x_2 = l\cos\alpha\,; \quad y_2 = -y_1 = l\sin\alpha\,;$$
$$x_3 = 2a\cos\alpha.$$

En différentiant ces expressions, nous trouvons:

$$\delta x_1 = \delta x_2 = -l\sin\alpha\,\delta\alpha\,; \quad \delta y_2 = -\delta y_1 = l\cos\alpha\,\delta\alpha\,;$$
$$\delta x_3 = -2a\sin\alpha\,\delta\alpha.$$

Portant les valeurs trouvées dans l'équation (a), nous obtenons:

$$\left(-2pl\sin\alpha+2\frac{p}{g}l^2\omega^2\sin\alpha\cos\alpha-2Qa\sin\alpha\right)\delta\alpha=0.$$

D'où l'on obtient en définitive:

$$\cos\alpha=\frac{pl+Qa}{pl^2\omega^2}g.$$

Puisque $\cos\alpha\leqslant 1$, les sphères s'écarteront lorsque

$$\omega^2>\frac{pl+Qa}{pl^2}g.$$

Lorsque ω croît, l'angle α augmente, tendant vers 90° lorsque $\omega\to\infty$.

Problème 166. Dans le dispositif de levage représenté sur la figure 367, au pignon *2* de poids P_2 et de rayon de giration ρ_2 est appliqué le moment de rotation M. Déterminer l'accélération de la charge soulevée A de poids Q en négli-

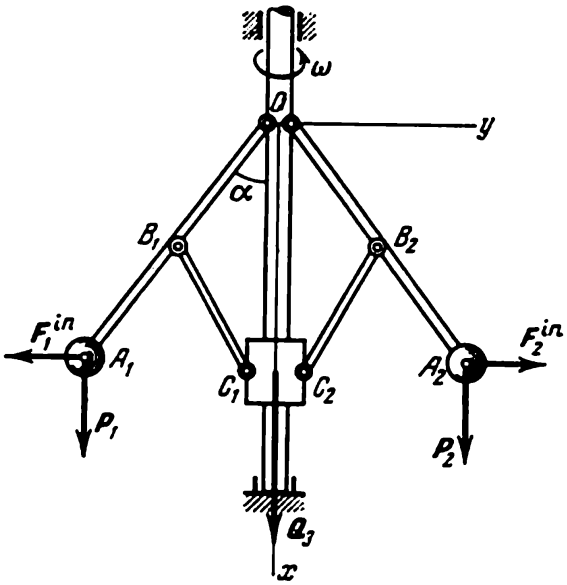


Fig. 366

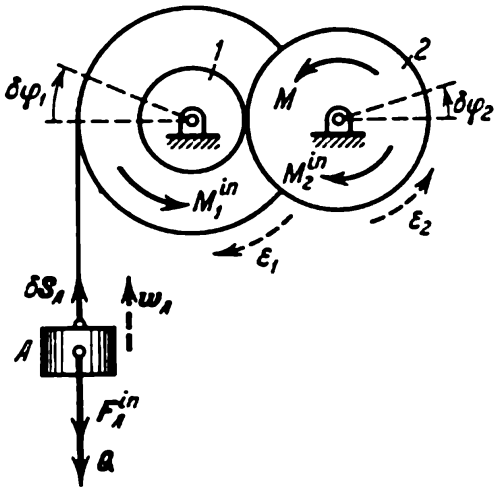


Fig. 367

geant le poids de la corde et le frottement aux axes. Le cylindre sur lequel s'enroule la corde et auquel le pignon *1* est fixé rigidement a un poids global P_1 et un rayon de giration ρ_1. Les rayons des pignons sont égaux à r_1 et r_2, le rayon du cylindre à r.

Solution. Représentons la force active Q qui agit sur le système et le moment de rotation M (les forces P_1 et P_2 n'effectuent aucun travail); ajoutons-leur la force d'inertie de la charge F_A^{in} et les couples de moments M_1^{in} et M_2^{in} auxquels se réduisent les forces d'inertie des corps en rotation (voir § 159). Ces grandeurs sont égales en module à:

$$F_A^{in}=\frac{Q}{g}w_A;\quad |M_1^{in}|=\frac{P_1}{g}\rho_1^2\varepsilon_1;\quad |M_2^{in}|=\frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2.$$

Les directions de toutes les grandeurs sont indiquées sur la figure. Communiquant au système un déplacement virtuel et posant l'équation (73), nous obtenons :

$$-(Q+F_A^{in})\,\delta s_A - M_1^{in}\delta\varphi_1 + (M - M_2^{in})\,\delta\varphi_2 = 0.$$

Exprimons tous les déplacements par $\delta\varphi_1$, nous aurons :

$$\delta s_A = r\delta\varphi_1\,;\quad \frac{\delta\varphi_2}{\delta\varphi_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} \text{ et } \delta\varphi_2 = \frac{r_1}{r_2}\,\delta\varphi_1.$$

L'équation du mouvement deviendra en définitive

$$Q\left(1+\frac{w_A}{g}\right)r + \frac{P_1}{g}\rho_1^2\varepsilon_1 + \frac{P_2}{g}\rho_2^2\varepsilon_2\frac{r_1}{r_2} - M\frac{r_1}{r_2} = 0.$$

Exprimons les grandeurs ε_1 et ε_2 qui en font partie en fonction de l'accélération cherchée w_A. En tenant compte du fait que ε_1 et ε_2 sont liés entre elles

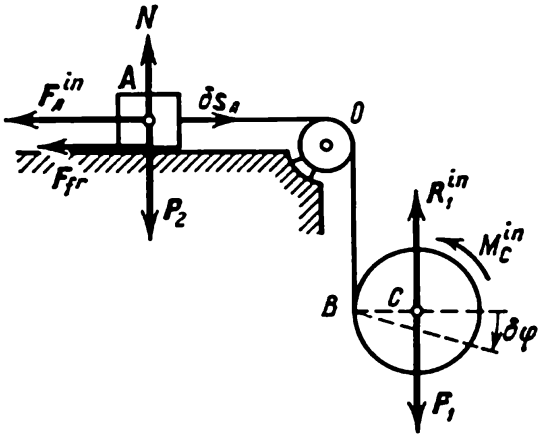


Fig. 368

de la même manière que ω_1 et ω_2, nous obtenons :

$$\varepsilon_1 = \frac{w_A}{r},\quad \varepsilon_2 = \frac{r_1}{r_2}\varepsilon_1 = \frac{r_1}{r_2}\frac{w_A}{r}.$$

En définitive, nous trouvons :

$$w_A = \frac{\frac{r_1}{r_2}M - rQ}{rQ + \frac{\rho_1^2}{r}P_1 + \frac{\rho_2^2}{r}\frac{r_1^2}{r_2^2}P_2}\,g.$$

On aurait pu également résoudre ce problème à l'aide du théorème de la variation de l'énergie cinétique (voir § 150).

Problème 167. Autour d'un cylindre de poids p_1 est enroulé un fil qui passe par la poulie O et auquel est attachée la masse A de poids p_2 (fig. 368). La masse peut glisser le long d'un plan horizontal ; le coefficient de frottement de la masse contre le plan est égal à f. Trouver l'accélération de la masse et du centre C du cylindre pendant le mouvement du système en négligeant les masses de la poulie O et du fil.

Solution. Si le mouvement commence à partir de la position de repos, le centre C du cylindre se déplace verticalement et le système a deux degrés de

liberté (les déplacements indépendants sont la rotation du cylindre par rapport au fil quand la masse est immobile et le déplacement de la masse quand le cylindre ne tourne pas).

Ajoutons aux forces p_1, p_2 et F_{fr} qui agissent sur le système les forces d'inertie du cylindre, qui se réduisent au vecteur résultant R_1^{in} et au couple de moment M_C^{in} (voir § 159), et la force d'inertie de la masse F_A^{in}. D'autre part, en module

$$F_A^{in} = \frac{p_2}{g} w_A, \quad R_1^{in} = \frac{p_1}{g} w_C, \quad |M_C^{in}| = J_C \varepsilon = \frac{p_1}{2g} r^2 \frac{w_C - w_A}{r}.$$

Ce dernier résultat est la conséquence du fait que si le point C du cylindre est animé de la vitesse v_C et le point B (avec le fil), de la vitesse $v_B = v_A$, la vitesse angulaire du cylindre $\omega = \frac{v_C - v_A}{r}$ (voir § 81, formule 56) et, par conséquent, $\varepsilon = \frac{w_C - w_A}{r}$; de plus, pour le cylindre $J_C = 0{,}5\, mr^2$, où r est le rayon du cylindre.

Communiquons maintenant au système le déplacement virtuel δs_A pendant lequel le cylindre ne tourne pas mais se déplace d'un mouvement de translation avec la masse. Durant ce déplacement, le couple de moment M_C^{in} n'effectue aucun travail et, d'après l'équation (73), nous obtenons:

$$(-F_{fr} - F_A^{in} - R_1^{in} + p_1)\, \delta s_A = 0.$$

De là, puisque $F_{fr} = fp_2$, nous trouvons:

$$\frac{p_1}{g} w_C + \frac{p_2}{g} w_A = p_1 - fp_2. \tag{a}$$

Maintenant communiquons au système un autre déplacement virtuel, indépendant du premier, pendant lequel la masse A est immobile et le cylindre effectue une rotation autour du point B (qui, pour le déplacement en question, est le centre instantané de rotation) de l'angle $\delta\varphi$. Pour ce déplacement, l'équation (73) donne

$$(p_1 - R_1^{in})\, r\delta\varphi - M_C^{in}\delta\varphi = 0.$$

Portant ici les valeurs de R_1^{in} et M_C^{in}, nous obtenons en définitive:

$$3w_C - w_A = 2g. \tag{b}$$

La résolution du système d'équations (a) et (b) nous donne les accélérations cherchées

$$w_A = \frac{p_1 - 3fp_2}{p_1 + 3p_2} g, \quad w_C = \frac{p_1 + (2-f)\, p_2}{p_1 + 3p_2} g.$$

La solution obtenue montre que le mouvement considéré est possible lorsque $f \leqslant p_1/3p_2$. Si le coefficient de frottement est supérieur à cette quantité, la masse A sera immobile. Alors le déplacement δs_A sera impossible pour le système et l'équation (a) ne sera pas vérifiée. Le mouvement du centre du cylindre sera alors décrit par l'équation (b) si l'on y pose $w_A = 0$. Par conséquent, lorsque $f > p_1/3p_2$, la masse A est immobile et le centre C du cylindre descend avec une accélération $w_C = 2/3g$.

Attirons l'attention sur le fait que pour un système ayant plus d'un degré de liberté, on ne peut pas poser l'équation du mouvement par le procédé exposé au § 150. Dans ces cas il faut appliquer l'équation générale de la dynamique.

Chapitre XXXI

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME EN COORDONNÉES GÉNÉRALISÉES (ÉQUATIONS DE LAGRANGE)

§ 168. Coordonnées et vitesses généralisées. Le nombre de coordonnées (paramètres) déterminant la position d'un système mécanique dépend du nombre de points (de corps) dont le système est composé ainsi que du nombre et de la nature des liaisons. Nous allons considérer uniquement des systèmes à liaisons géométriques. On appelle géométriques des liaisons qui imposent des contraintes seulement à la position des points du système dans l'espace et non à leur vitesse. On sait (voir § 163) que le degré de liberté d'un système mécanique est donné par le nombre de ses déplacements virtuels indépendants. Les liaisons géométriques diminuent d'un même nombre d'unités aussi bien le nombre de déplacements virtuels indépendants du système que celui de coordonnées indépendantes déterminant sa position. Ainsi, par exemple, si on relie un point quelconque B_k du système de coordonnées x_k, y_k, z_k à un point fixe A (x_A, y_A, z_A) au moyen d'une tige rigide de longueur l, le nombre de déplacements virtuels du système s'en trouve diminué d'une unité, car cette nouvelle liaison rend impossible le déplacement du point le long de la droite AB_k. D'autre part, les coordonnées du point satisferont toujours à l'équation $(x_A - x_k)^2 + (y_A - y_k)^2 + (z_A - z_k)^2 = l^2$, qui est l'expression mathématique de cette liaison ; par conséquent, le nombre de coordonnées indépendantes entre elles se trouve diminué également d'une unité. Ainsi, le nombre de coordonnées indépendantes déterminant la position d'un système à liaisons géométriques est égal à son degré de liberté. On peut choisir comme coordonnées indépendantes les paramètres de dimension et de sens géométrique (physique) quelconques, par exemple, les segments de droites ou d'arcs, les angles, les aires, etc.

Les paramètres indépendants entre eux de dimension quelconque qui déterminent de façon univoque la position d'un système mécanique dans l'espace et dont le nombre est égal à son degré de liberté sont appelés *coordonnées généralisées* du système. Nous désignerons par q les coordonnées généralisées. Ainsi, si un système possède s degrés de liberté (c'est-à-dire qu'il admet s déplacements virtuels indépendants), sa position est déterminée par les coordonnées généralisées

$$q_1, q_2, \ldots, q_s. \tag{75}$$

Inversement, s'il a été établi que la position du système est déterminée de façon univoque par s paramètres quelconques indépendants entre eux le système a s degrés de liberté.

Les coordonnées généralisées étant indépendantes entre elles, leurs accroissements élémentaires

$$\delta q_1,\ \delta q_2,\ \ldots,\ \delta q_s \tag{76}$$

le seront également. Chacune des quantités (76) détermine un déplacement virtuel du système indépendant des autres.

Des coordonnées cartésiennes du système on peut passer aux coordonnées généralisées. Comme dans toute autre transformation de coordonnées, les coordonnées cartésiennes x_k, y_k, z_k d'un point quelconque du système mécanique considéré peuvent être exprimées en coordonnées généralisées à l'aide des relations de la forme $x_k = x_k(q_1, q_2, \ldots, q_s)$, etc. Etant donné que le rayon vecteur $\boldsymbol{r}_k$ d'un point arbitraire du système s'exprime par les coordonnées de ce point comme $\boldsymbol{r}_k = x_k\boldsymbol{i} + y_k\boldsymbol{j} + z_k\boldsymbol{k}$, il est légitime d'écrire

$$\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_s). \tag{77}$$

Les coordonnées généralisées d'un système en mouvement varient continûment avec le temps et la loi de ce mouvement sera donnée par les équations

$$q_1 = f_1(t),\quad q_2 = f_2(t),\ \ldots,\ q_s = f_s(t). \tag{78}$$

Les équations (78) sont des *équations du mouvement du système en coordonnées généralisées.*

Les dérivées des coordonnées généralisées par rapport au temps sont appelées *vitesses généralisées du système.* Nous convenons de désigner les vitesses généralisées comme

$$\dot{q}_1,\ \dot{q}_2,\ \ldots,\ \dot{q}_s,$$

où $\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}$, etc. La dimension de la vitesse généralisée est déterminée par celle de la coordonnée généralisée correspondante. Si q est une grandeur linéaire, $\dot{q}$ est une vitesse linéaire; si q est un angle, $\dot{q}$ est une vitesse angulaire; si q est une aire, $\dot{q}$ est une vitesse *aréolaire*, etc. On voit que la notion de vitesse généralisée englobe toutes les notions de vitesse étudiées dans la cinématique.

Exemple 1. Le pendule mathématique plan de la figure 369 possède évidemment un degré de liberté ($s = 1$) ; par conséquent sa position peut être donnée par une seule coordonnée généralisée q. On peut prendre pour coordonnée q l'angle φ, ou la longueur S de l'arc $\overset{\frown}{AM}$, ou l'aire σ du secteur OAM, ayant indiqué dans chaque cas le sens positif et négatif de la coordonnée choisie. Le choix de l'abscisse x du point M en tant que coordonnée généralisée n'est pas heureux, car elle ne détermine pas de façon univoque la position du point M (pour un x donné, le pendule peut être écarté à gauche ou à droite de la verticale).

Si l'on choisit l'angle φ pour coordonnée généralisée, on obtient le déplacement virtuel du pendule en communiquant à l'angle l'accroissement $\sigma\varphi$. Les

coordonnées cartésiennes x et y s'expriment en fonction de φ comme $x = l \cos \varphi$, $y = l \sin \varphi$, ou $l = OM$. Conformément à la relation (77) on a $r = r(\varphi)$. La vitesse généralisée est $\dot{\varphi}$ (vitesse angulaire du fil OM).

Exemple 2. Le pendule plan double de la figure 370 a évidemment deux degrés de liberté. On peut prendre pour coordonnées généralisées les angles φ et ψ ($q_1 = \varphi$, $q_2 = \psi$) ; il est clair que ces angles sont indépendants l'un de l'autre, car on peut varier φ sans que ψ change, et inversement. Les grandeurs $\delta\varphi$ et $\delta\psi$ déterminent les déplacements virtuels indépendants du système. Les coordonnées

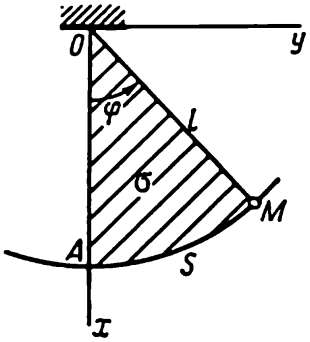


Fig. 369

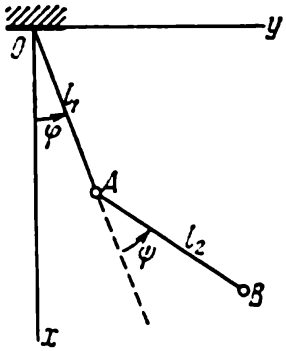


Fig. 370

cartésiennes des points A et B s'expriment comme suit en fonction des coordonnées généralisées : $x_A = l_1 \cos \varphi$, $x_B = l_1 \cos \varphi + l_2 \cos (\varphi + \psi)$, etc., où $l_1 = OA$, $l_2 = AB$. En conformité de l'égalité (77) on a donc $r_A = r_A(\varphi)$, $r_B = r_B(\varphi, \psi)$. Les vitesses généralisées sont $\dot{\varphi}$ et $\dot{\psi}$.

§ 169. Forces généralisées. Nous allons déduire les équations de Lagrange de l'équation générale de la dynamique (73) écrite en termes du travail élémentaire. Pour simplifier les calculs, nous écrirons le travail élémentaire comme le produit scalaire [1]. Par analogie avec la formule (36) du § 112, le travail élémentaire de la force F sur le déplacement virtuel vaut

$$\delta A = F \delta s \cos \alpha. \tag{79}$$

En comparant les égalités $dr = v\,dt$ et $ds = v\,dt$, on voit que $ds = |dr|$ et, d'une façon analogue, $\delta s = |\delta r|$, où δr est l'accroissement élémentaire du rayon vecteur du point d'application de la force F. L'égalité (79) devient alors $\delta A = F\,|\delta r| \cos \alpha$, α étant l'angle entre les vecteurs F et δr. Par conséquent, le travail élémentaire de la force F peut s'écrire sous la forme du produit scalaire

$$\delta A = F \cdot \delta r. \tag{80}$$

[1] On appelle produit scalaire de deux vecteurs a et b la grandeur scalaire égale au produit des modules de ces vecteurs par le cosinus de l'angle qu'ils forment, c'est-à-dire $a \cdot b = ab \cos \alpha$.

Considérons un système mécanique de points matériels auquel sont appliquées les forces $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \ldots, \boldsymbol{F}_n$. Supposons que le système possède s degrés de liberté et que sa position soit donnée par les coordonnées généralisées (75). Communiquons au système un déplacement virtuel tel que la coordonnée q_1 acquière l'accroissement δq_1, les autres coordonnées restant inchangées. Chaque rayon vecteur $\boldsymbol{r}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, des points du système acquiert alors l'accroissement élémentaire $(\delta \boldsymbol{r}_k)_1$ [1]. Etant donné que, en conformité avec (77), $\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_k(q_1, q_2, \ldots, q_s)$ et que pour le déplacement virtuel considéré seule la coordonnée q_1 change les autres gardant leurs valeurs inchangées, l'accroissement $(\delta \boldsymbol{r}_k)_1$ se calcule comme la différentielle partielle par rapport à q_1 :

$$(\delta \boldsymbol{r}_k)_1 = \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1. \tag{81}$$

Calculons maintenant la somme des travaux élémentaires, que nous désignerons δA_1, de toutes les forces appliquées au système agissant sur le déplacement considéré. En utilisant la formule (80) et l'égalité (81) nous obtenons

$$\delta A_1 = \boldsymbol{F}_1 \cdot (\delta \boldsymbol{r}_1)_1 + \boldsymbol{F}_2 \cdot (\delta \boldsymbol{r}_2)_1 + \ldots + \boldsymbol{F}_n \cdot (\delta \boldsymbol{r}_n)_1 =$$
$$= \boldsymbol{F}_1 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial q_1} \delta q_1 + \boldsymbol{F}_2 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_2}{\partial q_2} \delta q_1 + \ldots + \boldsymbol{F}_n \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_1} \delta q_1.$$

Rappelons que le point désigne ici le produit scalaire de deux vecteurs. En sortant des parenthèses le facteur commun δq_1 nous aurons définitivement

$$\delta A_1 = Q_1 \delta q_1, \tag{82}$$

avec

$$Q_1 = \sum \boldsymbol{F}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1}. \tag{83}$$

Par analogie avec l'égalité $\delta A = F_\tau \delta s$ donnant le travail élémentaire de la force $\boldsymbol{F}$, on appelle la grandeur Q_1 la force généralisée correspondant à la coordonnée q_1.

En communiquant au système un autre déplacement virtuel indépendant, pour lequel seule la coordonnée q_2 change, on obtient pour le travail élémentaire de toutes les forces du système sur ce déplacement l'expression suivante :

$$\delta A_2 = Q_2 \delta q_2, \tag{84}$$

où

$$Q_2 = \sum \boldsymbol{F}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_2} \tag{85}$$

est la force généralisée correspondant à la coordonnée q_2, etc.

[1] La notation $(\delta \boldsymbol{r}_k)_1$ désigne l'accroissement élémentaire du rayon vecteur $\boldsymbol{r}_k$ qui résulte du changement de la seule coordonnée q_1 d'une valeur δq_1.

Si maintenant le système effectue un déplacement virtuel tel que toutes ses coordonnées généralisées changent simultanément, la somme des travaux élémentaires sur ce déplacement de toutes les forces appliquées au système sera évidemment donnée par

$$\sum \delta A_k = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_s\delta q_s. \tag{86}$$

La formule (86) est *l'expression, en coordonnées généralisées, du travail élémentaire de toutes les forces agissant sur le système.* On voit que les *forces généralisées ne sont autre chose que les coefficients des accroissements des coordonnées généralisées dans l'expression du travail élémentaire total de toutes les forces appliquées au système.* Si toutes les liaisons du système sont parfaites, pour tous les déplacements virtuels le travail est effectué uniquement par des forces actives: dans ce cas les grandeurs Q_1, Q_2, . . ., Q_s sont des *forces généralisées actives* du système.

La dimension de la force généralisée dépend de celle de la coordonnée généralisée correspondante. Le produit $Q\delta q$, et donc Qq, ayant la dimension du travail, alors

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]}, \tag{87}$$

c'est-à-dire que la dimension de la force généralisée est égale à la dimension du travail divisée par celle de la coordonnée généralisée respective. Ainsi, si q est une grandeur linéaire, Q a la dimension d'une force au sens habituel; si q est un angle (grandeur sans dimension), Q sera mesurée en mkg, c'est-à-dire aura la dimension du moment; si q est un volume (on peut donner, par exemple, la position d'un piston dans un cylindre par le volume de l'espace derrière le piston), Q se mesure alors en kg/m^2, c'est-à-dire a la dimension de la pression, etc.

Ainsi, de même que la notion de vitesse généralisée englobe toutes les notions de vitesse, la notion de force généralisée s'étend à toutes les grandeurs que nous avons rencontrées comme les mesures d'interaction mécanique de corps matériels (force, moment d'une force, pression).

Le calcul des forces généralisées se fait à l'aide des formules du type (82), (84) et se ramène à celui du travail élémentaire virtuel (voir § 166). On détermine d'abord le degré de liberté du système, on choisit les coordonnées généralisées et on porte sur le dessin toutes les forces actives appliquées au système ainsi que les forces de frottement (si celles-ci effectuent un travail). Puis, pour calculer Q_1, on communique au système un déplacement virtuel tel que seule la coordonnée q_1 change, on détermine pour ce déplacement la somme des travaux élémentaires de toutes les forces et on écrit l'expression obtenue sous la forme (82). Le coefficient de δq_1 est la force cherchée Q_1. Les forces Q_2, Q_3, . . . se trouvent d'une façon analogue.

Exemple 1. Calculons la force généralisée pour le système représenté sur la figure 371, où le corps pesant A de poids P_1 se déplace sur un plan incliné lisse, et le corps B de poids P_2 se meut sur un plan horizontal à surface rugueuse présentant le coefficient de frottement f. Les deux poids sont reliés entre eux par un fil qui passe par une poulie O. Nous négligerons la masse du fil et de la poulie. Le système a évidemment un degré de liberté et sa position sera déterminée par la coordonnée $q_1 = x$ (le sens positif de x est indiqué par une flèche). Pour déterminer Q_1 nous communiquons au système le déplacement virtuel δx ($\delta x > 0$) et

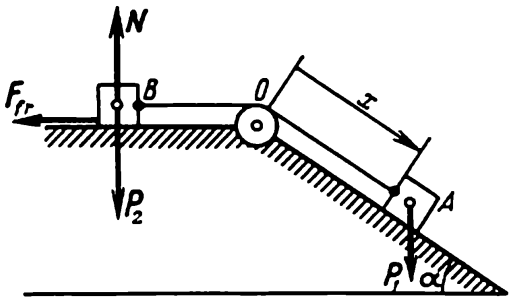


Fig. 371

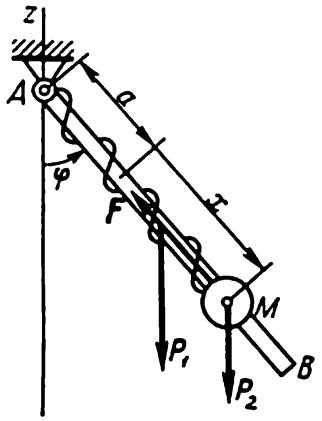


Fig. 372

calculons sur ce déplacement les travaux élémentaires des forces P_1 et F, toutes les autres forces n'effectuant aucun travail. Comme la force de frottement $F = fN = fP_2$, on obtient

$$\delta A = (P_1 \sin \alpha - fP_2)\, \delta x.$$

Par conséquent

$$Q_1 = P_1 \sin \alpha - fP_2.$$

Exemple 2. En négligeant le frottement, cherchons les forces généralisées du système représenté sur la figure 372. La tige homogène AB de longueur l et de poids P_1 peut tourner autour de l'axe A dans le plan vertical. Sur la tige est enfilée la bille M de poids P_2. Le coefficient de rigidité du ressort AM est c et sa longueur en état libre est a.

Le système possède évidemment deux degrés de liberté (deux mouvements sont indépendants : le déplacement de la bille le long de la tige et la rotation de la tige autour de l'axe A). Choisissons en tant que coordonnées généralisées l'angle φ et la distance x de la bille du bout du ressort à l'état libre ($q_1 = \varphi$, $q_2 = x$) ; le sens positif des coordonnées est indiqué par des flèches.

Imposons d'abord au système un déplacement virtuel tel que l'angle φ acquière un accroissement $\delta\varphi$ ($\delta\varphi > 0$) et $x = \text{const}$. Les forces qui effectueraient le travail sur ce déplacement sont P_1 et P_2. Calculons leur travail comme le produit du moment de la force par $\delta\varphi$, il vient :

$$\delta A_1 = \left[-P_1 \frac{l}{2} \sin \varphi - P_2 (a + x) \sin \varphi \right] \delta\varphi.$$

Par conséquent,

$$Q_1 = -\left[P_1 \frac{l}{2} + P_2 (a + x) \right] \sin \varphi.$$

Communiquons maintenant au système un déplacement virtuel tel que seule la coordonnée x change, son accroissement étant $\delta x > 0$ et l'angle $\varphi = \text{const}$. Sur ce déplacement, le travail est effectué par la pesanteur de la bille et la force élastique du ressort dont le module est $F = cx$. On a alors

$$\delta A_2 = (P_2 \cos \varphi - cx)\, \delta x$$

et

$$Q_2 = P_2 \cos \varphi - cx.$$

La force généralisée Q_1 a dans ce cas la dimension du moment puisque $q_1 = \varphi$, et la force Q_2, la dimension habituelle de la force.

Cas des forces potentielles. Si toutes les forces agissant sur un système sont potentielles, on peut écrire la somme des travaux élémentaires de ces forces comme $\Sigma \delta A_k = -\delta \Pi$, où Π est l'énergie potentielle totale du système, fonction des coordonnées x_k, y_k, z_k de ses points (voir § 151). Mais les coordonnées x_k, y_k, z_k peuvent s'exprimer en fonction des coordonnées généralisées $q_1, q_2, \ldots, q_s$, donc $\Pi = \Pi(q_1, q_2, \ldots, q_s)$. En calculant $\delta \Pi$ comme la différentielle totale de la fonction $\Pi\ (q_1, q_2, \ldots, q_s)$ on trouve

$$\sum \delta A_k = -\delta \Pi = -\left[\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} \delta q_2 + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} \delta q_s\right].$$

En comparant cette expression avec l'égalité (86) on remarque que dans ce cas

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1}, \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}, \quad \ldots, \quad Q_s = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_s}. \tag{88}$$

Par conséquent, lorsque toutes les forces agissant sur un système sont potentielles, les forces généralisées s'obtiennent comme les dérivées partielles de l'énergie potentielle par rapport aux coordonnées généralisées correspondantes, prises avec le signe moins.

Exemple 3. Toutes les forces agissant sur le système de la figure 372 sont potentielles. Convenons de diriger l'axe z vers le haut suivant la verticale. En utilisant les formules du § 151 pour l'énergie potentielle de la pesanteur et de la force élastique et en exprimant les coordonnées z à l'aide des coordonnées généralisées $q_1 = \varphi$ et $q_2 = x$ on obtiendra pour tout le système

$$\Pi = -P_1 \frac{l}{2} \cos \varphi - P_2 (a + x) \cos \varphi + \frac{1}{2} cx^2.$$

D'où

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -\left[P_1 \frac{l}{2} + P_2 (a + x)\right] \sin \varphi, \quad Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = P_2 \cos \varphi - cx,$$

ce qui coïncide avec les résultats de l'exemple 2.

§ 170. Conditions d'équilibre d'un système exprimées en coordonnées généralisées. Conformément au principe des déplacements virtuels, la condition nécessaire et suffisante d'équilibre d'un système mécanique est l'égalité à zéro de la somme des travaux élémentaires

de toutes les forces actives (y compris les forces de frottement si elles effectuent un travail), c'est-à-dire la condition $\Sigma\delta A_k = 0$. En coordonnées généralisées, cette condition, d'après (86), s'écrit :

$$Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_s\delta q_s = 0. \tag{89}$$

Les grandeurs δq_1, δq_2, ..., δq_s étant indépendantes entre elles, pour que la condition (89) soit vérifiée il faut que chacun des coefficients de δq_1, δq_2, ..., δq_s soit séparément égal à zéro, c'est-à-dire il faut que

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \ldots, Q_s = 0 \tag{90}$$

En effet, si l'on admet que l'une de ces valeurs, par exemple Q_1, ne soit pas nulle, on peut toujours communiquer au système un déplacement virtuel tel que $\delta q_1 \neq 0$ tandis que $\delta q_2 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_s = 0$ ce qui sera en contradiction avec la condition (89).

Ainsi, *pour qu'un système mécanique soit en équilibre, il faut et il suffit que toutes les forces généralisées correspondant aux coordonnées généralisées adoptées pour le système soient égales à zéro.* Le nombre des conditions d'équilibre (90) est égal, comme nous le voyons, à celui des coordonnées généralisées, autrement dit, au degré de liberté du système.

De la comparaison de la méthode de calcul des forces généralisées (§ 169) et de la méthode de résolution des problèmes que nous avons utilisée au § 166 il ressort qu'en fait, lors de la résolution des problèmes à l'aide du principe des déplacements virtuels, nous calculions les forces généralisées correspondantes lesquelles étaient ensuite égalées à zéro. Considérons deux autres exemples.

1. Pour le système représenté sur la figure 371 la condition d'équilibre est $Q_1 = 0$ ou $P_1 \sin\alpha = fP_2$. En calculant Q_1 nous avons adopté que $F = fN = F_{\lim}$, par conséquent, la condition $Q_1 = 0$ donne la valeur maximale de P_1 pour laquelle le poids A reste encore immobile, c'est-à-dire détermine la position limite d'équilibre (voir § 38). Il est clair que le système se trouve également en équilibre pour $P_1 \sin\alpha < fP_2$.

2. Pour le système schématisé par la figure 372, nous obtenons à partir des conditions d'équilibre $Q_1 = 0$ et $Q_2 = 0$ le résultat évident suivant : en équilibre $\varphi = 0$, $x = \frac{P_2}{c} = \delta_{st}$.

Cas de forces potentielles. Dans ce cas les conditions d'équilibre (90), compte tenu des égalités (88), donnent

$$\frac{\partial\Pi}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial q_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial q_s} = 0. \tag{91}$$

Il en résulte qu'en équilibre la différentielle totale de la fonction Π est égale à zéro, c'est-à-dire

$$d\Pi\,(q_1, q_2, \ldots, q_s) = 0. \tag{92}$$

Ainsi, pour un système soumis à l'action de forces potentielles, les positions d'équilibre sont celles où l'énergie potentielle du système admet un extrémum (un minimum ou un maximum).

§ 171. **Equations de Lagrange.** Pour trouver les équations du mouvement d'un système mécanique à liaisons géométriques en coordonnées généralisées nous allons utiliser l'équation générale de la dynamique (73) qui donne

$$\sum \delta A_k + \sum \delta A_k^{\text{in}} = 0. \tag{93}$$

Pour la généralité, nous supposons que les liaisons appliquées au système ne sont pas toutes parfaites. Ceci veut dire que la première somme peut contenir aussi bien les travaux des forces actives que ceux des forces de frottement, par exemple.

Supposons que le système possède s degrés de liberté et que sa position soit donnée par les coordonnées généralisées (75). D'après la formule (86) on aura

$$\Sigma\, \delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_s \delta q_s. \tag{94}$$

Il est évident que nous pouvons écrire le travail élémentaire des forces d'inertie $\boldsymbol{F}_k^{\text{in}}$ en coordonnées généralisées de la même façon que nous l'avons fait pour les forces $\boldsymbol{F}_k$ au § 169. Il vient

$$\sum \delta A_k^{\text{in}} = Q_1^{\text{in}} \delta q_1 + Q_2^{\text{in}} \delta q_2 + \ldots + Q_s^{\text{in}} \delta q_s, \tag{95}$$

où $Q_1^{\text{in}}, Q_2^{\text{in}}, \ldots, Q_s^{\text{in}}$ sont les forces d'inertie généralisées qui, d'après les formules (83), (85), valent

$$Q_1^{\text{in}} = \sum \boldsymbol{F}_k^{\text{in}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1}, \quad Q_2^{\text{in}} = \sum \boldsymbol{F}_k^{\text{in}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_2}, \ldots \tag{96}$$

En portant les valeurs (94) et (95) dans l'équation (93) on trouve

$$(Q_1 + Q_1^{\text{in}})\, \delta q_1 + (Q_2 + Q_2^{\text{in}})\, \delta q_2 + \ldots + (Q_s + Q_s^{\text{in}})\, \delta q_s = 0.$$

Tous les $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_s$ étant indépendants entre eux, cette dernière égalité n'est vérifiée que si chacun des coefficients de δq_1, $\delta q_2, \ldots, \delta q_s$ est égal à zéro ; on arrive à cette conclusion en raisonnant comme lors de la déduction des équations (90). Par conséquent, on aura

$$Q_1 + Q_1^{\text{in}} = 0, \quad Q_2 + Q_2^{\text{in}} = 0, \ \ldots, \ Q_s + Q_s^{\text{in}} = 0. \tag{97}$$

Les équations établies peuvent être directement utilisées pour la résolution des problèmes de la dynamique. Pourtant leur usage sera beaucoup plus facile si l'on exprime les forces d'inertie généralisées y figurant à l'aide de l'énergie cinétique du système. Transformons d'abord dans le sens indiqué la grandeur Q_1^{in}.

La force d'inertie d'un point quelconque du système étant $\boldsymbol{F}_k^{\text{in}} = -m_k \boldsymbol{w}_k = -m_k \frac{d\boldsymbol{v}_k}{dt}$, la première des formules (96) donne

$$-Q_1^{\text{in}} = \sum m_k \frac{d\boldsymbol{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1}. \tag{98}$$

Pour exprimer Q_1^{in} par l'énergie cinétique du système il y a lieu de transformer le second membre de (98) de telle sorte qu'il soit fonction uniquement des vitesses $\boldsymbol{v}_k$ des points du système. A cette fin notons tout d'abord que l'on a

$$\frac{d\boldsymbol{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1}\right) - \boldsymbol{v}_k \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1}\right). \tag{99}$$

On peut facilement s'en convaincre par différentiation du produit entre parenthèses dans le second membre de (99). Notons ensuite que

$$\frac{d\boldsymbol{r}_k}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}}_k = \boldsymbol{v}_k, \qquad \frac{dq_1}{dt} = \dot{q}_1,$$

où $\boldsymbol{v}_k$ est la vitesse du point du système dont le rayon vecteur est $\boldsymbol{r}_k$ et $\dot{q}_1$ est la vitesse généralisée correspondant à la coordonnée q_1. Deux résultats suivants seront alors vrais pour les dérivées de $\boldsymbol{r}_k$ figurant dans l'égalité (99):

1. L'opérateur de dérivation totale par rapport à t et l'opérateur de dérivation partielle par rapport à q_1 sont commutatifs:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{d\boldsymbol{r}_k}{dt}\right) = \frac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial q_1}. \tag{100}$$

2. La dérivée partielle de $\boldsymbol{r}_k$ par rapport à q_1 est la limite du rapport de l'accroissement partiel $(\Delta \boldsymbol{r}_k)_1$ à l'accroissement Δq_1, d'où, en conformité des règles de l'Hospital [1],

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial \dot{q}_1}. \tag{101}$$

En utilisant les relations (100) et (101) nous pouvons écrire l'égalité (99) comme suit:

$$\frac{d\boldsymbol{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial \dot{q}_1}\right) - \boldsymbol{v}_k \frac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial v_k^2}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial v_k^2}{\partial q_1}.$$

---

[1] En effet, en désignant, pour abréger les notations, l'accroissement partiel de $\boldsymbol{r}_k$ par le symbole $\Delta \boldsymbol{r}_k$ et compte tenu du fait que la dérivée d'une différence est égale à la différence des dérivées, on a

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1} = \lim \frac{\Delta \boldsymbol{r}_k}{\Delta q_1} = \lim \frac{\dfrac{d(\Delta \boldsymbol{r}_k)}{dt}}{\dfrac{d(\Delta q_1)}{dt}} = \lim \frac{\Delta\left(\dfrac{d\boldsymbol{r}_k}{dt}\right)}{\Delta\left(\dfrac{dq_1}{dt}\right)} = \lim \frac{\Delta \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\Delta \dot{q}_1} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\partial \dot{q}_1}.$$

Remarquant que la masse est une grandeur constante et que la somme des dérivées est égale à la dérivée de la somme, on obtient pour l'expression (98) :

$$-Q_1^{\text{in}} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\sum \frac{m_k v_k^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\sum \frac{m_k v_k^2}{2}\right) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1},$$

où

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}$$

est l'énergie cinétique du système.

Des expressions analogues s'obtiennent pour toutes les autres forces d'inertie généralisées. En définitive, les égalités (97) deviennent

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s. \end{aligned}\right\} \qquad (102)$$

Les équations (102) sont les *équations différentielles du mouvement d'un système en coordonnées généralisées ou les équations de Lagrange.* On voit que le nombre de ces équations est égal au degré de liberté du système.

Sur les équations de Lagrange est basée la méthode générale et en même temps suffisamment simple de résolution des problèmes de la dynamique. L'avantage important des équations de Lagrange est que leur aspect et leur nombre ne dépendent ni du nombre de corps (de points) constituant le système, ni de la façon dont les corps se déplacent ; le nombre d'équations de Lagrange est déterminé uniquement par le degré de liberté du système. De plus, si les liaisons sont parfaites, les forces généralisées figurant au second membre des équations (102) sont toutes actives, par conséquent, ces équations permettent à l'avance d'exclure de l'étude toutes les réactions inconnues des liaisons.

Le problème général de la dynamique en coordonnées généralisées se formule comme suit : connaissant les forces généralisées $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ et les conditions initiales, trouver la loi du mouvement du système sous la forme (78), c'est-à-dire déterminer les coordonnées généralisées $q_1, q_2, \dots, q_s$ comme fonctions du temps. En remar-

quant que l'énergie cinétique T dépend des vitesses généralisées, on verra apparaître dans le premier membre des équations (102) lors de la dérivation du second membre par rapport à t les dérivées secondes $\ddot{q}_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$, par rapport à t des coordonnées cherchées. On en déduit que les équations de Lagrange ne sont autre chose que les équations différentielles ordinaires du second ordre par rapport aux coordonnées généralisées $q_1, q_2, \ldots, q_s$.

Cas des forces potentielles. Si toutes les forces agissant sur un système sont potentielles, en se servant des formules (88) on peut écrire la première des équations (102) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0 \text{ ou } \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T - \Pi)}{\partial \dot{q}_1}\right] - \frac{\partial (T - \Pi)}{\partial q_1} = 0.$$

La dernière égalité est vraie parce que l'énergie potentielle Π dépend seulement des coordonnées $q_1, q_2, \ldots, q_s$ et ne dépend pas des vitesses généralisées, de sorte que $\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_1} = 0$.

Il est clair que toutes les autres équations du système (102) se transforment de la même façon. Introduisons la fonction

$$L = T - \Pi. \tag{103}$$

La fonction L des coordonnées généralisées et des vitesses généralisées, égale à la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système, est appelée *fonction de Lagrange* ou *potentiel cinétique*. En utilisant cette fonction on écrira les équations de Lagrange dans le cas des forces potentielles sous la forme

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0, \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0. \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{104}$$

Le résultat obtenu rend évident le fait que pour déterminer l'état d'un système mécanique soumis à l'action des forces potentielles il suffit de donner seule la fonction de Lagrange, car connaissant cette fonction on peut écrire les équations différentielles du mouvement du système.

Dans d'autres généralisations, on rencontre les fonctions analogues à la fonction de Lagrange qui décrivent l'état d'autres systèmes physiques (du milieu continu, du champ de gravitation ou du champ

électromagnétique, etc.). Ceci explique le rôle particulièrement important que jouent les équations de Lagrange dans différents domaines de la physique.

§ 172. Résolution des problèmes. Les équations de Lagrange peuvent être utilisées pour l'étude du mouvement de tout système mécanique à liaisons géométriques, indépendamment du nombre de corps (de points) constituant le système, de la nature du mouvement des corps ni du fait que l'on considère un mouvement absolu ou relatif.

Pour écrire pour un système mécanique donné les équations de Lagrange il faut : 1) déterminer le degré de liberté du système et choisir les coordonnées généralisées (§ 168); 2) représenter le système en position arbitraire et montrer sur le dessin toutes les forces qui lui sont appliquées (pour des systèmes à liaisons parfaites on montrera uniquement les forces actives) ; 3) calculer les forces généralisées Q_i comme indiqué au § 169; il est conseillé pour ne pas commettre d'erreurs de signe de diriger chaque déplacement virtuel communiqué au système dans tel sens que l'accroissement de la coordonnée correspondante soit positif; 4) calculer l'énergie cinétique T du système dans son mouvement absolu et exprimer cette énergie à l'aide des coordonnées généralisées q_i et des vitesses généralisées $\dot{q}_i$; 5) calculer les dérivées partielles de T par rapport à $\dot{q}_i$ et q_i et porter les résultats des calculs aux équations (102).

En intégrant les équations obtenues, on peut trouver, si sont données les forces appliquées au système et les conditions initiales, la loi du mouvement du système sous la forme (78). Si la loi du mouvement est donnée, on peut à partir des équations établies, déterminer les forces agissant sur le système.

Dans le cas où toutes les forces appliquées au système sont potentielles, les équations de Lagrange peuvent être établies sous la forme (104). Au lieu des forces généralisées on calculera dans ce cas l'énergie potentielle du système, l'ayant exprimée à l'aide des coordonnées généralisées, puis on calculera l'énergie cinétique et on écrira la fonction de Lagrange (103).

Pour souligner leur caractère universel nous allons résoudre à l'aide des équations de Lagrange quelques problèmes que nous avons déjà rencontrés dans notre cours et qui étaient résolus chacun par une méthode particulière.

Problème 168. Trouver, en utilisant la méthode de Lagrange, l'équation différentielle d'oscillations du pendule composé (§ 154).

S o l u t i o n. Le pendule a un degré de liberté et sa position est déterminée par l'angle φ (voir fig. 333), par conséquent $q_1 = \varphi$. Communiquons à l'angle φ un accroissement positif ; nous constatons que seule la force de pesanteur P effectue un travail sur ce déplacement, donc $\delta A_1 = (-Pa \sin \varphi)\, \delta\varphi$, où $a = OC$. D'où $Q_1 = -Pa \sin \varphi$. Ensuite, en utilisant la formule (37), trouvons pour l'énergie

cinétique l'expression $T=\frac{1}{2}J_O\omega^2$ ou $T=\frac{1}{2}J_O\dot{\varphi}^2$ (rappelons que la grandeur T doit être exprimée à l'aide de la vitesse généralisée et $\omega=\dot{\varphi}$). L'équation de Lagrange s'écrit dans ce cas sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}=Q_1. \qquad \text{(a)}$$

T étant indépendant de l'angle φ, les calculs donnent

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=J_O\dot{\varphi}\quad\text{et}\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)=J_O\ddot{\varphi}.$$

En portant les résultats des calculs dans l'équation (a) on obtient

$$J_O\ddot{\varphi}=-Pa\sin\varphi,$$

c'est-à-dire le même résultat qu'au § 154.

Remarquant que la force de pesanteur P est une force potentielle, nous pouvons écrire l'équation de Lagrange sous la forme (104). En dirigeant l'axe Oz suivant la verticale vers le bas, nous avons dans ce cas $\Pi=-Pz=-Pa\cos\varphi$ et d'après la formule (103)

$$L=\frac{1}{2}J_O\dot{\varphi}^2+Pa\cos\varphi.$$

D'où

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=J_O\dot{\varphi},\quad \frac{\partial L}{\partial\varphi}=-Pa\sin\varphi,$$

donc, l'équation (104) conduit également à $J_O\ddot{\varphi}+Pa\sin\varphi=0$.

Problème 169. Résoudre à l'aide des équations de Lagrange le problème 141 (§ 150).

S o l u t i o n. Le mécanisme (voir fig. 327) a un degré de liberté et sa position se détermine par la coordonnée φ ($q_1=\varphi$). En communiquant à l'angle φ un accroissement $\delta\varphi$ on trouvera pour le travail élémentaire δA_1 sur ce déplacement l'expression coïncidant avec celle de dA^1 du problème 141, si seulement on y remplace $d\varphi$ par $\delta\varphi$. Par conséquent

$$Q_1=-c\frac{(l-r)^2}{r^2}\varphi.$$

L'énergie T avait été également calculée dans le problème 141 (formule (b)). Etant donné que $\omega_{\text{man}}=\dot{\varphi}$, nous aurons

$$T=\frac{1}{12g}(2Q+9P)\,l^2\dot{\varphi}^2,$$

d'où

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{1}{6g}(2Q+9P)\,l^2\dot{\varphi}.$$

Portant les valeurs trouvées dans l'équation de Lagrange, qui dans ce cas a la forme de l'équation (a) du problème 168, on obtient

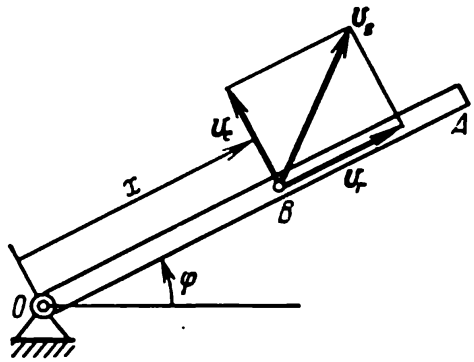
$$\frac{1}{6g}(2Q+9P)\,l^2\ddot{\varphi}=-C\frac{(l-r)^2}{r^2}\varphi$$

ou, en écriture condensée, $\varphi + k^2\varphi = 0$, ce qui coïncide avec le résultat du problème 141.

Notons que *pour des systèmes à un degré de liberté l'établissement de l'équation différentielle par la méthode de Lagrange se ramène en fait aux mêmes calculs qu'implique l'emploi du théorème de la variation de l'énergie cinétique.*

Problème 170. Trouver la loi du mouvement de la bille B à l'intérieur du tube OA tournant uniformément dans le plan horizontal avec la vitesse angulaire ω (fig. 373). A l'instant initial la bille se trouve à une distance a de l'axe de rotation O, sa vitesse le long du tube étant nulle.

S o l u t i o n. Sur l'exemple de ce problème simple nous montrerons comment on peut utiliser les équations de Lagrange pour trouver les équations du



F i g. 373

mouvement relatif sans avoir recours ni à la force d'inertie d'entraînement ni à la force de Coriolis. La position de la bille en son mouvement relatif le long du tube étant déterminée par une seule coordonnée x, la loi du mouvement est donnée donc par une seule équation de Lagrange, soit

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1. \qquad \text{(a)}$$

Sur le déplacement pour lequel x acquiert l'accroissement δx les forces actives n'effectuent aucun travail. On a donc $\delta A_1 = 0$ et $Q_1 = 0$.

L'énergie cinétique de la bille sera calculée en son *mouvement absolu*. On a $T = 0{,}5mv_B^2$, où v_B est la vitesse absolue de la bille vérifiant l'égalité vectorielle suivante : $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e$. Dans notre cas, numériquement $v_r = \dot{x}$, $v_e = OB \cdot \omega = x\omega$, les vecteurs $\boldsymbol{v}_r$ et $\boldsymbol{v}_e$ étant orthogonaux. On a donc

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2).$$

D'où

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = m\omega^2 x.$$

En portant les valeurs trouvées dans l'égalité (a) et en simplifiant par m, on obtient l'équation différentielle du mouvement relatif de la bille sous la forme

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

En intégrant cette équation et en déterminant les constantes d'intégration à partir des conditions initiales du problème (pour $t = 0$, $x = a$, $\dot{x} = 0$), on

trouve définitivement la loi du mouvement de la bille le long du tube :

$$x=\frac{a}{2}(e^{\omega t}+e^{-\omega t}).$$

Problème 171. Résoudre par la méthode des équations de Lagrange le problème 167 (§ 167).

Solution. Pour les conditions du problème, le système, comme nous l'avons établi, a deux degrés de liberté. Choisissons pour coordonnées généralisées la distance x du poids A d'un point quelconque D du plan (fig. 374) et la distance y séparant le centre C du cylindre et un point E (un nœud) du fil, c'est-à-dire $q_1 = x$, $q_2 = y$. Ecrivons les équations de Lagrange pour le système considéré :

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_1,\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)-\frac{\partial T}{\partial y}=Q_2.\end{aligned}\right\}\quad \text{(a)}$$

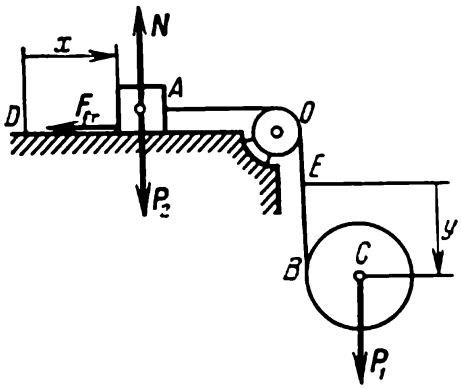


Fig. 374

Représentons sur le dessin les forces agissant sur le système et calculons les forces Q_1 et Q_2. Communiquons d'abord au système un déplacement virtuel pour lequel seule la coordonnée x change d'une quantité $\delta x > 0$ tandis que $y = \text{const}$. Les forces qui effectuent un travail sur ce déplacement sont p_1 et F_{fr} ($F_{fr} = fp_2$), donc $\delta A_1 = (p_1 - fp_2)\,\delta x$. Communiquons ensuite au système un déplacement virtuel pour lequel seule la coordonnée y change, son accroissement étant $\delta y > 0$, et $x = \text{const}$; le travail élémentaire sur ce déplacement est $\delta A_2 = p_1 y$. Par conséquent

$$Q_1 = (p_1 - fp_2),\quad Q_2 = p_1. \qquad \text{(b)}$$

Calculons maintenant l'énergie cinétique T du système, égale à la somme des énergies cinétiques du poids et du cylindre : $T = T_p + T_{cyl}$. Servons-nous des formules (36) et (38) : on a, compte tenu de $v_A = \dot{x}$:

$$T_p=\frac{1}{2}\frac{p_2}{g}\dot{x}^2,\qquad T_{cyl}=\frac{1}{2}\frac{p_1}{g}v_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2. \qquad \text{(c)}$$

La vitesse v_C du centre du cylindre se compose de la vitesse relative (par rapport au fil) égale à $\dot{y}$, et de la vitesse d'entraînement égale à $\dot{x}$; les deux vitesses étant dirigées suivant la verticale vers le bas, on a $v_C = \dot{x} + \dot{y}$. La vitesse angulaire du cylindre se définit comme $\omega=\frac{\dot{y}}{r}$, où r est le rayon du cylindre, étant donné que le centre instantané de rotation du cylindre en mouvement relatif se trouve au point B et que lors de la variation de la coordonnée x le cylindre ne tourne pas. Ayant en vue que $J_C=\frac{1}{2}\frac{p_1}{g}r^2$, on trouve définitivement

$$T=\frac{p_2}{2g}\dot{x}^2+\frac{p_1}{2g}\left[(\dot{x}+\dot{y})^2+\frac{1}{2}\dot{y}^2\right].$$

D'où

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=\frac{p_2}{g}\dot{x}+\frac{p_1}{g}(\dot{x}+\dot{y}),\\ &\frac{\partial T}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=\frac{p_1}{g}\left(\dot{x}+\dot{y}+\frac{1}{2}\dot{y}\right). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(d)}$$

En portant les valeurs (b) et (d) dans les équations de Lagrange (a) on obtient les équations différentielles du mouvement du système

$$(p_1+p_2)\ddot{x}+p_1\ddot{y}=(p_1-fp_2), \quad 2\ddot{x}+3\ddot{y}=2g.$$

En résolvant ces équations on trouve

$$\ddot{x}=\frac{p_1-3fp_2}{p_1+3p_2}g, \qquad \ddot{y}=\frac{2(1+f)p_2}{p_1+3p_2}g. \qquad \text{(e)}$$

Ainsi, $w_A=\ddot{x}$, $w_C=\ddot{x}+\ddot{y}$ ($\ddot{y}$ donne uniquement l'accélération relative du centre de masse du cylindre). Il est facile de voir que les résultats obtenus coïncident avec ceux du problème 167.

Voyons quelle sera la marche des calculs pour un autre choix des coordonnées généralisées. Soit comme précédemment $q_1=x$ mais $q_2=z$, où z est la distance du centre C jusqu'au point fixe O. En communiquant au système le déplacement virtuel pour lequel x acquiert l'accroissement $\delta x>0$ tandis que $z=$ const. (ce qui est facile à réaliser en tournant en même temps le cylindre), on obtient $\delta A_1=-fp_2\,\delta x$. Pour le second déplacement virtuel indépendant ($\delta z>0$, $x=$ $=$ const.) on aura $\delta A_2=p_1\,\delta z$. Il est clair qu'on a cette fois

$$Q_1=-fp_2, \quad Q_2=p_1.$$

Ensuite, en exprimant l'énergie cinétique à l'aide des coordonnées généralisées et vu que dans ce cas $v_C=\dot{z}$ et $\omega=\dfrac{\dot{z}-\dot{x}}{r}$ on obtient

$$T=\frac{p_2}{2g}\dot{x}^2+\frac{p_1}{2g}\left[\dot{z}^2+\frac{1}{2}(\dot{z}-\dot{x})^2\right].$$

D'où

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial T}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=\frac{p_2}{g}\dot{x}-\frac{p_1}{2g}(\dot{z}-\dot{x}), \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}}=\frac{p_1}{g}\left[\dot{z}+\frac{1}{2}(\dot{z}-\dot{x})\right].$$

En portant les valeurs trouvées dans les équations de Lagrange on obtient finalement

$$p_1\ddot{z}-(2p_2+p_1)\ddot{x}=2fp_2g, \qquad 3\ddot{z}-\ddot{x}=2g.$$

La solution de ces équations donne $w_A=\ddot{x}$ et $w_C=\ddot{z}$. On voit que pour $q_2=z$ la valeur w_C s'obtient directement, donc en ce sens le choix de la coordonnée q_2 est préférable. Par contre s'il faut trouver l'accélération relative du centre du cylindre ou l'accélération angulaire ε du cylindre, les calculs sont plus simples si l'on choisit $q_2=y$.

Nous avons montré qu'on peut choisir de différentes façons les coordonnées généralisées du système ; souvent un choix heureux des coordonnées mène plus vite au but.

Problème 172. Une tige BD homogène de longueur l et de poids p est jointe par articulation à l'axe B d'un rouleau homogène de poids P qui peut rouler sans glissement le long d'un plan horizontal (fig. 375). Ecrire les équations différentielles du mouvement et trouver la loi des petites oscillations du système, sachant qu'à l'instant initial la tige est écartée de la position d'équilibre d'un petit angle φ_0 ou elle est abandonnée sans vitesse initiale.

Solution. Le système a évidemment deux degrés de liberté. Les coordonnées généralisées sont la distance x du centre du cylindre de sa position initiale et l'angle φ d'écartement de la tige par rapport à la verticale ($q_1 = x$, $q_2 = \varphi$).

Ecrivons les équations de Lagrange pour le système considéré :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_1,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_2. \qquad \text{(a)}$$

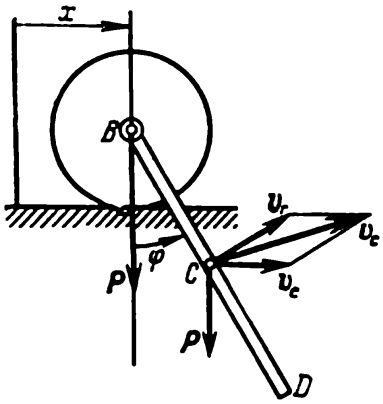


Fig. 375

Calculons d'abord Q_1 et Q_2. En communiquant au système un déplacement pour lequel x acquiert l'accroissement $\delta x > 0$ tandis que $\varphi =$ const., on trouve que $\delta A_1 = 0$. Pour le second déplacement virtuel indépendant pour lequel φ acquiert l'accroissement $\delta\varphi > 0$ et $x =$ const, on a $\delta A_2 = -0{,}5pl \sin\varphi\delta\varphi$. Par conséquent

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = -0{,}5pl \sin\varphi.$$

L'énergie cinétique du système est $T = T_{cyl} + T_t$. La valeur T_{cyl} avait été calculée pour le cas analogue dans le problème 134 (§ 147). Se reportant au résultat obtenu et utilisant la formule (38) on a

$$T_{cyl} = \frac{3}{4}\frac{P}{g}v_B^2, \qquad T_t = \frac{1}{2}\frac{p}{g}v_C^2 + \frac{1}{2}\frac{pl^2}{12g}\dot{\varphi}^2.$$

Ici $v_B = \dot{x}$ et $v_C = v_r + v_e$, où numériquement $v_r = 0{,}5l\dot{\varphi}$, $v_e = \dot{x}$, par conséquent (voir fig. 375)

$$v_C^2 = \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2 + l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi.$$

Définitivement l'expression de l'énergie cinétique du système est

$$T = \frac{3P}{4g}\dot{x}^2 + \frac{p}{2g}\left(\dot{x}^2 + l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{l^2}{3}\dot{\varphi}^2\right).$$

D'où

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{3P+2p}{2g}\dot{x} + \frac{pl}{2g}\dot{\varphi}\cos\varphi; \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{p}{g}\left(\frac{l}{2}\dot{x}\cos\varphi + \frac{l^2}{3}\dot{\varphi}\right); \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{p}{2g}l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi.$$

En portant ces valeurs et les valeurs trouvées de Q_1, Q_2 dans les égalités (a) on trouve après les simplifications évidentes les équations différentielles sui-

vantes du mouvement du système :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[(3P+2p)\dot{x}+pl\dot{\varphi}\cos\varphi\right]=0,\\&\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\cos\varphi+\frac{2}{3}l\dot{\varphi}\right)+\ddot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi=-g\sin\varphi.\end{aligned}\right\}\qquad\text{(b)}$$

Il nous reste à trouver la loi des petites oscillations du système. Nous pouvons considérer que l'angle φ et le déplacement x sont des grandeurs petites d'un même ordre de petitesse, c'est-à-dire $\varphi = \varepsilon f_1(t)$, $x = \varepsilon f_2(t)$, où ε est une grandeur petite et $f_1(t)$, $f_2(t)$ sont des fonctions du temps, bornées avec leurs dérivées donnant la loi des oscillations. Il est clair que dans ce cas les vitesses $\dot{\varphi} = \varepsilon f_1'(t)$ et $\dot{x} = \varepsilon f_2'(t)$ sont également des grandeurs petites d'ordre ε.

Les équations différentielles des petites oscillations du système s'obtiennent à partir des équations (b) où l'on conserve les termes d'ordre de petitesse ε, en rejetant tous les termes d'ordre plus élevé. Notamment, on pose dans la première équation, dans le terme $pl\dot{\varphi}\cos\varphi$, $\cos\varphi = 1$, et dans la seconde, $\sin\varphi = \varphi$, $\cos\varphi = 1$ et l'on rejette le terme $\ddot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi$ comme ayant l'ordre de petitesse ε^3. On obtient après les transformations indiquées :

$$\frac{d}{dt}\left[(3P+2p)\dot{x}+pl\dot{\varphi}\right]=0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}+\frac{2}{3}l\dot{\varphi}\right)+g\varphi=0.$$

D'où, en calculant les dérivées on trouve définitivement les équations différentielles des petites oscillations du système considéré

$$(3P+2p)\ddot{x}+pl\ddot{\varphi}=0,\qquad \ddot{x}+\frac{2}{3}l\ddot{\varphi}=g\varphi=0.\qquad\text{(c)}$$

En déterminant $\ddot{x}$ de la première équation et en portant sa valeur dans la seconde on trouve

$$\ddot{\varphi}+k^2\varphi=0,\qquad\text{(d)}$$

où

$$k^2=\frac{3(3P+2p)}{6P+p}\cdot\frac{g}{l}.\qquad\text{(e)}$$

Intégrons l'équation (d) et déterminons les constantes d'intégration à partir des conditions initiales (pour $t = 0$ on a $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$), il vient finalement

$$\varphi=\varphi_0\cos kt.\qquad\text{(f)}$$

Intégrant maintenant la première des équations (c) et compte tenu de ce que pour $t = 0$ on a $x = 0$, $\dot{x} = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$, on trouve

$$(3P+2p)x+pl(\varphi-\varphi_0)=0.$$

En substituant dans cette dernière équation φ par sa valeur tirée de l'égalité (f) on obtient

$$x=\frac{p}{3P+2p}l\varphi_0(1-\cos kt).\qquad\text{(g)}$$

Les équations (f), (g) déterminent la loi des petites oscillations du système dont la fréquence k est donnée par l'égalité (e).

Le résultat relativement simple, que nous avons obtenu, s'explique par le fait que dans ce problème $Q_1 = 0$. En général, lorsque $Q_1 \neq 0$ et $Q_2 \neq 0$, les oscillations d'un système ayant deux degrés de liberté sont beaucoup plus compliquées ; elles se présentent comme une somme de deux oscillations de fréquences différentes k_1 et k_2.

Chapitre XXXII

THÉORIE DU CHOC

§ 173. Equation fondamentale de la théorie du choc. Pendant le mouvement d'un corps soumis à l'action de forces ordinaires que l'on a examinées auparavant, les vitesses des points du corps varient continuellement, c'est-à-dire qu'à chaque intervalle de temps infiniment petit correspond un accroissement infiniment petit de la vitesse. En effet, si l'on présente l'impulsion d'une force quelconque $\boldsymbol{F}_k$ pendant le laps de temps τ sous la forme $\boldsymbol{F}_k^{\text{moy}}\tau$, où $\boldsymbol{F}_k^{\text{moy}}$ est la valeur moyenne de cette force durant le laps de temps τ, le théorème de la variation de la quantité de mouvement du point sur lequel agissent les forces $\boldsymbol{F}_k$, permet d'écrire

$$m(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0) = \sum \boldsymbol{F}_k^{\text{moy}}\tau. \tag{105}$$

De là on voit que lorsque le laps de temps τ est infiniment petit (tend vers zéro), l'accroissement de la vitesse $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_0$ pour des forces ordinaires sera également une grandeur infiniment petite (tendant vers zéro).

Néanmoins, si parmi les forces agissantes il s'en trouve de très grandes (de l'ordre de $1/\tau$), l'accroissement de la vitesse au cours d'un petit intervalle de temps τ sera une grandeur finie.

Le phénomène au cours duquel les vitesses d'un point du corps varient d'une grandeur finie pendant un intervalle de temps τ très court est appelé choc. Les forces, qui agissent durant le choc, sont appelées forces de percussion $\boldsymbol{F}_{\text{ch}}$. L'intervalle de temps très petit τ pendant lequel se produit le choc est appelé le *temps du choc.*

Puisque les forces de percussion sont très grandes et varient pendant le choc dans des limites considérables, on considère dans la théorie du choc en qualité de mesure de l'action réciproque des corps non pas les forces de percussion elles-mêmes, mais leurs impulsions.

L'impulsion de percussion (de choc)

$$\boldsymbol{S}_{\text{ch}} = \int_0^\tau \boldsymbol{F}_{\text{ch}}\, dt = \boldsymbol{F}_{\text{ch}}^{\text{moy}}\tau$$

est une grandeur finie. Les impulsions des forces autres que celles de percussion pendant l'intervalle de temps τ seront des grandeurs très petites que l'on peut pratiquement négliger.

Par la suite nous désignerons la vitesse du point *immédiatement avant le choc* par $\boldsymbol{v}$, et la vitesse *après le choc* par $\boldsymbol{u}$. Alors l'égalité

(105) devient [1]

$$m(u - v) = \Sigma S_k. \tag{106}$$

Ce résultat exprime le théorème de la variation de la quantité de mouvement d'un point au cours du choc: *la variation de la quantité de mouvement d'un point matériel pendant le choc est égale à la somme des impulsions de percussion qui agissent sur le point.* L'équation (76) est *l'équation fondamentale de la théorie du choc* et joue dans la théorie du choc le même rôle que la loi fondamentale de la dynamique $mw = F$ au cours de l'étude des mouvements sous l'action des forces autres que celles de percussion.

Notons pour conclure que le déplacement d'un point au cours d'un choc sera égal à $v^{\text{moy}}\tau$, c'est-à-dire à une grandeur très petite, que l'on peut pratiquement négliger.

On déduit ainsi des résultats obtenus:

1) pendant le choc on peut négliger l'action des forces autres que celles de percnssion (par exemple, celle de la pesanteur);

2) pendant le choc on peut négliger les déplacements subis par les points du corps et admettre que le corps est immobile;

3) les variations des vitesses des points du corps pendant le choc sont déterminées par l'équation fondamentale de la théorie du choc (106).

§ 174. Théorèmes généraux de la théorie du choc. Dans le cas d'un système de points matériels ou de corps on étudie le choc à l'aide des théorèmes suivants.

1. Théorème de la variation de la quantité de mouvement d'un système pendant le choc. Considérons un système composé de n points matériels. Désignons la résultante des impulsions de percussion extérieures appliquées au point de masse m_k par S_k^e et la résultante des impulsions de percussion intérieures, par S_k^i. Alors, d'après l'équation (106), on aura:

$$m_k(u_k - v_k) = S_k^e + S_k^i. \tag{107}$$

En posant de telles équations pour tous les points du système et en les additionnant membre à membre, nous obtenons:

$$\sum m_k u_k - \sum m_k v_k = \sum S_k^e + \sum S_k^i.$$

Les sommes qui se trouvent à gauche expriment les quantités de mouvement du système après et avant le choc et nous les désignerons respectivement par Q_1 et Q_0. La somme des impulsions de per-

[1] Partout dans ce chapitre nous désignerons l'impulsion de la percussion simplement par S, car les impulsions des forces autres que celles de percussion ne sont pas étudiées dans la théorie du choc.

cussion intérieures qui se trouve à droite est égale à zéro en vertu de la propriété des forces intérieures. En définitive, nous trouvons:

$$Q_1 - Q_0 = \sum S_k^e, \tag{108}$$

c'est-à-dire que *la variation de la quantité de mouvement d'un système pendant le choc est égale à la somme de toutes les impulsions de percussion extérieures qui agissent sur le système.*

En projections sur un axe de coordonnées quelconque x l'équation (108) donne:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e. \tag{109}$$

Si la somme géométrique de toutes les impulsions de percussion extérieures est égale à zéro, alors, comme on le voit de l'équation (108), la quantité de mouvement du système ne varie pas pendant le choc. Par conséquent, les impulsions de percussion intérieures ne peuvent modifier la quantité de mouvement de tout le système.

2. Théorème de la variation du moment angulaire résultant d'un système pendant le choc (théorème des moments). En raisonnant comme dans le cas précédent, posons pour le point de masse m_k l'équation (107) sous la forme

$$m_k u_k = m_k v_k + S_k^e + S_k^i.$$

Les vecteurs qui font partie de cette égalité sont appliqués à un point qui, pendant le choc, reste immobile. Alors, en prenant les moments de tous les vecteurs par rapport à un certain centre O, nous obtenons d'après le théorème de Varignon, qui est vérifié pour n'importe quelles grandeurs vectorielles,

$$m_O(m_k u_k) = m_O(m_k v_k) + m_O(S_k^e) + m_O(S_k^i).$$

En posant de telles égalités pour tous les points du système et en les additionnant membre à membre, nous aurons:

$$\sum m_O(m_k u_k) - \sum m_O(m_k v_k) = \sum m_O(S_k^e) + \sum m_O(S_k^i).$$

Les sommes qui se trouvent à gauche sont les moments angulaires résultants du système par rapport au centre O après et avant le choc et nous les désignerons par K_1 et K_0. La somme des moments des impulsions de percussion intérieures qui se trouve à droite, d'après la propriété des forces intérieures, est égale à zéro. Nous trouvons en définitive:

$$K_1 - K_0 = \sum m_O(S_k^e), \tag{110}$$

c'est-à-dire *pendant le choc la variation du moment angulaire résultant du système par rapport à un centre est égale à la somme des moments par rapport à ce même centre de toutes les impulsions de percussion extérieures qui agissent sur le système.*

En projections sur un axe quelconque x, l'égalité (110) donne

$$K_{1x} - K_{0x} = \sum m_x (S_k^e). \qquad (111)$$

Il résulte des équations obtenues que si la somme des moments des impulsions de percussion extérieures par rapport à un certain centre (ou à un axe) est égale à zéro, le moment angulaire résultant du système par rapport à ce centre (ou à cet axe) ne change pas pendant le choc. Par conséquent, les impulsions de percussion intérieures ne peuvent pas modifier le moment angulaire résultant du système.

Le théorème de la variation de l'énergie cinétique n'est pas applicable à la résolution du problème fondamental de la dynamique dans la théorie du choc car les points du corps, pendant le choc, sont supposés immobiles et à la place des forces de percussion elles-mêmes on considère leurs impulsions. Il est donc impossible de calculer directement (connaissant la force et le déplacement) le travail des forces de percussion. Dans la suite, nous n'examinerons que la question de la détermination de l'énergie cinétique perdue au cours du choc (§ 178).

§ 175. Coefficient de restitution au cours d'un choc. L'impulsion de percussion qui apparaît au cours du choc de deux corps ne dépend pas seulement de leurs masses et de leurs vitesses avant le choc, mais

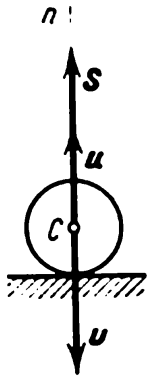


Fig. 376

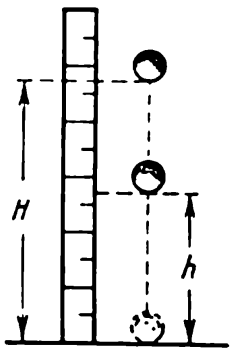


Fig. 377

encore des propriétés élastiques de ces corps que l'on caractérise au moyen d'une grandeur appelée *coefficient de restitution*.

Considérons une bille tombant verticalement sur une dalle immobile horizontale (fig. 376). Dans le choc frontal qui se produira alors on peut dégager deux phases. Durant la première phase les vitesses des particules de la bille, égales à v au début du choc (nous supposons que le mouvement de la bille est un mouvement de translation), diminuent jusqu'à zéro. La bille se déforme alors (nous supposons que la dalle est absolument rigide) et toute son énergie cinétique initiale $\frac{1}{2} Mv^2$ se transforme en énergie potentielle intérieure du corps déformé. Au cours de la deuxième phase du choc, la bille, sous l'action des forces élastiques intérieures, commence à rétablir sa forme; son énergie potentielle intérieure se transforme alors en énergie ciné-

tique du mouvement de ses particules. A la fin du choc les vitesses des particules seront égales à u et l'énergie cinétique de la bille à $\frac{1}{2} Mu^2$. Toutefois l'énergie mécanique de la bille n'est pas entièrement restituée car une partie de cette énergie est dépensée pour lui communiquer des déformations résiduelles et l'échauffer. C'est pourquoi la vitesse u sera inférieure à v.

La grandeur k, égale dans le cas d'un choc frontal d'un corps contre un obstacle immobile au rapport du module de la vitesse du corps à la fin du choc au module de sa vitesse avant le choc, est appelée coefficient de restitution:

$$k = \frac{u}{v}. \tag{112}$$

Pour différents corps le coefficient de restitution est déterminé expérimentalement. Les données de l'expérience montrent que si la vitesse v varie entre des limites peu importantes, la grandeur k ne dépend que de la nature des matériaux en contact.

On considère d'habitude les cas extrêmes de *choc parfaitement élastique* ($k = 1$) au cours duquel l'énergie mécanique après le choc est complètement restituée, et le cas de *choc parfaitement mou* ($k = 0$) dans lequel n'existe que la première phase et toute l'énergie mécanique du corps est perdue à sa déformation et à son échauffement.

On peut trouver expérimentalement la valeur de k en étudiant la chute libre d'une bille tombant sur une dalle d'une hauteur H préalablement mesurée et en déterminant à l'aide d'une mire verticale placée à côté (fig. 377) la hauteur de son rebond après le choc. Alors, d'après la formule de Galilée

$$v = \sqrt{2gH},$$

alors que

$$u = \sqrt{2gh}$$

et

$$k = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h}{H}}.$$

Les valeurs du coefficient de restitution (pour des vitesses de choc de l'ordre de 3 m/s) pour quelques matériaux sont données dans le tableau 1.

Tableau 1

Corps entrant en contact	k
Bois contre bois	1/2
Acier contre acier	5/9
Ivoire contre ivoire	8/9
Verre contre verre	15/16

§ 176. Choc d'un corps contre un obstacle immobile. Considérons un corps (une sphère) de masse M qui vient buter contre une dalle immobile. La force de percussion qui agit sur le corps sera alors la réaction de la dalle ; appelons $\boldsymbol{S}$ l'impulsion de cette force pendant le choc. Admettons que la normale à la surface du corps au point de contact de ce dernier avec la dalle passe par le centre d'inertie du corps (pour une sphère il en sera toujours ainsi). Un tel choc du corps est dit *choc central*. Si la vitesse $\boldsymbol{v}$ du centre d'inertie du corps au début du choc est dirigée suivant la normale n à la dalle, le choc est dit *direct*, dans le cas contraire il est appelé *oblique*.

1. Cas d'un choc direct. Posant dans ce cas l'équation (109) en projections sur la normale n (voir fig. 376) et en tenant compte de ce que $\boldsymbol{Q}_0 = M\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{Q}_1 = M\boldsymbol{u}$, nous obtenons:

$$M(u_n - v_n) = S_n.$$

Mais dans le cas d'un choc direct $u_n = u$, $v_n = -v$, $S_n = S$; par conséquent,

$$M(u + v) = S.$$

La deuxième équation nécessaire à la résolution du problème est fournie par l'égalité (112): $u = kv$.

Les équations obtenues permettent, connaissant M, v, k, de trouver les grandeurs inconnues u et S. Alors

$$S = M(k + 1)v.$$

Comme nous le voyons, l'impulsion de percussion sera d'autant plus grande que le coefficient de restitution k sera plus grand. C'est précisément cette relation entre S et k qui a été indiquée au § 175.

Pour déterminer la valeur moyenne de la force de percussion (de réaction), il faut, de plus, connaître le temps τ du choc que l'on peut trouver expérimentalement.

Exemple. Pour une sphère d'acier de poids $p = 1$ kgf tombant de la hauteur $H = 3$ m sur une dalle d'acier ($k = 5/9$), nous avons $v = \sqrt{2gH} \approx$ $\approx 7{,}7$ m/s et $u = kv \approx 4{,}3$ m/s. L'impulsion de percussion sera égale à

$$S = \frac{p}{g} v (1 + k) \approx 1{,}2 \text{ kgf s}.$$

Si le temps du choc $\tau = 0{,}0005$ s, la valeur moyenne de la réaction de choc sera

$$N_{\text{ch}}^{\text{moy}} = \frac{S}{\tau} = 2\,400 \text{ kgf}.$$

2. Cas d'un choc oblique. Admettons que dans ce cas au début du choc la vitesse $\boldsymbol{v}$ du centre d'inertie du corps forme avec la normale à la dalle un angle α, et à la fin du choc la vitesse $\boldsymbol{u}$, un angle β (fig. 378). Alors, l'équation (108) en projections sur la

tangente τ et la normale n donne

$$M(u_\tau - v_\tau) = 0, \quad M(u_n - v_n) = S.$$

Le coefficient de restitution est, dans ce cas, égal au rapport des modules $|u_n|$ et $|v_n|$ car le choc ne se produit que dans la direction de la normale à la surface (nous négligeons l'influence du frottement). Alors, compte tenu des signes des projections, nous obtenons $u_n = -kv_n$. Donc, en définitive, nous trouvons:

$$u_\tau = v_\tau, \quad u_n = -kv_n,$$
$$S = M\,|v_n|\,(1+k).$$

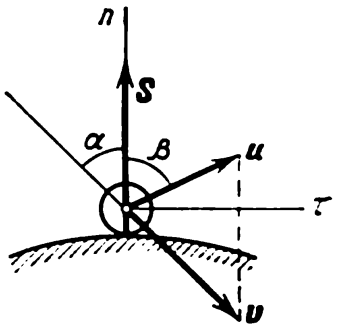


Fig. 378

Des équations obtenues on peut déduire le module et la direction de la vitesse à la fin du choc ainsi que l'impulsion de percussion à condition que les grandeurs M, v, α et k soient connues. En particulier, en remarquant que $v_\tau = |v_n| \operatorname{tg}\alpha$ et $u_\tau = |u_n| \operatorname{tg}\beta$, nous obtenons de la première égalité $|u_n| \operatorname{tg}\beta = |v_n| \operatorname{tg}\alpha$, d'où

$$k = \frac{|u_n|}{|v_n|} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Par conséquent, pendant un choc oblique, le rapport de la tangente de l'angle incident à la tangente de l'angle de réflexion est égal au coefficient de restitution. Puisque $k < 1$, donc $\alpha < \beta$, c'est-à-dire que l'angle incident est toujours inférieur à l'angle de réflexion.

§ 177. Choc direct et central de deux corps (choc de sphères). Le choc de deux corps est dit *direct* et *central* lorsque la normale commune aux surfaces des corps au point de contact passe par leurs centres d'inertie et lorsque les vitesses des centres d'inertie au début du choc sont dirigées suivant cette normale commune. En particulier, on aura un tel choc dans le cas de deux sphères homogènes dont les centres, avant le choc, se déplacent le long d'une même droite.

Désignons les masses des corps butant l'un contre l'autre par M_1 et M_2, les vitesses de leurs centres d'inertie au début du choc par v_1 et v_2 et à la fin du choc par u_1 et u_2. Menons par les centres d'inertie C_1, C_2 l'axe de coordonnée C_1x dirigé dans tous les cas de C_1 vers C_2 (fig. 379). Pour que le choc se produise, il faut que $v_{1x} > v_{2x}$ (sinon le premier corps ne rattrapera pas le second); de plus, on aura $u_{1x} \leqslant u_{2x}$, car le corps frappant ne peut pas dépasser le corps frappé.

En admettant que M_1, M_2, v_{1x}, v_{2x} et k sont connus, déterminons u_1 et u_2. Pour cela appliquons le théorème de la variation de la quan-

tité de mouvement aux corps dans le cas d'un choc en les considérant comme un seul système. Les forces de percussion qui agissent entre les corps seront alors intérieures et $\Sigma S^{e}_{ch} = 0$. En définitive, l'équation (109) donne $Q_{1x} = Q_{0x}$ ou

$$M_1 u_{1x} + M_2 u_{2x} = M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x}. \tag{113}$$

Trouvons la deuxième équation à partir de l'expression du coefficient de restitution. Dans le choc de deux corps l'intensité de la force de choc (l'impulsion de percussion) ne dépend pas de la valeur absolue de la vitesse de chacun des corps, mais de la différence $v_{1x} - v_{2x}$ de ces vitesses. C'est pourquoi pendant le choc de deux corps, si l'on tient compte du fait que l'on a toujours les inégalités $v_{1x} > v_{2x}$ et $u_{1x} \leqslant u_{2x}$, nous obtenons :

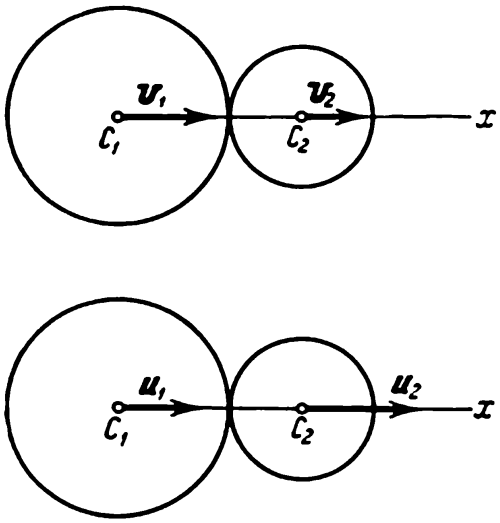


Fig. 379

$$k = \left| \frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}} \right| = -\frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}} \tag{114}$$

ou

$$u_{1x} - u_{2x} = -k\,(v_{1x} - v_{2x}). \tag{114'}$$

Le système d'équations (113), (114) permet de résoudre le problème posé. L'impulsion de percussion qui agit sur les corps dans le choc pourra être trouvée en posant l'équation (109) pour l'un quelconque des corps, par exemple pour le premier. Alors

$$S_{1x} = M_1 (u_{1x} - v_{1x}), \qquad S_{2x} = -S_{1x}. \tag{115}$$

Examinons deux cas extrêmes.

a) Choc parfaitement mou ($k = 0$). Dans ce cas, on tire des équations (114) et (113) :

$$u_{1x} = u_{2x} = \frac{M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x}}{M_1 + M_2}. \tag{116}$$

Les deux corps, après le choc, se déplacent à la même vitesse. L'impulsion de percussion qui agit sur les corps sera alors égale à

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (v_{1x} - v_{2x}).$$

b) Choc parfaitement élastique ($k = 1$). Dans ce cas, les équations (113) et (114) nous donnent :

$$\left.\begin{aligned} u_{1x} &= v_{1x} - \frac{2M_2}{M_1 + M_2} (v_{1x} - v_{2x}), \\ u_{2x} &= v_{2x} + \frac{2M_1}{M_1 + M_2} (v_{1x} - v_{2x}). \end{aligned}\right\} \tag{117}$$

L'impulsion de percussion qui agit sur les corps est alors égale à

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{2M_1M_2}{M_1+M_2}(v_{1x}-v_{2x}).$$

On s'aperçoit ainsi que dans le cas d'un choc parfaitement élastique l'impulsion de percussion est deux fois plus grande que dans le cas d'un choc parfaitement mou.

Pour le cas particulier où $M_1 = M_2$ nous obtenons des équations (117) $u_{1x}=v_{2x}$, $u_{2x}=v_{1x}$; ainsi, deux corps de même masse dans un choc parfaitement élastique ne font qu'échanger leurs vitesses.

Problème 173. Deux sphères de masses M_1 et M_2 sont suspendues de la manière indiquée à la figure 380. La première sphère est écartée d'un angle α et abandonnée sans vitesse initiale. Après le choc, la deuxième sphère s'écarte d'un angle β. Déterminer le coefficient de restitution des sphères.

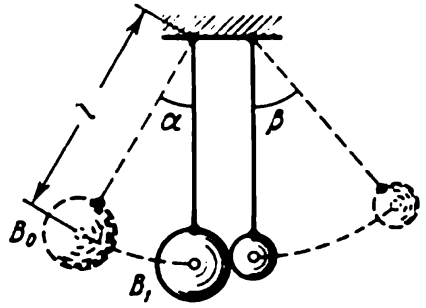


Fig. 380

Solution. D'après les données du problème on peut déterminer la vitesse v_1 du centre de la première sphère avant le choc et la vitesse u_2 du centre de la deuxième sphère après le choc. Du théorème de la variation de l'énergie cinétique on obtient pour la première sphère sur le déplacement B_0B_1

$$\frac{1}{2}M_1v_1^2 = P_1h = M_1gl\,(1-\cos\alpha),$$

où l est la distance entre le centre de la sphère et le point de suspension. D'où

$$v_1 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

D'une manière analogue, nous trouvons que

$$u_2 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\beta}{2}.$$

Comme dans notre cas $v_2 = 0$, les équations (113) et (114) donnent:

$$M_1u_{1x}+M_2u_{2x}=M_1v_{1x}, \qquad u_{2x}-u_{1x}=kv_{1x}.$$

Eliminant u_{1x} entre ces équations et remarquant que $v_{1x} = v_1$ et $u_{2x} = u_2$, nous obtenons

$$M_1v_1(1+k) = (M_1+M_2)\,u_2.$$

D'où nous trouvons définitivement:

$$k = \frac{(M_1+M_2)\,u_2}{M_1v_1} - 1 = \frac{(M_1+M_2)\sin\frac{\beta}{2}}{M_1\sin\frac{\alpha}{2}} - 1.$$

§ 178. Perte de l'énergie cinétique au cours d'un choc parfaitement mou de deux corps. Théorème de Carnot. Il résulte des raisonnements faits au § 175 que dans un choc non élastique il y a une perte de l'énergie cinétique des corps entrant en collision. Cette perte est maximale au cours d'un choc parfaitement mou. Calculons la grandeur de l'énergie cinétique perdue par le système dans un choc parfaitement mou de deux corps.

En admettant que les corps qui se heurtent sont animés d'un mouvement de translation et en désignant leur vitesse commune après le choc parfaitement mou par u, nous obtenons pour l'énergie cinétique du système au début et à la fin du choc des valeurs:

$$T_0 = \frac{1}{2}(M_1 v_{1x}^2 + M_2 v_{2x}^2), \qquad T_1 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\, u_x^2. \tag{118}$$

L'énergie cinétique perdue au cours du choc sera égale à $T_0 - T_1$. Ecrivons cette différence sous la forme

$$T_0 - T_1 = T_0 - 2T_1 + T_1. \tag{119}$$

Il vient de la formule (116) que

$$(M_1 + M_2)\, u_x = M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x},$$

donc

$$2T_1 = (M_1 + M_2)\, u_x^2 = (M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x})\, u_x. \tag{120}$$

En substituant dans le second membre de l'égalité (119) T_0 et T_1 par leurs valeurs tirées des formules (118) et $2T_1$ par l'expression (120), nous obtenons:

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2}(M_1 v_{1x}^2 + M_2 v_{2x}^2 - 2M_1 v_{1x} u_x - 2M_2 v_{2x} u_x + M_1 u_x^2 + M_2 u_x^2)$$

ou

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2} M_1 (v_{1x} - u_x)^2 + \frac{1}{2} M_2 (v_{2x} - u_x)^2. \tag{121}$$

Les différences $(v_{1x} - u_x)$ et $(v_{2x} - u_x)$ montrent de combien a diminué pendant le choc la vitesse de chacun des corps entrant en collision. On peut les appeler *vitesses perdues dans le choc*. Alors il résulte de la formule (121) le théorème suivant, dit théorème de Carnot: *l'énergie cinétique perdue par un système de corps au cours d'un choc parfaitement mou est égale à l'énergie cinétique que posséderait le système si chacun de ses corps était animé de la vitesse qu'il a perdue.*

Considérons le cas particulier d'un choc avec un corps initialement immobile. Dans ce cas $v_2 = 0$ et

$$T_0 = \frac{1}{2} M_1 v_1^2, \qquad u = \frac{M_1 v_1}{M_1 + M_2}.$$

Alors

$$T_1 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)\, u^2 = \frac{1}{2}\frac{M_1^2 v_1^2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2}\frac{M_1 v_1^2}{2}$$

ou

$$T_1 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} T_0. \tag{122}$$

La formule (122) montre quelle énergie conserve le système après le choc. Examinons deux cas extrêmes particulièrement intéressants.

a) La masse du corps frappant est beaucoup plus grande que celle du corps frappé ($M_1 \gg M_2$). Dans ce cas on peut admettre que $M_1 + M_2 \approx M_1$ et la formule (122) donne $T_1 \approx T_0$. Par conséquent, quoique le choc

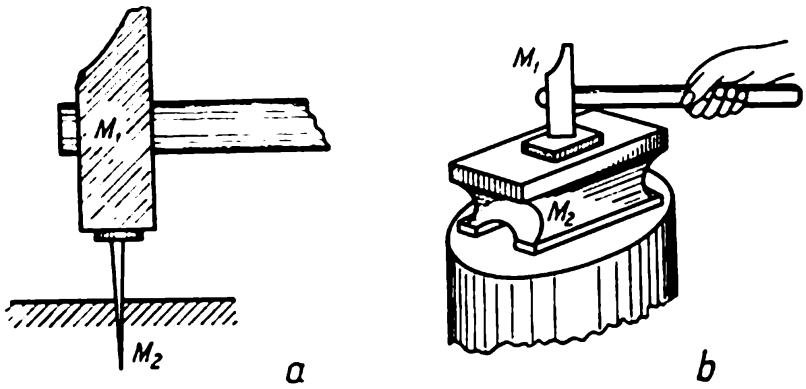


Fig. 381

soit parfaitement mou, la perte d'énergie cinétique est insignifiante et après le choc le système se déplace avec une énergie cinétique sensiblement égale à celle qu'il avait au début du choc.

C'est évidemment le résultat recherché en pratique lorsqu'on enfonce des clous, des pilots, etc. Par conséquent, il faut dans ce cas que la masse du marteau soit beaucoup plus grande que celle du clou (fig. 381, *a*).

b) La masse du corps frappé est beaucoup plus grande que la masse du corps frappant ($M_2 \gg M_1$). Dans ce cas on peut admettre que

$$\frac{M_1}{M_1 + M_2} \approx 0,$$

et la formule (122) donne $T_1 \approx 0$. Ainsi, dans ce cas, l'énergie cinétique est presque entièrement dépensée pour déformer les corps qui se heurtent ; à la fin du choc on peut admettre que les corps sont immobiles.

C'est évidemment le résultat recherché en pratique durant le forgeage, le rivetage, etc. Par conséquent, dans ces cas, il faut que la masse de la pièce forgée et de l'enclume (ou bien la masse du rivet et de son support) soit beaucoup plus grande que la masse du marteau (fig. 381,*b*).

§ 179. **Choc avec un corps en rotation.** Considérons un corps ayant un axe de rotation z (fig. 382). Supposons qu'à un certain moment une impulsion de percussion S soit appliquée au corps. Alors, d'après l'équation (111), on aura

$$K_{1z} - K_{0z} = m_z(S),$$

car les moments par rapport à l'axe z des réactions impulsives S_A et S_B qui apparaissent dans les paliers seront égaux à zéro. Si au

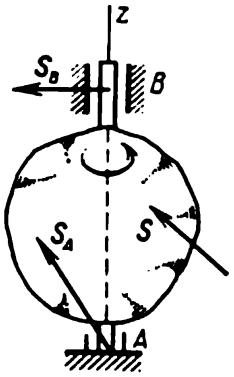


Fig. 382

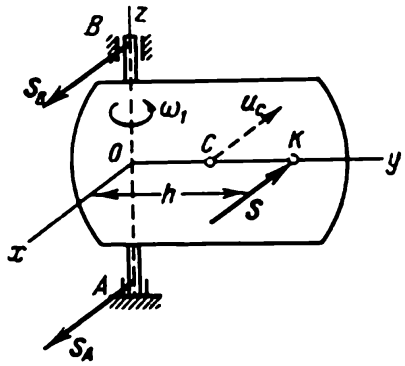


Fig. 383

début du choc le corps avait une vitesse angulaire ω_0 qui à la fin du choc devient égale à ω_1, donc $K_{0z} = J_z\omega_0$, $K_{1z} = J_z\omega_1$ et nous obtenons en définitive:

$$J_z(\omega_1 - \omega_0) = m_z(S) \tag{123}$$

ou

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{m_z(S)}{J_z}. \tag{123'}$$

La formule (123) détermine la variation de la vitesse angulaire du corps au cours d'un choc. Il en résulte que *la vitesse angulaire du corps pendant le choc varie d'une grandeur égale au quotient du moment de l'impulsion de percussion par le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de rotation.*

Centre de choc. Au cours d'un choc, certaines réactions impulsives apparaissent aux points de fixation de l'axe qui peuvent provoquer l'usure rapide des paliers et même leur destruction. Trouvons les conditions pour lesquelles un choc contre un corps fixé sur un axe ne provoque pas de réactions impulsives dans les paliers.

Pour cela, les masses du corps doivent être avant tout dynamiquement équilibrées par rapport au plan du choc, autrement dit,

ce plan doit être, par exemple, un plan de symétrie du corps [1]. Soit un corps ayant un plan de symétrie Oxy et dont l'axe AB perpendiculaire à ce plan tourne dans les paliers A et B (fig. 383). Menons l'axe Oy par le centre d'inertie C du corps et posons $OC = a$.

Nous admettrons qu'au début du choc le corps est immobile ($\omega_0 = 0$), ce qui ne modifie pas le résultat final. Lorsque sur le corps agit une impulsion de percussion $\boldsymbol{S}$ disposée dans le plan de symétrie, des réactions impulsives $\boldsymbol{S}_A$ et $\boldsymbol{S}_B$ apparaissent dans les paliers. Alors, d'après l'équation (118), on aura

$$\boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_0 = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}_A + \boldsymbol{S}_B. \tag{124}$$

Dans notre cas $\boldsymbol{Q}_0 = 0$, $\boldsymbol{Q}_1 = M\boldsymbol{u}_C$, où $\boldsymbol{u}_C$ désigne la vitesse du centre d'inertie C du corps à la fin du choc. Alors, on voit de l'équation (124) que la condition $\boldsymbol{S}_A = \boldsymbol{S}_B = 0$ peut être remplie si $\boldsymbol{S} = M\boldsymbol{u}_C$.

Il en résulte, en premier lieu, que l'impulsion $\boldsymbol{S}$ doit être parallèle à la vitesse $\boldsymbol{u}_C$, c'est-à-dire perpendiculaire à la droite OC (à l'axe Oy). De plus, de l'égalité des vecteurs résulte l'égalité de leurs modules; c'est pourquoi on doit avoir

$$S = Mu_C = Ma\omega_1.$$

Mais d'après l'équation (123') ω_1 sera égale à

$$\omega_1 = \frac{m_z(\boldsymbol{S})}{J_z} = \frac{Sh}{J_z}.$$

En substituant cette valeur de ω_1 dans l'égalité précédente, nous obtenons

$$h = \frac{J_z}{Ma}. \tag{125}$$

La formule (125) détermine à quelle distance h de l'axe doit être appliquée l'impulsion de percussion.

Ainsi, pour qu'au cours d'un choc avec un corps mobile autour d'un axe z il n'apparaisse point de réactions impulsives aux points de fixation de cet axe, il faut:

1) que le choc ait lieu dans le plan Oxy perpendiculaire à l'axe z qui doit être en outre un plan de symétrie du corps (ou que l'axe de rotation z par rapport à son point d'intersection avec ce plan, c'est-à-dire par rapport au point O, soit l'axe d'inertie principal);

2) que le choc soit dirigé perpendiculairement au plan qui passe par l'axe de rotation Az et le centre d'inertie C du corps;

---

[1] Pour simplifier les raisonnements on considère le cas où le corps possède un plan de symétrie Oxy perpendiculaire à l'axe z. Néanmoins tous les résultats seront également vérifiés dans le cas où il n'y a pas de symétrie si le choc se produit dans le plan Oxy qui passe par le point O par rapport auquel l'axe z est l'axe d'inertie principal du corps.

3) que l'impulsion de percussion soit appliquée à la distance $h = \frac{J_z}{Ma}$ de l'axe (du côté du centre d'inertie).

Le point K par lequel passera alors l'impulsion de percussion ne provoquant pas de réactions de percussion aux points de fixation de l'axe est alors appelé *centre de choc*.

Remarquons que d'après (125) le centre de choc coïncide avec le centre d'oscillations du pendule composé. Par conséquent, comme il a été montré au § 154, $h > a$, c'est-à-dire que la distance entre l'axe et le centre de choc est supérieure à celle qui sépare cet axe du centre d'inertie. Si l'axe de rotation passe par le centre d'inertie du corps, alors $a = 0$ et nous obtenons $h = \infty$. Dans ce cas il n'existe pas, à une distance finie, de centre de choc et tout choc subi par le corps sera transmis à l'axe.

Lorsque le choc reçu par le plan de symétrie Oxy ne passe pas par le centre de choc, des réactions impulsives S_A et S_B apparaissent dans les paliers. Lorsque les paliers sont disposés symétriquement, $S_A = S_B$ et ces grandeurs peuvent être déterminées à partir de l'équation (124).

Les applications des résultats obtenus sont illustrées par les exemples suivants :

1. Dans un cliquet mobile (problème 174) ou un mouton-pendule servant à éprouver les matériaux au choc, etc., il faut disposer l'axe de rotation de telle manière que le point du corps qui produit le choc soit, par rapport à cet axe, le centre de choc.

2. Quand on se sert d'un marteau, il faut tenir la manche de manière que le point qui produit le choc soit par rapport à la main un centre de choc. Autrement, la main recevra des contrecoups.

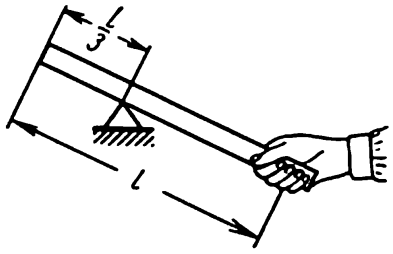


Fig. 384

3. Lorsqu'on frappe avec un bâton, pour ne pas se meurtrir la main (fig. 384) il faut frapper avec le point qui, par rapport à la main, sera un centre de choc. Si l'on admet que le bâton est une barre homogène de longueur l et que l'axe de rotation coïncide avec son extrémité, alors $a = \frac{l}{2}$, $J_z = \frac{1}{3} Ml^2$ et $h = \frac{J_z}{Ma} = \frac{2}{3} l$.

Par conséquent, dans le cas représenté sur la figure 384 il faut frapper avec la partie de la barre qui se trouve à la distance $\frac{2}{3} l$ de la main ou à $\frac{1}{3} l$ de son extrémité libre.

Problème 174. Le cliquet mobile AD au début du choc contre le percuteur B (fig. 385) a une vitesse angulaire ω_0. Déterminer la vitesse du percuteur à la fin du choc et l'impulsion de pression sur l'axe A. Les masses M et m du cliquet et du percuteur, le moment d'inertie J_A du cliquet par rapport à l'axe A et les distances a et b sont connus (le point C est le centre d'inertie du cliquet).

Solution. Désignons les impulsions de percussion qui agissent sur le cliquet et le percuteur pendant le choc par S_1 et S_2. Alors, pour le cliquet [d'après l'équation (123)] et pour le percuteur [d'après l'équation (109)], étant donné que $S_1 = S_2 = S$ et $v_B = 0$, nous obtenons:

$$J_A(\omega_1 - \omega_0) = -Sb, \quad mu_B = S \text{(a)}.$$

Le moment Sb est pris avec le signe moins, car il est dirigé dans le sens contraire à la rotation du cliquet. De plus, puisque pour le point D du cliquet $v_D = \omega_0 b$ et $u_D = \omega_1 b$ (v_D est la vitesse au début du choc, u_D, à la fin), la formule (114), qui définit le coefficient de restitution dans le choc direct de deux corps, donne:

$$u_D - u_B = -k(v_D - v_B)$$

ou

$$\omega_1 b - u_B = -k\omega_0 b.$$

Portant ici les valeurs de ω_1 et S tirées des équations (a), nous trouvons la vitesse du percuteur à la fin du choc:

$$u_B = \frac{J_A b(1+k)}{J_A + mb^2}\omega_0.$$

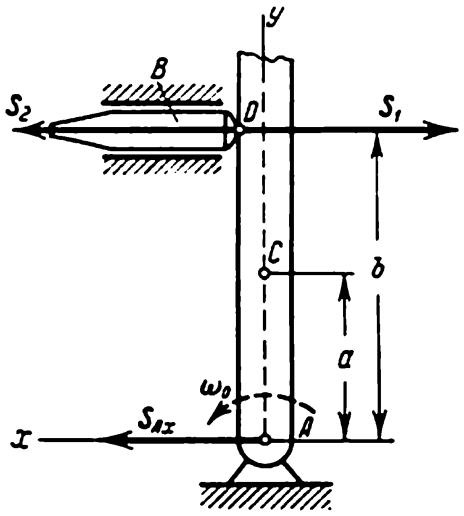


Fig. 385

Pour déterminer la réaction impulsive S_A qui agit de la part de l'axe sur le cliquet, posons l'équation (124) en projections sur les axes Ax et Ay. Etant donné que

$$Q_{0x} = Mv_{Cx} = M\omega_0 a, \qquad Q_{1x} = Mu_{Cx} = M\omega_1 a,$$

nous obtenons:

$$Ma(\omega_1 - \omega_0) = -S + S_{Ax}, \qquad S_{Ay} = 0. \tag{b}$$

Mais des équations (a) nous tirons

$$S = mu_B, \qquad \omega_1 - \omega_0 = -\frac{mb}{J_A}u_B.$$

Portant ces grandeurs dans l'égalité (b) et remplaçant u_B par sa valeur trouvée, nous obtenons en définitive:

$$S_{Ax} = \frac{J_A - Mab}{J_A + mb^2}mb(1+k)\omega_0.$$

On en déduit que si $b = \frac{J_A}{Ma}$, c'est-à-dire si le point D est le centre de choc, la grandeur $S_A = 0$. Quand $Mab < J_A$, nous obtenons $S_{Ax} > 0$, c'est-à-dire que l'impulsion de pression sur le cliquet est dirigée vers la gauche, et la pression sur l'axe, vers la droite. Quand $Mab > J_A$, la pression sur l'axe est dirigée vers la gauche.

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

Abaque de l'accélération 153
— des espaces 153
— du mouvement 153
— de la vitesse 153
Accélération absolue 228
— angulaire 223
— axipète 224
— de la chute libre 261
— de Coriolis 236
— d'entraînement 228
— normale 168, 171
— de la pesanteur 263
— du point 149, 170, 210
— relative 228
— de rotation 224
— tangentielle 168, 171
Angle de contingence 169
— de frottement 101
— de rotation du corps 185
Apesanteur 353
Aphélie 306
Appui
— articulé 71
— fixe 71
— mobile 71
Autofreinage 105
Axe du dyname 123
— instantané hélicoïdal 258
— — de rotation du corps 222
— principal d'inertie central 445
Axiome des liaisons 21
— du parallélogramme des forces 16
Axiomes de la statique 14 à 18

Binormale 307
Bras de levier d'une force 46

Centre de choc 494
— de forces parallèles 136
— de gravité d'un arc de circonférence 144
— — d'une ligne 140
— — d'une pyramide 145
Centre d'un secteur circulaire 144
— — d'un solide 138
— — d'une surface 140
— — d'un triangle 144
— — d'un volume 139
— d'inertie 360
— instantané des accélérations 217
— — des vitesses 199
— des masses 360
— des oscillations du pendule composé 420
— de réduction 62
Champ de forces 411
— de pesanteur uniforme 138
— potentiel 412
Charnière cylindrique 19
Choc 483
— avec un corps en rotation 494
— central 488
—, centre de 494
— direct 488
— oblique 488
— parfaitement mou 492
—, perte d'énergie cinétique 492
— de sphères 489
—, temps de 483
—, théorie du 483
Chute dans l'air 276
— libre 262
— verticale 322
Cinématique 8, 146
Coefficient de frottement de glissement dynamique 101
— — de rotation 109
— — de roulement 108
— — statique 99
— de rigidité d'un ressort 292
— de restitution 486
Composition des accélérations 228
— des couples coplanaires 58
— — dans l'espace 117
— de deux forces 23
— des forces, méthode géométrique 23
— — parallèles 51
— —, procédé analytique 32

Composition de rotations 246
— — autour de deux axes concourants 253
— — — — — parallèles 246
— d'un système de forces 24
— d'une translation et d'une rotation 255
— de trois forces non coplanaires 24
— des vitesses 228
Conditions d'équilibre analytiques 35
— — des couples 58
— — géométriques 35
— — graphiques d'un système plan de forces 91
— — d'un solide gêné 134
— — d'un système arbitraire dans l'espace 124
— — — en coordonnées généralisées 470
— — — de couples 118
— — — plan de forces 67
— initiales 268
Corps gêné 18
— libre 18
— de masse variable 384
Couple de forces 54
— résultant, détermination graphique 91
— de rotations 246
Courbe plane 305
Crapaudine 20

Décalage de phase des oscillations forcées 339
Décomposition des forces 25, 26, 50, 53
— du mouvement 193
Décrément d'amortissements 334
— — logarithmique 334
Degré de liberté 451
Déplacements virtuels 450
Déséquilibre dynamique des masses 445
Diagramme des accélérations 216
— de Maxwell-Cremona 96
— des vitesses 208
Direction d'action d'une force 13
Dyname 123
Dynamique 8, 259

Effet gyroscopique 432
Encastrement rigide 432
Energie cinétique du point 284
— — d'un système 397
— potentielle 411

Engrenage cylindrique 249
— différentiel 251
— planétaire 251
Equation générale de la dynamique 459
— de Mechtcherski 385
— des moments des forces concourantes 49
— des trois moments 69
Equations différentielles du mouvement du centre d'inertie 370
— — — curviligne du point 279
— — — plan d'un solide 422
— — — du point sur une trajectoire donnée 307
— — — rectiligne du point 267
— — — de rotation d'un solide 416
— — — d'un système 368
— — — — en coordonnées généralisées 465
— — des oscillations amorties 33
— — — forcées en l'absence de résistance 335
— — — — en présence de la résistance 337
— — — harmoniques libres 327
— d'équilibre (de repos) relatif du point 317
— de Lagrange 472
— du mouvement plan d'un solide 193, 194
— — du point dans les coordonnées cartésiennes 162
— — relatif du point 316
— du repos du point 316
Equilibre absolu 11
— des corps, influence de la rotation de la Terre 320
— dynamique des masses 445, 446
— instable 135
— en présence du frottement 102
— relatif 11
— stable 135
— d'un système de forces concourantes 49
— des systèmes de corps 77
— — — parallèles 70
Equivalence des couples 55
Expression analytique des forces 31

Ferme plane 93
— —, calcul graphique 93
Fil 19
Fonction de Lagrange 475
Force 7
— centrale 305

Force concentrée 14
— élastique 292
— d'équilibrage 14
— extérieure 14, 17, 335, 359
— de frottement 294
— d'inertie 313
— — de Coriolis 317
— — d'entraînement 317
— intérieure 14, 17, 359
— perturbatrice 335
— de pesanteur 291
— de rappel 326
— vive 285
Forces actives 19, 359
— concourantes 23
— généralisées 466
— — actives 468
— de masse 354
— non potentielles 412
— potentielles 412, 470
— réparties 14, 82 à 87
— superficielles 354
— volumiques 354
Formule de Galilée 299, 487
Frottement 99
—, angle de 101
—, coefficient de 99, 100, 108, 109
— de glissement 99
— de rotation 107
— de roulement 107

Graphique du mouvement 153
Gyroscope 429
— libre 430
— lourd 431
—, stabilité de l'axe 431
Gyroscopique
— couple 433
— effet 433
— moment 433

Impulsion d'une force 285
— élémentaire 285
— de percussion 483

Liaisons 18
— extérieures 78
— géométriques 464
— intérieures 78
— parfaites 451
Loi des aires 306
— de la chute libre 262
— de la conservation du mouvement du centre d'inertie 371
Loi de la quantité de mouvement 380
— de la dynamique, fondamentale 261
— de l'égalité de l'action et de la réaction 262
— de l'inertie 261
— de Kepler 306
— du mouvement 148, 154
— de Newton 261

Masse 260
Mécanique rationnelle 7
Méthode d'arrêt 251
— de Willis 251
Module d'une force 13
Moment angulaire d'un corps 389
— — résultant d'un système 389
— cinétique 303
— — résultant d'un système 388
— d'un couple 55, 116
— d'une force 46
— — par rapport à un axe 112, 115
— — par rapport à un centre (un point) 46, 47, 111, 115
— — — —, représentation vectorielle 110
— d'inertie centrifuge 445
— — d'un corps par rapport à un axe 361
— — — par rapport à des axes parallèles 365
— initial 268
— principal par rapport à un centre 360
— de la quantité de mouvement 303
— de réaction d'une hélice 393
— résultant des forces d'inertie 436
— — par rapport à un centre 360
— de rotation 416
Mouvement absolu 227
— accéléré 150, 172, 186
— composé 227
— curviligne 172, 279
— d'entraînement 227
— d'une fusée 384
— gêné 264, 307
— hélicoïdal 255
— d'inertie 34
— par inertie 261
— plan 193, 398, 421
— du point lancé sous un certain angle au niveau 280, 345
— de précession d'un gyroscope 431
— rectiligne 148, 170
— relatif 227
— — à proximité de la surface de la Terre 321

Mouvement retardé 150, 172, 186
— de rotation 184, 398, 416
— à la surface de la Terre 321
— du solide ayant un point fixe 221
— — libre 225
— sous l'action d'une force centrale 305
— de translation 182, 397
— uniforme 151, 172, 187
— uniformément accéléré 151
— — retardé 151
— — varié 151, 172, 187

Nœuds 93
Normale principale 168

Oscillations amorties 332
—, amplitude 152, 327
— entretenues 336
— forcées 335, 336
— —, décalage de phase 339
— — avec résistance 337
—, fréquence 328
—, fréquence circulaire 328
— harmoniques 152
— — simples 152
— paramétriques 392
— du pendule 419
—, période 152, 327
— petites 331
—, phase initiale 328
— propres 336
—, pulsation 335

Palier lisse 19
Parallélogramme des vitesses 230
Pendule composé 419
— —, centre des oscillations 420
— —, longueur synchrone 420
— —, période des petites oscillations 420
— mathématique 331
— réversible 420
— simple 420
Périhélie 306
Plan d'action du couple 55
— osculateur 160
Plate-forme de Joukovsky 392
Poids 138
Point d'application d'une force 13
— matériel 260
Polygone de forces 25, 88
— fermé 88
— funiculaire 88
— ouvert 88
Polygone vectoriel 21
Potentiel cinétique 475
Précession d'un gyroscope 431
Pressions sur l'axe d'un corps en rotation 435
— dynamiques 443
Principe de d'Alembert 307, 312, 435, 446
— de la conservation de l'énergie mécanique 414
— — du moment angulaire résultant 391
— des déplacements virtuels 452
— de Galilée 317
— de relativité de la mécanique classique 317
— de solidification 78
Principes de la statique 15
Problème de la dynamique 264
— —, deuxième 264
— —, fondamental 264, 368
— —, premier 263
Projection d'une force 29
— — sur un axe 29
— — sur un plan 30
Puissance 290, 405
Pulsation de la force extérieure 335
— des oscillations 328

Quantité de mouvement 284, 377

Rapport de transmission 250
Rayon de giration 362
— vecteur 157
Réactions d'appui 92
— dynamiques 309
— des liaisons 18, 19, 264, 309
— —, leur détermination 309
— — en présence du frottement 101
Réduction d'un système dans l'espace à un centre 119, 122
— — plan de forces à un centre donné 62
— — — — à sa plus simple expression 65
Règle de Joukovsky 433
Repos relatif à la surface de la terre 320
Résonance 335
Résultante d'un système de faces 14, 23
— — —, détermination graphique 89
Rotule sphérique 20

Satellites artificiels de la Terre 349
Solide parfait 12

Stabilité de l'équilibre 135
Statique 8, 11
Support 19
Surface lisse 19
Système de forces 14
— — équilibré 14
— — libre 14
— indéformable 403
— d'inertie 261
— d'unités 263
Systèmes déterminés du point de vue statique 36
— de forces équivalents 14
— indéterminés du point de vue statique 36

Temps de choc 483
— d'établissement d'oscillations 338
Théorème de Coriolis 236
— d'Euler-d'Alembert 221
— de Huygens 365
— des moments 389
— — par rapport à un axe 303
— — — à un centre 304
— du mouvement du centre d'inertie 369
— sur la projection de la dérivée d'un vecteur 160
— sur les projections des vitesses de deux points d'un corps 198
— de la translation d'une force 61
— des trois forces 35
— de la variation de l'énergie cinétique 294, 402, 414
— — du moment angulaire résultant d'un système 389, 485
— — — de la quantité de mouvement 303
— — de la quantité de mouvement 286, 378, 379, 484
— de Varignon 48, 125
Théorèmes généraux de la dynamique du point 284
Théorie du choc 483
Trajectoire absolue 228
— curviligne 148
— elliptique 351
— d'entraînement 228
— d'un point 148, 162
— rectiligne 148
Transmission par engrenages cylindriques 249
—, rapport 250
Travail d'une force 287
— élémentaire 288
— — élastique 292
— — de frottement 294
— — de pesanteur 291, 404
— — potentielle 413
Triangle des forces 23

Vecteur accélération du point 159
— glissant 15
— principal (d'un système de forces) 25, 63, 121
— résultant des forces d'inertie 435
Vis dynamique 123
Vitesse absolue 228
— angulaire instantanée 185, 225
— aréolaire 465
— circonférencielle 188
— circulaire 350
— en coordonnées généralisées 465
— — polaires 176
— deuxième cosmique 350
— généralisée 464
— initiale 268
— instantanée 158
— limite de la corde 277
— linéaire 188
— moyenne 158
— orbitale 350
— parabolique 349
— première cosmique 349
— d'un point 158, 162, 166
— relative 228

TABLE DES MATIÈRES

Préface de la première édition française 5
Avant-propos 7

Première partie

Statique du corps solide

Chapitre I. Notions principales et axiomes de la statique 11
§ 1. Objet de la statique 11
§ 2. Force 12
§ 3. Axiomes de la statique 14
§ 4. Liaisons et leurs réactions 18
§ 5. Axiome des liaisons 21

Chapitre II. Système de forces concourantes 23
§ 6. Méthode géométrique de composition des forces 23
§ 7. Décomposition des forces 25
§ 8. Projection d'une force sur un axe et sur un plan 29
§ 9. Expression analytique des forces 31
§ 10. Procédé analytique de composition des forces 32
§ 11. Equilibre d'un système de forces concourantes 34
§ 12. Problèmes statiquement déterminés et indéterminés . . . 36
§ 13. Résolution des problèmes de statique 37
§ 14. Moment d'une force par rapport à un centre (ou à un point) 46
§ 15. Théorème de Varignon du moment de la résultante . . . 48
§ 16. Equations des moments des forces concourantes 49

Chapitre III. Systèmes de forces parallèles et de couples coplanaires 51
§ 17. Composition et décomposition des forces parallèles 51
§ 18. Couple de forces. Moment d'un couple 54
§ 19. Equivalence des couples 55
§ 20. Composition des couples coplanaires. Condition d'équilibre des couples 58

Chapitre IV. Système de forces arbitrairement disposées dans un plan 61

§ 21. Théorème de la translation d'une force 61
§ 22. Réduction d'un système plan de forces à un centre donné 62
§ 23. Réduction d'un système plan de forces à sa plus simple expression 65
§ 24. Conditions d'équilibre d'un système plan de forces 67
§ 25. Equilibre d'un système plan de forces parallèles 70
§ 26. Résolution des problèmes 70
§ 27. Equilibre des systèmes de corps 77
§ 28. Forces réparties 82

Chapitre V. Notions de statique graphique 88

§ 29. Polygone des forces et polygone funiculaire. Réduction d'un système plan de forces à deux forces 88
§ 30. Détermination graphique de la résultante 89
§ 31. Détermination graphique du couple résultant 91
§ 32. Conditions graphiques d'équilibre d'un système plan de forces 91
§ 33. Détermination des réactions d'appui 92
§ 34. Calcul graphique des fermes planes 93
§ 35. Diagramme de Maxwell-Cremona 96

Chapitre VI. Frottement 99

§ 36. Lois du frottement de glissement 99
§ 37. Réactions des liaisons en présence du frottement. Angle de frottement 101
§ 38. Equilibre en présence du frottement 102
§ 39. Frottement d'un fil contre une surface cylindrique 106
§ 40. Frottement de roulement et frottement de rotation 107

Chapitre VII. Systèmes de couples et de forces disposés arbitrairement dans l'espace 110

§ 41. Représentation vectorielle du moment d'une force par rapport à un centre 110
§ 42. Moment d'une force par rapport à un axe 112
§ 43. Relation entre les moments d'une force par rapport à un centre et par rapport à un axe 115
§ 44. Représentation vectorielle du moment d'un couple de forces 116
§ 45. Composition des couples dans l'espace. Conditions d'équilibre des couples 117
§ 46. Réduction d'un système de forces dans l'espace à un centre donné 119
§ 47. Réduction d'un système de forces dans l'espace 122
§ 48. Conditions d'équilibre d'un système arbitraire de forces dans l'espace. Cas de forces parallèles 124
§ 49. Théorème de Varignon 125
§ 50. Problèmes sur l'équilibre des corps soumis à l'action d'un système de forces dans l'espace 126
§ 51. Conditions d'équilibre d'un solide gêné. Stabilité de l'équilibre 134

Chapitre VIII. Centre de gravité 136
§ 52. Centre des forces parallèles 136
§ 53. Centre de gravité d'un solide 138
§ 54. Coordonnées des centres de gravité des corps homogènes 139
§ 55. Procédés de détermination des coordonnées des centres de gravité des corps 140
§ 56. Centres de gravité de certains corps homogènes 143

Deuxième partie

Cinématique du point et du corps solide

Chapitre IX. Mouvement rectiligne du point 146
§ 57. Introduction 146
§ 58. Loi du mouvement rectiligne 148
§ 59. Vitesse et accélération du point en mouvement rectiligne 148
§ 60. Quelques exemples du mouvement rectiligne du point . . . 151
§ 61. Abaques du mouvement, de la vitesse et de l'accélération du point 153
§ 62. Résolution des problèmes 154

Chapitre X. Mouvement curviligne du point 157
§ 63. Définition du mouvement du point par le procédé vectoriel 157
§ 64. Vecteur vitesse du point 158
§ 65. Vecteur accélération du point 159
§ 66. Théorème sur la projection de la dérivée d'un vecteur . . . 160
§ 67. Donnée du mouvement du point par ses coordonnées. Détermination de la trajectoire, de la vitesse et de l'accélération du point 161
§ 68. Mode naturel de description du mouvement. Détermination de la vitesse du point 166
§ 69. Accélérations tangentielle et normale du point 168
§ 70. Cas particuliers du mouvement du point 171
§ 71. Vitesse du point en coordonnées polaires 176
§ 72. Etude graphique du mouvement du point 177

Chapitre XI. Mouvement de translation et mouvement de rotation du corps solide 182
§ 73. Mouvement de translation 182
§ 74. Mouvement de rotation du corps solide. Vitesse et accélération angulaires 184
§ 75. Rotation uniforme et uniformément variée 187
§ 76. Vitesses et accélérations des points d'un corps en rotation 188

Chapitre XII. Mouvement plan du corps solide 193
§ 77. Equations du mouvement plan. Décomposition du mouvement en mouvement de translation et de rotation 193
§ 78. Détermination des trajectoires des points du corps 195
§ 79. Détermination des vitesses des points du corps 197
§ 80. Théorème sur les projections des vitesses de deux points du corps 198

§ 81. Détermination des vitesses des points du corps au moyen du centre instantané des vitesses 199
§ 82. Résolution des problèmes 203
§ 83. Diagramme des vitesses 208
§ 84. Détermination des accélérations des points du corps 210
§ 85. Centre instantané des accélérations 217

Chapitre XIII. Mouvement du corps solide ayant un point fixe et mouvement du corps solide libre 221
§ 86. Mouvement du corps solide ayant un point fixe 221
§ 87. Vitesses et accélérations des points du corps 223
§ 88. Cas général du mouvement d'un corps solide libre 225

Chapitre XIV. Mouvement composé du point 227
§ 89. Mouvements relatif, d'entraînement et absolu 227
§ 90. Composition des vitesses 228
§ 91. Composition des accélérations. Théorème de Coriolis . . . 233
§ 92. Calcul de l'accélération de Coriolis 236
§ 93. Résolution des problèmes 239

Chapitre XV. Mouvement composé du corps solide 246
§ 94. Composition des mouvements de translation 246
§ 95. Composition des rotations autour de deux axes parallèles 246
§ 96. Transmissions par engrenages cylindriques 249
§ 97. Composition des rotations autour de deux axes concourants 253
§ 98. Composition d'une translation et d'une rotation. Mouvement hélicoïdal 255

Troisième partie

Dynamique du point

Chapitre XVI. Introduction à la dynamique. Les lois de la dynamique 259
§ 99. Notions et définitions principales 259
§ 100. Lois de la dynamique 261
§ 101. Systèmes d'unités 263
§ 102. Problèmes de la dynamique du point matériel libre et gêné 263
§ 103. Solution du premier problème de la dynamique (détermination des forces d'après la loi du mouvement) 264

Chapitre XVII. Equations différentielles du mouvement du point et leur intégration 267
§ 104. Mouvement rectiligne du point 267
§ 105. Résolution des problèmes 270
§ 106. Chute d'un corps dans un milieu offrant une résistance (dans l'air) 276
§ 107. Mouvement curviligne du point 279
§ 108. Mouvement du point lancé sous un certain angle au niveau dans un champ de pesanteur uniforme 280

Chapitre XVIII. Théorèmes généraux de la dynamique du point . . . 284
§ 109. Quantité de mouvement et énergie cinétique du point . . 284
§ 110. Impulsion d'une force 285
§ 111. Théorème de la variation de la quantité de mouvement du point 286
§ 112. Travail d'une force. Puissance 287
§ 113. Exemples de calcul du travail 291
§ 114. Théorème de la variation de l'énergie cinétique du point 294
§ 115. Résolution des problèmes 295
§ 116. Théorème de la variation du moment de la quantité de mouvement du point (théorème des moments) 303

Chapitre XIX. Mouvement gêné du point et principe de d'Alembert 307
§ 117. Equations du mouvement du point assujetti à suivre une trajectoire déterminée 307
§ 118. Détermination des réactions de liaisons 309
§ 119. Principe de d'Alembert 312

Chapitre XX. Mouvement relatif du point 316
§ 120. Equations du mouvement relatif et du repos du point . . 316
§ 121. Influence de la rotation de la Terre sur l'équilibre et le mouvement des corps 320
§ 122. Ecartement de la verticale d'un point en chute sous l'action de la rotation de la Terre 322

Chapitre XXI. Mouvement oscillatoire du point 326
§ 123. Oscillations harmoniques libres. Pendule mathématique 326
§ 124. Oscillations amorties 332
§ 125. Oscillations forcées. Résonance 335

Chapitre XXII. Mouvement du corps dans le champ de gravitation terrestre 345
§ 126. Mouvement du point matériel, lancé sous un certain angle au niveau dans le champ de gravitation de la Terre . . . 345
§ 127. Satellites artificiels de la Terre. Trajectoires elliptiques 349
§ 128. L'apesanteur 353

Quatrième partie
Dynamique des systèmes et du corps solide

Chapitre XXIII. Introduction à la dynamique des systèmes. Moments d'inertie d'un corps solide 359
§ 129. Système mécanique. Forces extérieures et intérieures . . . 359
§ 130. Masse d'un système. Centre des masses ou d'inertie . . . 360
§ 131. Moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe. Rayon de giration 361
§ 132. Moments d'inertie de quelques corps homogènes 362
§ 133. Moments d'inertie d'un corps par rapport à des axes parallèles. Théorème de Huygens 365

Chapitre XXIV. Mouvement du centre d'inertie d'un système . . . 368
§ 134. Equations différentielles du mouvement d'un système 368
§ 135. Mouvement du centre d'inertie 369
§ 136. Loi de la conservation du mouvement du centre d'inertie 370
§ 137. Résolution des problèmes 373

Chapitre XXV. Théorème de la variation de la quantité de mouvement d'un système 377
§ 138. Quantité de mouvement d'un système 377
§ 139. Théorème de la variation de la quantité de mouvement 378
§ 140. Loi de la conservation de la quantité de mouvement . . . 380
§ 141. Résolution des problèmes 381
§ 142. Corps de masse variable. Mouvement d'une fusée 384

Chapitre XXVI. Théorème de la variation du moment cinétique d'un système 388
§ 143. Moment cinétique résultant d'un système 388
§ 144. Théorème de la variation du moment angulaire résultant d'un système (théorème des moments) 389
§ 145. Principe de la conservation du moment angulaire résultant 390
§ 146. Résolution des problèmes 393

Chapitre XXVII. Théorème de la variation de l'énergie cinétique d'un système 397
§ 147. Energie cinétique d'un système 397
§ 148. Théorème de la variation de l'énergie cinétique d'un système 402
§ 149. Quelques exemples de calcul du travail 404
§ 150. Résolution des problèmes 406
§ 151. Champ de forces. Notion d'énergie potentielle 411
§ 152. Principe de la conservation de l'énergie mécanique . . . 414

Chapitre XXVIII. Quelques cas de mouvement d'un corps solide . . . 416
§ 153. Mouvement de rotation d'un corps solide 416
§ 154. Pendule composé 419
§ 155. Détermination expérimentale des moments d'inertie . . . 421
§ 156. Mouvement plan d'un corps solide 421
§ 157. Théorie simplifiée du gyroscope 429

Chapitre XXIX. Principe de d'Alembert. Pression sur l'axe d'un corps en rotation 435
§ 158. Généralisation du principe de d'Alembert à un système 435
§ 159. Vecteur résultant et moment résultant des forces d'inertie d'un solide 436
§ 160. Résolution des problèmes 438
§ 161. Pressions dynamiques sur l'axe d'un corps en rotation . . . 443
§ 162. Axes principaux d'inertie d'un corps. Equilibre dynamique des masses 445

Chapitre XXX. Principe des déplacements virtuels et équation générale de la dynamique 450

§ 163. Déplacements virtuels d'un système. Degré de liberté 450
§ 164. Liaisons parfaites 451
§ 165. Principe des déplacements virtuels 452
§ 166. Résolution des problèmes 454
§ 167. Equation générale de la dynamique 459

Chapitre XXXI. Equations du mouvement d'un système en coordonnées généralisées (Equations de Lagrange) 464

§ 168. Coordonnées et vitesses généralisées 464
§ 169. Forces généralisées 466
§ 170. Conditions d'équilibre d'un système exprimées en coordonnées généralisées 470
§ 171. Equations de Lagrange 472
§ 172. Résolution des problèmes 476

Chapitre XXXII. Théorie du choc 483

§ 173. Equation fondamentale de la théorie du choc 483
§ 174. Théorèmes généraux de la théorie du choc 484
§ 175. Coefficient de restitution au cours d'un choc 486
§ 176. Choc d'un corps contre un obstacle immobile 488
§ 177. Choc direct et central de deux corps (choc de sphères) . . 489
§ 178. Perte de l'énergie cinétique au cours d'un choc parfaitement mou de deux corps. Théorème de Carnot 492
§ 179. Choc avec un corps en rotation 494

Index alphabétique des matières 498